AUTOREFERAT

Piotr Pokora

Adres: Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie
ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków
Email: piotr.pokora@up.krakow.pl
www: https://sites.google.com/site/piotrpokorahomepage/home

Dyplomy i stopnie naukowe

2010 Licencjat Matematyki (Summa Cum Laude), Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Praca dyplomowa: *Skończenie wymiarowe rzeczywiste algebry z dzieleniem*
Promotor: dr Marcin Skrzyński

2012 Magister Matematyki (Summa Cum Laude), Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
Praca magisterska: *Twierdzenie Frobeniusa o zachowywaniu wyznacznika i Linear Preserver Problems*
Promotor: dr Marcin Skrzyński

2015 Doktor Nauk Matematycznych (Summa Cum Laude), Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie
Praca doktorska: *Minkowski decompositions and degenerations of Okounkov bodies*
Promotor: Prof. dr hab. Tomasz Szemberg
Promotor Pomocniczy: dr hab. Jarosław Buczyński

Dotychczasowe zatrudnienie

2014–2015 *Asystent*, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie.
2015–2017 *Adiunkt*, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie (na bezpłatnym urlopie naukowym).
2015–2016 *Stanowisko Post-doca*, Instytut Matematyki, *Uniwersytet Jana Gunteberga w Moguncji*.
2016–2017 *Stanowisko Post-doca i Privatdozenta*, Instytut Geometrii Algebraicznej, Uniwersytet Leibniza w Hanowerze.
2017–2019 *Adiunkt*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.
2019–2021 *Adiunkt*, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie.
2021–nadal *Profesor Uniwersytetu*, Instytut Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie.

Osiągnięcie habilitacyjne:

Krzywe osobliwe na powierzchniach algebraicznych - algebra, geometria i kombinatoryka.

[Hab1] Th. Bauer, P. Pokora, D. Schmitz, On the boundedness of the denominators in the Zariski decomposition on surfaces. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **733**: 251 – 259 (2017).

IF: 1.686, Punktacja MEiN: 200,

[Hab2] P. Pokora, X. Roulleau, T. Szemberg, Bounded negativity, Harbourne constants and transversal arrangements of curves. *Annales de l'Institut Fourier Grenoble* **67(6)**: 2719 – 2735 (2017).

IF: 0.638, Punktacja MEiN: 140

[Hab3] R. Laface, P. Pokora, On the local negativity of surfaces with numerically trivial canonical class. *Rendiconti Lincei – Matematica e Applicazioni* **29**: 237 – 253 (2018).

IF: 0.690, Punktacja MEiN: 100

[Hab4] Piotr Pokora, J. Roé, Harbourne constants under ramified morphisms. *Results in Mathematics* **74(3)**: Article #109 - 24 pp. (2019).

IF: 1.162, Punktacja MEiN: 100

[Hab5] P. Pokora, Hirzebruch-type inequalities viewed as tools in combinatorics. *Electronic Journal of Combinatorics* **28(1)**: #P1.9 - 22 pages (2021).

IF: 0.690, Punktacja MEiN: 100

[Hab6] A. Dimca, P. Pokora, On conic-line arrangements with nodes, tacnodes, and ordinary triple points. *Journal of Algebraic Combinatorics* **56(2)**: 403 – 424 (2022).

IF: 0.963, Punktacja MEiN: 100

[Hab7] P. Pokora, T. Szemberg, Conic-line arrangements in the complex projective plane. *Discrete and Computational Geometry*, dostępna elektronicznie `doi:10.1007/s00454-022-00397-6`, 18 pages.

IF: 0.639, Punktacja MEiN: 100

Omówienie

1. Wstęp

Moje badania naukowe są poświęcone teorii krzywych na powierzchniach algebraicznych i obecnie zajmuję się następującym trzema problemami badawczymi, mianowicie

- hipotezą o ograniczonej ujemności dla powierzchni algebraicznych,
- konstrukcjami krzywych osobliwych, w szczególności tych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej,
- wariacjami na temat hipotezy Terao o wolności oraz wolnymi i niemal wolnymi zredukowanymi krzywymi płaskimi.

Poniżej przedstawiamy krótkie i ogólne wprowadzenie do tematyki badawczej starając się utrzymać nieformalny styl prezentacji w celu przedstawienia głównych pomysłów oraz motywacji stojącej za podjęciem tej tematyki badawczej. Będziemy korzystać ze standardowych oznaczeń zaczerpniętych z monografii [10, 23]. Wszystkie obiekty, jakie będziemy badać, są z założenia zdefiniowane nad ciałem liczb zespolonych - pewne rezultaty da się sformułować bardziej ogólnie i będziemy to podkreślać bezpośrednio w tekście w odpowiednich momentach autoreferatu.

1.1. **Hipoteza o ograniczonej ujemności.** Zakładamy, że każda powierzchnia algebraiczna X jest normalna i rzutowa. Mówimy, że krzywa $C \subset X$ jest *ujemna*, jeżeli C jest nieprzywiedlną i zredukowaną krzywą o samoprzecięciu $C^2 < 0$. Teoria krzywych na powierzchniach algebraicznych jest klasycznym przedmiotem badań w geometrii algebraicznej. Teoria ta rozwija się w wielu kierunkach, jedną z możliwości jest powiązanie teorii krzywych z *pozytywnością*, np. z wykorzystaniem stałych Seshadriego, ale z drugiej strony nadal dość niewiele wiadomo o *ujemności* krzywych algebraicznych. Jedną z najbardziej podstawowych informacji o tym jak krzywa jest zanurzana w powierzchni jest jej samoprzecięcie. Na początku XX wieku Włoska Szkoła Geometrii Algebraicznej (prawdopodobnie jej reprezentant F. Enriques) sformułowała następującą hipotezę [3].

Definicja 1.1. *Mówimy, że powierzchnia X ma własność ograniczonej ujemności, jeżeli istnieje liczba $b(X) \in \mathbb{Z}$ taka, że dla każdej zredukowanej i nieprzywiedlnej krzywej $C \subset X$ mamy $C^2 \geq -b(X)$.*

Hipoteza 1.2 (BNC)**.** *Każda powierzchnia zdefiniowana nad ciałem charakterystyki 0 posiada własność ograniczonej ujemności.*

Uwaga 1. Powyższa hipoteza jest fałszywa w dodatniej charakterystyce. Rozważmy $X = C \times C$, gdzie C jest krzywą genusu $g(C) \geq 2$ zdefiniowaną nad ciałem charakterystyki $p > 0$. Niech Γ_n będzie wykresem na X n-tej iteracji morfizmu Frobeniusa. Wówczas

$$\Gamma_n^2 = p^n(2 - 2g(C)).$$

Ponieważ n może być dowolne, zatem X nie posiada własności ograniczonej ujemności.

Wiemy, że pewne powierzchnie posiadają własność ograniczonej ujemności.

Twierdzenie 1.3. [18, Corollary 1.2.3] *Powierzchnia X posiada własność ograniczonej ujemności, jeżeli $-mK_X$ jest efektywny dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m.*

W szczególności, rozdmuchanie zespolonej płaszczyzny rzutowej, oznaczane przez X_r, wzdłuż $r \in \{1, ..., 9\}$ (bardzo) ogólnych punktów ma własność ograniczonej ujemności. Ściślej ujmując, można wykazać, że na X_r wszystkie krzywe ujemne to dokładnie (-1)-krzywe. Z drugiej strony, nie wiemy czy rozdmuchanie zespolonej płaszczyzny rzutowej wzdłuż $r = 10$ (bardzo) ogólnych punktów posiada własność ograniczonej ujemności, co jest dość rozczarowujące. W tym miejscu warto podkreślić, że jeżeli nie wymagamy od konfiguracji 10 punktów na płaszczyźnie, aby punkty te były w pozycji (bardzo) ogólnej, to wówczas nasz problem staje się jeszcze bardziej skomplikowany, ale również ciekawszy. Rozważmy teraz układ 5 prostych ogólnych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Proste te przecinają się w dokładnie 10 punktach podwójnych. Jeżeli teraz weźmiemy rozdmuchanie zespolonej płaszczyzny rzutowej wzdłuż tych 10 punktów przecięcia, to wówczas dla uzyskanej powierzchni X'_{10} dywizor $-K_{X'_{10}}$ jest duży. Przypomnijmy, że jeżeli X jest zespoloną wymierną powierzchnią rzutową o tej własności, że $-K_X$ jest duży, to wówczas X jest wymarzoną powierzchnią Moriego (ang. Mori Dream Surface) [34]. W szczególności, jeżeli X jest wymarzoną powierzchnią Moriego, to wówczas X posiada tylko skończenie wiele krzywych ujemnych. Oznacza to, że X'_{10} ma skończenie wiele krzywych ujemnych.

Na podstawie powyższej krótkiej dyskusji, możemy sformułować kilka ciekawych problemów dotyczących ograniczonej ujemności, oczywiście poza oczywistym głównym problemem otwartym, tj. czy każda rzutowa powierzchnia w charakterystyce zero posiada własność ograniczonej ujemności. Jeden z tych problemów dotyczy biwymierności.

Problem 1.4. *Niech X i Y będą dwiema powierzchniami biwymiernie równoważnymi. Przypuśćmy, że Y posiada własność ograniczonej ujemności. Czy prawdą jest, że X również posiada własność ograniczonej ujemności? Innymi słowy, czy własność ograniczonej ujemności jest biwymiernym niezmiennikiem?*

Należy zwrócić uwagę w tym miejscu, że powyższy problem w charakterystyce zero jest otwarty nawet w przypadku, gdy Y jest rozdmuchaniem powierzchni X w jednym punkcie. W dodatniej charakterystyce natomiast, na podstawie pracy Chenga i van Dobben de Bruyna opublikowanej w Crelle [8], istnieje ciąg rozdmuchań płaszczyzny rzutowej nad ciałem dodatniej charakterystyki, który zawiera gładkie krzywe wymierne posiadające dowolnie ujemne wartości samoprzecięć, wobec czego hipoteza o ograniczonej ujemności nie zachodzi w charakterystyce dodatniej nawet w przypadku powierzchni wymiernych. Wobec powyższego, w charakterystyce dodatnie odpowiedź na powyższe pytanie jest negatywna!

Pierwszym problemem, z jakim musimy się zmierzyć, jest znalezienie właściwej metody mierzenia ujemności dla powierzchni algebraicznych. Zauważmy, że bardzo łatwo skonstruować, ale dość sztucznie, bardzo ujemne krzywe na rozdmuchaniu powierzchni. Dla przykładu, weźmy dostatecznie dużo parami różnych s punktów na gładkiej krzywej C stopnia $d \geq 1$ zawartej w zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Wówczas transformata właściwa $\tilde{C}$ krzywej C na rozdmuchaniu wzdłuż wskazanych s punktów posiada samoprzecięcie równe $d^2 - s$, zatem dla dostatecznie dużych s wartość samoprzecięcia jest być bardzo ujemna. W celu uniknięcia takich sytuacji, szczególnie w przypadku rozdmuchań powierzchni, wydaje się być dość naturalnym, aby rozważać ważone samoprzecięcia krzywych, tj. obliczamy wartość samoprzecięcia krzywej, a następnie dzielimy tą wartość przez liczbę punktów wzdłuż których rozdmuchaliśmy naszą powierzchnię. Pomysł ten staje się jeszcze bardziej naturalny przy bliższym spojrzeniu, mianowicie tak zdefiniowane wartości samoprzecięć pozwalają nam mierzyć ujemność krzywych względem przyrostu liczby Picarda powierzchni po rozdmuchaniu. Ta obserwacja stanowi główną motywację dla zdefiniowania pojęcia stałej Harbourne'a i indeksu Harbourne'a dla danej krzywej zredukowanej zawartej w powierzchni algebraicznej X. Warto zwrócić uwagę już w tym miejscu, że wielu autorów oraz recenzentów prac sugeruje, że wspomniane stałe i indeksy powinny nosić nazwę *Hadean*, tj. stałych i indeksów pochodzących z Hadesu, a to ze względu na niezaprzeczalny fakt, że bardzo trudno obliczyć te liczby nawet w przypadku ustalonych klas krzywych. W niniejszym autoreferacie skupimy się na indeksach Harbourne'a, głównie w celu utrzymania spójności w prezentacji rezultatów uzyskanych przez kandydata, również we współpracy ze współautorami, jak również innych autorów. Pojęcie indeksu Harbourne'a jest mocno osadzone w kontekście układów krzywych ponieważ w tym przypadku skupiamy się na punktach osobliwych krzywych, a nie na dowolnych konfiguracjach punktów.

Przypomnijmy również, że hipoteza o ograniczonej ujemności zachodzi dla zredukowanych krzywych zawartych w powierzchni X wtedy i tylko wtedy, gdy hipoteza ta zachodzi dla zredukowanych i nieprzywiedlnych krzywych zawartych w X, zobacz [2, Proposition 3.8.2], wobec czego w niniejszym autoreferacie skupiamy się głównie na przypadku zredukowanych konfiguracji krzywych.

Definicja 1.5. *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową oraz niech $C \subset X$ będzie zredukowaną krzywą. Wówczas indeksem Harbourne'a krzywej C nazywamy*

$$h(X;C) = \frac{C^2 - \sum_{p\in \mathrm{Sing}(X)} \mathrm{m}_p^2(C)}{s},$$

przy czym s oznacza liczbę punktów osobliwych $\mathrm{Sing}(C)$ oraz m_p oznacza krotność krzywej C w punkcie osobliwym $p \in \mathrm{Sing}(C)$. W przypadku, gdy C jest zredukowaną krzywą, która nie posiada punktów osobliwych, to wówczas $h(X;C) = C^2$.

Globalnym indeksem Harbourne'a powierzchni X nazywamy

$$h(X) = \inf_C h(X;C),$$

przy czym infimum jest brane po wszystkich zredukowanych krzywych $C \subset X$.

Indeksy Harbourne'a mierzą lokalną ujemność krzywych na powierzchniach algebraicznych. W szczególności, indeksy te pozwalają nam stwierdzić dla jakich klas zredukowanych krzywych hipoteza o ograniczonej ujemności zachodzi na rozdmuchaniach wzdłuż zbiorów punktów osobliwych tych krzywych. Powyższe rozważania dają nam nowe narzędzie do badania hipotezy o ograniczonej ujemności z perspektywy asymptotycznej. Podsumowując tą część, popatrzmy na następujący ekstremalny przykład ukazujący właśnie podejście asymptotyczne.

Przykład 1. Severi udowodnił w [30], że istnieje nierozkładalna wymierna krzywa $C_d \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ stopnia d, która posiada dokładnie $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ prostych punktów podwójnych. Wówczas

$$h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; C_d) = \frac{d^2 - 4g}{g} \xrightarrow{d\to\infty} -2.$$

Ten przykład pozwala nam stwierdzić, że $h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \leq -2$. W części dotyczącej osiągnięcia habilitacyjnego przedstawiamy wyniki pozwalające oszacować indeksy Harbourne'a dla różnych powierzchni algebraicznych. W szczególności, przedstawimy wyniki dla konfiguracji krzywych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej oraz w przypadku konfiguracji krzywych wymiernych na powierzchniach posiadających trywialną klasę kanoniczną.

1.2. **Krzywe osobliwe na powierzchniach algebraicznych.** Teoria płaskich krzywych stanowi bardzo klasyczny obszar badań, a jego początki sięgają czasów tworzenia zupełnych podstaw geometrii rzutowej. Jeżeli myślimy o krzywych i ich własnościach kombinatorycznych, naszym pierwszym obiektem badań są konfiguracje prostych zawarte w płaszczyźnie rzutowej nad ustalonym (dowolnym) ciałem $\mathbb{F}$. Pierwszy problem dotyczy istnienia kombinatorycznych ograniczeń, które mogą nam pozwolić na wykluczenie istnienia pewnych *kombinatorycznych konfiguracji*. Dla przykładu, jeżeli $\mathcal{L}$ jest konfiguracją d prostych zawartych w płaszczyźnie rzutowej, to wówczas zachodzi następujące zliczanie kombinatoryczne:

$$\binom{d}{2} = \sum_{r \geq 2} \binom{r}{2} t_r,$$

przy czym t_r oznacza liczbę r-krotnych punktów przecięcia. Jeżeli teraz weźmiemy $d = 7$, to powyższa tożsamość mówi nam, że możemy (potencjalnie) mieć układ z $t_3 = 7$. Czy istnieje układ $d = 7$ prostych z $t_3 = 7$ zawarty w zespolonej płaszczyźnie rzutowej? Okazuje się, że problem ten został rozwiązany wiele lat temu, mianowicie konfiguracja $d = 7$ prostych z $t_3 = 7$ istnieje jeśli ciało nad którym rozpatrujemy naszą konfigurację ma charakterystykę 2. W szczególności w przypadku gdy $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, to wówczas mówimy o płaszczyźnie Fano.

Innym pytaniem, które możemy zadać, i jest to otwarty problem badawczy, dotyczy istnienia konfiguracji $d = 13$ prostych z $t_3 = 26$. Przewidujemy, że taka konfiguracja punktów i prostych nie istnieje nad ciałem liczb zespolonych, jednakże nie mamy formalnego dowodu tego faktu. Na podstawie tych krótkich rozważań możemy już teraz zauważyć, że znalezienie jak najmocniejszych wyników ograniczających kombinatoryczne własności krzywych jest istotnym zagadnieniem w problematyce konstruowalności konfiguracji krzywych nad ustalonym ciałem $\mathbb{F}$. W przypadku zespolonych konfiguracji prostych rzutowych, Hirzebruch w jego słynnej pracy [19] dotyczącej konstrukcji powierzchni będących ilorazami kuli przedstawił nierówność, która jest prostym wnioskiem z bardzo ogólnych rozważań geometrycznych.

Twierdzenie 1.6 (Hirzebruch)**.** *Niech $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $d \geq 6$ prostych o tej własności, że $t_d = t_{d-1} = 0$. Wówczas zachodzi następująca nierówność:*

$$t_2 + \frac{3}{4} t_3 \geq d + \sum_{r \geq 5} (r-4) t_r.$$

Nierówność ta stanowi niezwykle ważne i mocne narzędzie w kontekście zastosowań kombinatorycznych, w szczególności w tematyce ekstremalnych problemów geometrii punktów i prostych na płaszczyźnie. Z drugiej strony, korzystając wyłącznie z powyższej nierówności, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy konfigurację $d = 13$ prostych z $t_3 = 26$ da się skonstruować nad ciałem liczb zespolonych. Ta obserwacja wskazuje nam kolejną dziedzinę badań, którą kandydat podjął kilka lat temu, mianowicie problem konstruowalności krzywych zredukowanych z ustalonym osobliwościami.

W moich badaniach skupiłem się na dowodzeniu nierówności typu Hirzebrucha dla krzywych zredukowanych na różnych typach powierzchni rzutowych zdefiniowanych nad ciałem liczb zespolonych, jak i na testowaniu różnych metod pozwalających na konstruowanie krzywych. Wśród tych metod można wskazać te oparte na symetriach, głównie z wykorzystaniem nieprzywiedlnych zespolonych grup odbić, jak również na stosowaniu morfizmów rozgałęzionych oraz ich własności lokalnych. W dalszej części autoreferatu przedstawimy wyniki uzyskane w tych kierunkach badań, tj. nierówności typu Hirzebrucha, wraz z ich zastosowaniami, oraz jawne konstrukcje krzywych osobliwych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej, które okazują się być bardzo ważne w kontekście hipotezy o ograniczonej ujemności, jak również problemu geografii log-powierzchni algebraicznych.

1.3. **Hipoteza Terao o wolności.** W tej części przedstawimy krótkie i klasyczne wprowadzenie do tematyki odnosząc się tylko do pojęcia różniczkowania pierścienia wielomianów. Niech $S := \mathbb{C}[x, y, z] = \bigoplus_k S_k$ będzie pierścieniem wielomianów z gradacją oraz niech $f \in S$ będzie wielomianem jednorodnym stopnia d. Rozważmy krzywą $C : f = 0$ w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ daną równaniem f. Nasze rozważania rozpoczniemy od pojęcia wolności krzywej. Oznaczmy przez $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ pochodne cząstkowe oraz zdefiniujmy

$$\mathrm{Der}(S) = \{\partial := a \cdot \partial_x + b \cdot \partial_y + c \cdot \partial_z,\ a, b, c \in S\},$$

tj. S-moduł $\mathbb{C}$-liniowych różniczkowań pierścienia S. Dla zredukowanej krzywej płaskiej $C : f = 0$ zdefiniowanej wielomianem jednorodnym $f \in S_d$ definiujemy teraz

$$\mathrm{D}(f) = \{\partial \in \mathrm{Der}(S) : \partial(f) \in \langle f \rangle\}.$$

Innymi słowy, $\mathrm{D}(f)$ jest to zbiór tych wszystkich różniczkowań pierścienia S, które zachowują ideał $\langle f \rangle$. Można pokazać, że jeżeli $C : f = 0$ jest krzywą zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, to wówczas mamy następujący rozkład

$$\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}_0(f) \oplus S \cdot \delta_E,$$

gdzie $\delta_E = x \cdot \partial_x + y \cdot \partial_y + z \cdot \partial_z$ jest różniczkowaniem Eulera oraz

$$\mathrm{D}_0(f) = \{\partial \in \mathrm{Der}(S) : \partial(f) = 0\}.$$

Definicja 1.7. *Mówimy, że zredukowana krzywa $C : f = 0$ w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ zadana przez wielomian jednorodny $f \in S$ jest **wolna** jeżeli $\mathrm{D}(f)$, bądź też $\mathrm{D}_0(f)$, jest S-modułem wolnym z gradacją.*

Dość znanym faktem w teorii krzywych wolnych jest utożsamienie $\mathrm{D}_0(f)$ z S-modułem wszystkich nietrywialnym relacji jakobianowych pochodnych cząstkowych wielomianu f, mianowicie

$$\mathrm{AR}(f) := \{(a, b, c) \in S^3 : a \cdot \partial_x f + b \cdot \partial_y f + c \cdot \partial_z f = 0\}.$$

Warto podkreślić, że mamy kilka ważnych niezmienników, które możemy skojarzyć z obiektami zdefiniowanymi powyżej. Jednym z nich jest minimalny stopień wśród wszystkich różniczkowań anihilujących f, mianowicie

$$\mathrm{mdr}(f) = \min\{r \in \mathbb{N} : D_0(f)_r \neq 0\} = \min\{r \in \mathbb{N}\,,: \mathrm{AR}(f)_r \neq 0\}.$$

Niezmiennik $\mathrm{mdr}(f)$ pełni istotną rolę w procedurze, która pozwala nam zadecydować czy dana krzywa zredukowana C jest wolna. Kolejne niezmienniki wymagają dodatkowego przygotowania.

Dla wielomianu jednorodnego $g \in S$ stopnia d oznaczamy jego ideał jakobianowy przez $J_g = \langle \partial_x\, g, \partial_y\, g, \partial_z\, g \rangle$. Niech I_g będzie saturacją ideału jakobianowego J_g względem ideału zaniedbywalnego $\mathfrak{m} = \langle x, y, z \rangle$. Modułem jakobianowym dla wielomianu jednorodnego g nazywamy

$$N(g) = I_g / J_g.$$

Moduł jakobianowy niesie ze sobą ważne informacje dotyczące krzywej, która jest zdefiniowana przez wielomian g. Można pokazać, że krzywa zredukowana $C : g = 0$ jest wolna jeśli $N(g) = 0$. Oznaczmy przez

$$n(g)_j = \dim N(g)_j,$$

tj. wymiar j-tej składowej zgradowanej $N(g)$ oraz dla krzywej zredukowanej $C \, : \, g = 0$ danej wielomianem jednorodnym $g \in S$ definiujemy niezmienniki

$$\sigma(C) = \min\{j \, : \, n(g)_j \neq 0\} \quad \text{oraz} \quad \nu(C) = \max_j\{n(g)_j\}.$$

Niezmiennik $\nu(C)$ nazywamy defektem od wolności krzywej C, bądź też defektem krzywej C.

Definicja 1.8. *Zredukowaną krzywą $C \, : \, g = 0$ w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ zdefiniowaną przez wielomian jednorodny $g \in S$ nazywamy **niemal wolną** jeśli $\nu(C) = 1$.*

Klasa krzywych wolnych, jak i niemal wolnych, pełni niezwykle ważną rolę w kontekście hipotezy Saito-Terao o wolności, którą teraz zreferujemy w sposób formalny. W całej swojej ogólności hipoteza ta dotyczy układów hiperpłaszczyzn w dowolnej przestrzeni rzutowej, natomiast w tym autoreferacie skupimy się na wersji płaskiej (w sensie rzutowym). Dla układu d prostych $\mathcal{A}$ w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ oznaczmy przez $L(\mathcal{A})$ jego kratę przecięcia, tj. zbiór składający się z przecięć prostych z porządkiem zdefiniowanym następująco: $X \leq Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \subset X$. Krata przecięcia $L(\mathcal{A})$ jest najbardziej podstawowym obiektem kombinatorycznym, który możemy stowarzyszyć z układem prostych $\mathcal{A}$, i koduje on całą informację kombinatoryczną tego układu. W latach 80-tych poprzedniego wieku, Terao w [35] zapytał czy krata przecięcia układu prostych determinuje własność wolności.

Hipoteza 1.9 (Terao)**.** *Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą dwoma konfiguracjami d prostych zawartymi w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Przypuśćmy, że kraty przecięcia $L(\mathcal{A})$ oraz $L(\mathcal{B})$ są izomorficzne oraz niech $\mathcal{A}$ będzie wolna. Wówczas $\mathcal{B}$ musi być również wolna.*

Warto zaznaczyć, że powyższa hipoteza jest nadal otwarta, a najmocniejszy wynik w tym kontekście mówi nam o jej prawdziwości dla układów składających się z $d \leq 14$ prostych [1], co jest trochę rozczarowujące. Z drugiej strony, uzyskane wyniku potwierdzają niezaprzeczalny fakt, że hipoteza o wolności jest niezwykle skomplikowana i wymaga dogłębnych analiz. Jednym z podstawowych kroków, jakie musimy poczynić w celu jej rozwiązania, jest zrozumienie geometrii przestrzeni moduli dla określonych klas konfiguracji wolnych, oraz stworzenia efektywnych metod/programów komputerowych, które pozwoliłyby w sprawny sposób zbadać ich podstawowe własności. Ponieważ status hipotezy jest dość niejasny, coraz więcej badaczy uważa, że hipoteza Terao o wolności musi być fałszywa. W kontekście potencjalnego kontrprzykładu, Dimca i Sticlaru w [11] zdefiniowali, powyżej przypomnianą, klasę zredukowanych niemal wolnych płaskich krzywych, i krótko po tym okazało się, że krzywe te mogą odgrywać kluczową rolę w rozważaniach dotyczących tej hipotezy. Zwolennicy istnienia kontrprzykładu uważają, że jeżeli hipoteza ta nie jest prawdziwa, to wówczas powinniśmy znaleźć parę konfiguracji prostych o izomorficznych kratach przecięcia takich, że jedna konfiguracja będzie wolna, natomiast druga niemal wolna.

W międzyczasie podjęto kilka prób uogólnienia hipotezy o wolności dla dowolnych klas krzywych, i jak się okazuje, nastąpiło to z różnymi skutkami. Okazuje się bowiem, że naiwnie uogólniona hipoteza o wolności dla układów prostych i stożkowych jest fundamentalnie fałszywa, a pierwsze kontrprzykłady zostały skonstruowane w [31]. Przypomnimy tutaj jeden z nich ponieważ będzie on stanowił podstawę do naszych dalszych rozważań w części poświęconej osiągnięciu habilitacyjnemu.

Przykład 2. Rozważmy następującą konfigurację prostych i stożkowych zawartą w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{CL}_1 \, : \, xy \cdot (y^2 + xz) \cdot (y^2 + x^2 + 2xz) = 0.$$

Punkt przecięcia $P = (0 : 0 : 1)$ ma krotność 4 i jest quasi-jednorodny (pomimo tego, że nie jest prostym punktem przecięcia). Łatwym rachunkiem można sprawdzić, że $\mathcal{CL}_1$ jest wolna. Jeżeli teraz prostą $y = 0$ zastąpimy $x - 13y = 0$, wówczas uzyskamy nową konfigurację prostych i stożkowych $\mathcal{CL}_2$, dla której punkt przecięcia $P = (0 : 0 : 1)$ ma krotność 4, jednak nie jest już osobliwością quasi-jednorodną. Co więcej, $\mathcal{CL}_2$ jest niemal wolna.

Na podstawie powyższego przykładu oraz dalszych rozważań zaprezentowanych w artykule [31] formułujemy nasz pierwszy problem w kontekście hipotezy o wolności, mianowicie naszym celem jest zrozumienie słabszych wariantów hipotezy Terao o wolności dla konfiguracji prostych i stożkowych. W tym celu potrzebujemy wprowadzić następującą definicję.

Definicja 1.10. *Niech $C = \{C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie zredukowaną krzywą o tej własności, że każda składowa nieprzywiedlna C_i jest gładka. Słabą kombinatoryką krzywej C nazywamy wektor $(d_1, ..., d_s; t_1, ..., t_p)$, gdzie d_i oznacza liczbę składowych nierozkładalnych stopnia i oraz t_j oznacza liczbę osobliwości krzywej C ustalonego typu topologicznego S_j.*

Dla ustalenia uwagi, jeżeli C jest układem d prostych rzutowych na płaszczyźnie zespolonej, to wówczas jej wektor słabej kombinatoryki ma postać $(d = d_1; t_2, ..., t_d)$.

Hipoteza 1.11 (Numeryczna Hipoteza Terao o Wolności)**.** *Niech C_1, C_2 będą dwiema zredukowanymi krzywymi zawartymi w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ o tej własności, że wszystkie składowe nieprzywiedlne są gładkie. Przypuśćmy, że C_1, C_2 mają takie słabe kombinatoryki i niech C_1 będzie wolna. Wówczas C_2 jest wolna.*

Nasze główne wyniki w kontekście powyższej numerycznej hipotezy o wolności odnoszą się do wspomnianych konfiguracji prostych i stożkowych, które dopuszczają proste punkty podwójne i potrójne, oraz styczne punkty podwójne[1], a szczegóły zaprezentujemy w osiągnięciu habilitacyjnym.

2. Osiągnięcie habilitacyjne

2.1. **Hipteza o ograniczonych samoprzecięciach krzywych a rozkłady Zariskiego dla powierzchni algebraicznych.** Celem tej sekcji jest przede wszystkim przedstawienie głównego rezultatu tego autoreferatu, tj. wyniku pokazującego, że hipoteza o ograniczonych samoprzecięciach krzywych algebraicznych jest ściśle powiązana z teorią rozkładów Zariskiego całkowitych dywizorów pseudoefektywnych (tj. dywizorów o współczynnikach całkowitych).

Teoria rozkładów Zariskiego jest fundamentalnym narzędziem w teorii powierzchni algebraicznych. Rozkład ten został odkryty przez Zariskiego [37] dla dywizorów efektywnych o współczynnikach wymiernych, a następnie został rozszerzony do przypadku dywizorów pseudoefektywynych o współczynnikach rzeczywistych przez Fujitę [15]. Geometryczne znaczenie rozkładów Zariskiego może zostać zauważone w następującym przypadku: dla danego dywizora pseudoefektywnego całkowitego D na powierzchni X z rozkładem Zariskiego $D = P + N$ zachodzi następująca równość dla każdego dostatecznie podzielnego $m \geq 1$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(mD)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(mP)) \,.$$

Innymi słowy, wszystkie cięcia $\mathcal{O}_X(mD)$ pochodzą od numerycznie efektywnej wiązki liniowej $\mathcal{O}_X(mP)$. Powyższe sformułowanie *dostatecznie podzielny* oznacza, że musimy przejść

[1] W celu uniknięcia dość karkołomnej kalki językowej, *tacnody* będziemy nazywać stycznymi punktami podwójnymi.

do pewnych krotności mD tak, aby dywizor ten stał się całkowitym. Oczywiście bardzo użytecznym byłoby wiedzieć, już na samym starcie naszych rozważań i niezależnie od dywizora D, jaką krotność dywizora należy wziąć tak, aby mD był całkowitym dywizorem. Rozważania te prowadzą do następującego problemu.

Problem 2.1. *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową. Czy istnieje liczba całkowita $d(X) \geq 1$ o tej własności, że dla każdego dywizora całkowitego pseudoefektywnego D mianowniki w rozkładach Zariskiego D są ograniczone z góry przez $d(X)$?*

Jeżeli takie ograniczenie $d(X)$ istnieje, to wówczas mówimy, że X ma własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego.

Hipoteza 2.2 (Hipoteza o ograniczonych mianownikach w rozkładach Zariskiego)**.** *Każda gładka powierzchnia rzutowa w charakterystyce 0 posiada własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego.*

Warto zaznaczyć, że powyższy problem został sformułowany przez Alexa Küronyę w 2009, i problem ten był otwarty do 2017 roku.

Biorąc $d(X)!$ uzyskujemy globalną liczbę, która pozwala pozbyć się mianowników we wszystkich rozkładach Zariskiego dywizorów całkowitych psuedoefektywnych dla powierzchni X. Interesującym problemem jest stwierdzenie, czy dla danej powierzchni liczba $d(X)$ jest, w zależności tylko od geometrii powierzchni X, ograniczona. Okazuje się, dość zaskakująco, że własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego dla powierzchni X jest równoważna z tym, że powierzchnia X posiada własność ograniczonej ujemności.

Twierdzenie 2.3 ([Hab1])**.** *Dla gładkiej powierzchni rzutowej X nad ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki następujące warunki są równoważne:*

- *X posiada własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego,*
- *X posiada własność ograniczonych samoprzecięć krzywych.*

W następnej część autoreferatu przedstawimy ścisłe zależności pomiędzy $d(X)$ i $b(X)$ dla ustalonej powierzchni X.

Mianowniki w rozkładach Zariskiego

Niech X będzie gładką powierzchnią oraz D całkowitym dywizorem pseudoefektywnym na X. Wówczas wynik Fujity [15] rozszerzający wynik Zariskiego [37] mówi nam, że D może być jednoznacznie przedstawiony jako suma

$$D = P + N$$

$\mathbb{Q}$-dywizorów takich, że

(i) P jest nef,
(ii) N jest efektywny oraz ma ujemnie określoną macierz przecięcia, o ile $N \neq 0$,
(iii) $P \cdot C = 0$ dla każdej składowej nieprzywiedlnej N.

Dla pytania dotyczacego ograniczonych mianowników rozkładu Zariskiego dywizora D wystarczy rozważyć przypadek mianowników dla części ujemnej $N = \sum_{i=1}^{k} a_i N_i$, tj. mianowników a_i. Zaczniemy od opisu algebraicznego współczynników a_i, które są zadane przez dokładnie jedno rozwiązanie układu równań liniowych

$$D \cdot N_j = (P + \sum_{i=1}^{k} a_i N_i) \cdot N_j = \sum_{i=1}^{k} a_i N_i \cdot N_j \qquad \text{dla wszystkich } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Układ ten może zostać przedstawiony w postaci macierzowej jako

$$S[a_1, \ldots, a_k]^t = [D \cdot N_1, \ldots, D \cdot N_k]^t \,,$$

gdzie S oznacza macierz przecięcia krzywych $N_1, \ldots, N_k$, tj. $S = [N_i \cdot N_j]_{i,j} \in M_{k\times k}(\mathbb{Z})$. Ponieważ macierz S jest ujemnie określona, zatem posiada niezerowy wyznacznik, i wykorzystując wzory Cramera uzyskujemy

$$a_i = \frac{\det[s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_k]}{\det(S)} \,, \tag{1}$$

gdzie s_i oznacza i-tą kolumnę macierz S oraz $b = [D \cdot N_1, \ldots, D \cdot N_k]^t$. Na mocy powyższych rozważań, dla dywizorów z cześcią ujemną N z nośnikiem $N_1, \ldots, N_k$, mianowniki w rozkładzie Zariskiego są ograniczone przez $|\det(S)|$.

Uwaga 2. Zauważmy, że powyższe rozumowanie pozwala nam na znalezienie ograniczenia górnego na mianowniki współczynników części ujemnej w rozkładach Zariskiego dla powierzchni dla których stożek dywizorów pseudoefektywnych jest wielościanem wymiernym – w tej sytuacji posiadamy tylko skończenie wiele zbiorów $\{N_1, ..., N_k\}$, które mogą być nośnikami części ujemnych w rozkładach Zariskiego, zatem uzyskujemy następujące ograniczenie:

$$d(X) = \max\{|\det(S_i)| \mid S_i \text{ jest ujemnie określoną podmacierzą główną macierzy } S\},$$

gdzie przez S oznaczamy macierz przecięcia *wszystkich* nieprzywiedlnych i zredukowanych krzywych o ujemnym samoprzecięciu.

Powyższe ograniczenie dość sugestywnie pokazuje, że jeżeli na danej powierzchni X liczba krzywych ujemnych jest nieskończona, to wówczas może się okazać, że analogicznie rozważane supremum po wszystkich ujemnie określonych podmacierzach głównych nie jest skończone. Przypadek ten jest głównym tematem następnej sekcji.

Ograniczone mianowniki a hipoteza o ograniczonych samoprzecięciach

W tej sekcji przedstawimy główne składniki wchodzace w skład Twierdzenia 2.3. Poniższe rezultaty prezentują związki pomiędzy liczbami $d(X)$ i $b(X)$ w ścisłym sensie.

Pierwszy rezultat prezentuje ograniczenie na $d(X)$ wykorzystując informację o skończoności liczby $b(X)$ oraz Twierdzenie Hodge'a o indeksie.

Twierdzenie 2.4. *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową o tej własności, że samoprzecięcia wszystkich zredukowanych i nieprzywiedlnych krzywych są ograniczone przez $-b(X)$. Wówczas X posiada własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego. Ściślej ujmując, jeżeli $\rho(X)$ oznacza liczbę Picarda powierzchni X, to wówczas*

$$d(X) \le b(X)^{\rho(X)-1}.$$

Przejdźmy zatem do implikacji odwrotnej.

Twierdzenie 2.5. *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową. Jeżeli X posiada własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego ze stałą $d(X)$, to wówczas X posiada własność ograniczonych samoprzecięć krzywych. Ściślej ujmując, jeżeli $\triangle$ oznacza wyróżnik kraty Nérona-Severiego $N^1(X)$ (tj. wyznacznik formy przecięcia), to wówczas*

$$b(X) \le d(X) \cdot d(X)! \cdot |\triangle|.$$

Poniżej przedstawimy ciekawe przykłady powierzchni, dla których hipoteza o ograniczonych mianownikach w rozkładach Zariskiego jest prawdziwa. Zanim jednak to nastąpi, podamy kanoniczny przykład powierzchni X w dodatniej charakterystyce, dla której nie zachodzi ani hipoteza o ograniczonej ujemności, ani hipoteza o ograniczonych mianownikach w rozkładach Zariskiego.

Przykład 3 (Powierzchnie z nieograniczonym mianownikami rozkładów Zariskiego w dodatniej charakterystyce). Niech C będzie krzywą genusu $g \geq 2$ zdefiniowaną nad ciałem skończonej charakterystyki $p > 0$. Powierzchnia $X = C \times C$ nie posiada własności ograniczonej ujemności, tj. dla wykresu Γ_n n-tej iteracji morfizmu Frobeniusa mamy $\Gamma_n^2 = p^n(2-2g) \to -\infty$. Na mocy Twierdzenia 2.3 powierzchnia X musi posiadać nieograniczone mianowniki w rozkładach Zariskiego.

Oznaczmy przez F_2 włókno rzutowania na drugą współrzędną $X \to C$ i rozważmy dywizor $D_n = F_2 + \Gamma_n$. Część ujemna w rozkładzie Zariskiego dywizora D_n ma w nośniku tylko krzywą Γ_n, oraz współczynnik

$$\frac{D_n \cdot \Gamma_n}{\Gamma_n^2} = \frac{1 + \Gamma_n^2}{\Gamma_n^2}$$

Ponieważ licznik i mianownik są względnie pierwsze dla każdego n, zatem mianownik w rozkładzie Zariskiego jest równy $-\Gamma_n^2 = p^n(2g-2) \to \infty$, jeśli tylko $n \to \infty$.

W ostatnim przykładzie przedstawimy przykłady powierzchni dla których możemy znaleźć explicite wartości $b(X)$ oraz $d(X)$.

Przykład 4 (Powierzchnie z numerycznie efektywną antykanoniczną wiązką). Niech X będzie powierzchnią taką, że $-K_X$ jest numerycznie efektywny. Na mocy reguły dołączania uzyskujemy $b(X) = 2$. Zauważmy, że dla każdej zredukowanej i nieprzywiedlnej krzywej C mamy $2p_a(C) - 2 = K_X \cdot C + C^2 \leq C^2$, stąd $C^2 \geq -2$.

Powyższe rozważanie pozwala nam stwierdzić, że dla każdego dywizora całkowitego pseudoefektywnego D na powierzchni X rozkład Zariskiego $2^{\rho-1}! \cdot D$ ma całkowite współczynniki.

Inne wyniki powiązane z tematyką ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego

[1] B. Harbourne, P. Pokora, H. Tutaj-Gasińska, On integral Zariski decompositions of pseudoeffective divisors on algebraic surfaces. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* **22**: 103-108 (2015).

Pierwszym problemem, który chcieliśmy rozwiązać, dotyczył relacji pomiędzy $d(X)$ oraz $b(X)$ dla ustalonej powierzchni algerbaicznej X.

Problem 2.6. *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową o tej własności, że $d(X) = 1$. Czy prawdą jest, że wówczas $b(X) = 1$?*

Okazuje się, że odpowiedź na powyższy problem jest negatywna, tj. istnieje gładka zespolona powierzchnia rzutowa X taka, że $d(X) = 1$, ale $b(X) = 2$.

Twierdzenie 2.7. *Istnieje gładka zespolona rzutowa $K3$ powierzchnia X o liczbie Picarda 2 i formie przecięcia*

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

taka, że każdy dywizor całkowity pseudoefektywny na X posiada całkowity rozkład Zariskiego.

Inny wynik pracy, dość zaskakujący, podaje związek pomiędzy słabą hipotezą SHGH a całkowitymi rozkładami Zariskiego całkowitych dywizorów pseudoefektywnych na rozdmuchaniach zespolonej płaszczyzny rzutowej. Przypomnijmy, że słaba hipoteza SHGH orzeka, że na rozdmuchaniu zespolonej płaszczyzny rzutowej wzdłuż $s \geq 10$ punktów w pozycji bardzo ogólnej jedynymi krzywymi ujemnymi są (-1)-krzywe.

Twierdzenie 2.8. *Niech $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ będzie rozdmuchaniem (można założyć, że nad ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki) wzdłuż skończonego zbioru punktów $p_1, ..., p_s$ (dopuszczamy, że punkty te mogą być infinitezymalnie bliskie). Przypuśćmy, że każdy dywizor całkowity pseudoefektywny D posiada całkowity rozkład Zariskiego. Wówczas wszystkie krzywe ujemne na X posiadają samoprzecięcie -1, tj. są to (-1)-krzywe.*

[2] M. Kapustka, G. Mongardi, G. Pacienza, P. Pokora, On the Boucksom-Zariski decomposition for irreducible symplectic varieties and bounded negativity. Dostępna pod adresem internetowym https://arxiv.org/pdf/1911.03367.pdf.

Naturalnym pytaniem, jakie możemy zadać, jest możliwość zbadania problemu ograniczoności mianowników w rozkładach Zariskiego dla rozmaitości algebraicznych wymiaru większego od 2. Naszym wyborem w pracy jest klasa nierozkładanych rozmaitości symplektycznych, a wynika to z faktu istnienia rozkładu Boucksoma-Zariskiego, który posiada wszystkie pożądane własności z perspektywy badania problemu ograniczoności. Główne wyniki uzyskane w tym kontekście są następujące.

Twierdzenie 2.9. *Niech X będzie gładką rzutową nierozkładalną rozmaitością symplektyczną o liczbie Picarda $\rho(X)$. Wówczas mianowniki we współczynnikach dodatniej i ujemnej części dla rozkładów Boucksoma-Zariskiego dla wszystkich pseudoefektywnych dywizorów Cartiera są ograniczone przez $(4 \cdot (\#(A_X))^{\rho(X)-1})!$, przy czym*

$$A_X := H^2(X, \mathbb{Z})^\vee / H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Wniosek 2.10. *Niech X będzie gładką rzutową nierozkładalną rozmaitością symplektyczną wymiaru $2n$ i niech $L \in \mathrm{Pic}(X)$ będzie dużą wiązką liniową. Wówczas dla m takiego, że*

$$m \geq \frac{1}{2}(2n+2)(2n+3)(4 \cdot (\#(A_X))^{\rho(X)-1})!$$

odwzorowanie skojarzone z systemem liniowym $|mL|$ jest biwymierne na obraz.

2.2. **Indeksy Harbourne'a i konfiguracje krzywych na powierzchniach algebraicznych.**

Na samym początku skupimy się na d-konfiguracjach krzywych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej.

Definicja 2.11. *Niech $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_\tau\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $\tau \geq 3$ krzywych. Mówimy, że $\mathcal{C}$ jest d-konfiguracją, jeżeli*

- *wszystkie składowe nieprzywiedlne C_i są gładkie i mają ten sam stopień $d \geq 1$,*

- *każda para krzywych przecina się tylko transwersalnie, tj. lokalnie te przecięcia wyglądają jak $x_1 \cdot x_2 = 0$,*
- *nie istnieje punkt, w którym przecinają się wszystkie krzywe jednocześnie.*

Nasze d-konfiguracje mogą być traktowane jako uogólnienia konfiguracji prostych - w oczywisty sposób 1-konfiguracje to dokładnie konfiguracje prostych na płaszczyźnie. Dla przykładu, 2-konfiguracje będziemy nazywać konfiguracjami stożkowych, nawet jeśli w ogólności konfiguracje stożkowych mogą posiadać osobliwości, które nie są zwyczajne. Mamy jednak nadzieję, że nasza definicja jest akceptowalna i nie będzie prowadzić do nieporozumień. Analogicznie do przypadku konfiguracji prostych (bądź też w ogólności dla konfiguracji krzywych posiadających osobliwości *zwyczajne*), dla d-konfiguracji $\mathcal{C}$ oznaczamy przez t_r liczbę punktów krotności r, tj. punktów przecięcia dokładnie r krzywych z konfiguracji. Ponadto dla $i \in \{0, 1\}$ definiujemy

$$f_i = \sum_{r \geq 2} r^i t_r.$$

Definicja 2.12 (Globalny indeks Harbourne'a stopnia d)**.** *Globalnym indeksem Harbourne'a stopnia d dla $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ nazywamy*

$$h_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) := \inf_{\mathcal{C}} h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; \mathcal{C}),$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich d-konfiguracjach $\mathcal{C}$ ustalonego stopnia $d \geq 1$ w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Rozpoczynamy od wyniku poświęconego przypadkowi prostych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Wynik ten został zaprezentowany przez kandydata w 2014 roku podczas warsztatów *Negative curves on Algebraic Surfaces* [12, s. 567] i został wykorzystany do podania oszacowania dolnego dla tzw. globalnej liniowej stałej Harbourne'a [4].

Twierdzenie 2.13 ([4])**.** *Przy oznaczeniach jak powyżej,*

$$h_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \geq -4.$$

Aby podać powyższe szacowanie potrzebujemy bardzo mocnego rezultatu, o którym wspominaliśmy już we wprowadzeniu, mianowicie nierówności Hirzebrucha [19].

Twierdzenie 2.14. *Niech $\mathcal{L}$ będzie konfiguracją $\tau \geq 4$ prostych o tej własności, że $t_\tau = t_{\tau-1} = 0$. Wówczas*

$$t_2 + \frac{3}{4} t_3 \geq \tau + \sum_{r \geq 5} (r-4) t_r.$$

Bazując na powyższym rezultacie, dość łatwo udowodnić ograniczenie dolne dla $h_1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, a po dalsze szczegóły odsyłamy do [4, Theorem 3.13]. W ten dość zaskakujący sposób uzyskaliśmy globalne efektywne oszacowanie dolne, które nie zależy od żadnych informacji, które możemy stowarzyszyć z konfiguracją prostych. Dość naturalnym pytaniem, które zadajemy teraz, jest dokładność powyższego szacowania, tj. czy istnieje konfiguracja prostych dla której indeks Harbourne'a jest bliski -4.

Przykład 5. Ta konstrukcja jest datowana na koniec XIX wieku, pochodzi z pracy Wimana [38], i jest ściśle związana z teorią nieprzywiedlnych zespolonych grup odbić. Istnieje konfiguracja $\mathcal{W}$ (która jest jedyna z dokładnością do rzutowej równoważności) składająca się z

45 prostych zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ oraz posiada 120 potrójnych, 45 poczwórnych, i 36 popiątnych punktów przecięcia. Obliczając indeks Harbourne'a dla tej konfiguracji uzyskujemy

$$h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}};\mathcal{W}) = \frac{45 - 3\cdot 120 - 4\cdot 45 - 5\cdot 36}{201} = -\frac{225}{67} \approx -3.36,$$

i jak się okazuje jest to rekordowa konfiguracja, tj. posiadania najmniejszą znaną wartość indeksu Harbourne'a w klasie zespolonych układów prostych na płaszczyźnie rzutowej.

Przechodzimy teraz do przypadku indeksów Harbourne'a dla układów stożkowych, tj. 2-konfiguracji. Rezultat ten pochodzi ze wspólnej pracy kandydata z H. Tutaj-Gasińską [29].

Twierdzenie 2.15. *Dla konfiguracji stożkowych zachodzi następujące szacowanie*

$$h_2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \geq -\frac{9}{2}.$$

Jeżeli nasza konfiguracja stożkowych dopuszcza punkty przecięcia $t_\tau = 4$ lub $t_\tau = 3$, to wówczas oszacowanie $-\frac{9}{2}$ również jest prawdziwe dla takich konfiguracji. W przypadku konfiguracji stożkowych z $t_\tau = 2$ mamy również dolne oszacowanie indeksów Harbourne'a, ale jest ono bardziej skomplikowane. W celu znalezienia takiego oszacowania wykorzystujemy naturalne utożsamienie pomiędzy konfiguracjami stożkowych z dwoma punktami bazowymi oraz konfiguracjami $(1,1)$-krzywych na kwadryce $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. W przypadku konfiguracji stożkowych z $t_\tau = 1$ nie możemy powiedzieć zbyt wiele, co jest trochę rozczarowujące. Głównym powodem takiej sytuacji jest przeszkoda techniczna, która uniemożliwia przeprowadzenie konstrukcji nakrycia analogicznej do tej wskazanej przez Hirzebrucha.

Od tego momentu skupiamy się na ogólnym przypadku d-konfiguracji z $d \geq 3$. Pierwszym krokiem do podania ograniczenia dolnego jest następująca nierówność typu Hirzebrucha, która została udowodniona przez kandydata.

Twierdzenie 2.16 ([Hab2]). *Niech $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie d-konfiguracją z $d \geq 3$ oraz $\tau \geq 4$. Wówczas*

$$\left(\frac{7}{2}d^2 - \frac{9}{2}d\right)\tau + t_2 + t_3 \geq \sum_{r\geq 5}(r-4)t_r.$$

Omówimy tutaj, w sposób dość skondensowany, przebieg dowodu powyższej nierówności. Główny pomysł konstrukcyjny pochodzi z pracy Hirzebrucha, w której to wykorzystał nakrycie abelowe zespolonej płaszczyzny rzutowej rozgałęzione wzdłuż konfiguracji prostych. Takie nakrycia są zadane przez rozszerzenia Kummera. W dowodzie powyższej nierówności zastosowaliśmy również nakrycie abelowe rozgałęzione wzdłuż d-konfiguracji $\mathcal{C}$ dla $d \geq 3$ oraz $\tau \geq 4$ o wykładniku nakrycia $n \geq 2$. Konstrukcja ta prowadzi do powierzchni algebraicznej X_n z osobliwościami, które pochodzą od punktów przecięcia konfiguracji. Można pokazać, korzystając z rozważań lokalnych, że powierzchnia X_n jest osobliwa dokładnie nad punktem p wtedy i tylko wtedy, gdy p jest punktem osobliwym krotności ≥ 3 naszej ustalonej d-konfiguracji. W szczególności, jeżeli wszystkie punkty osobliwe d-konfiguracji to proste punkty podwójne, to wówczas powierzchnia X_n jest gładka. Po rozwiązaniu osobliwości uzyskujemy gładką powierzchnię $Y_n^{\mathcal{C}}$. W kolejny kroku wyznaczamy liczby Cherna, i okazuje się, że są one zdeterminowane przez słabe kombinatoryki d-konfiguracji. Co więcej, można pokazać, że $Y_n^{\mathcal{C}}$ jest powierzchnią o nieujemnym wymiarze Kodairy jeśli tylko $d \geq 3$, $n \geq 2$ oraz $\tau \geq 4$, wobec czego możemy zastosować nierówność Bogomołowa-Miyaoki-Yau [24]:

$$c_1^2(Y_n^{\mathcal{C}}) \leq 3c_2(Y_n^{\mathcal{C}}).$$

Definiujemy wielomian Hirzebrucha
$$P_{\mathcal{C}}(n) = \frac{3c_2(Y_n^{\mathcal{C}}) - c_1^2(Y_n^{\mathcal{C}})}{n^{d-3}}.$$
Na mocy powyższej nierówności Bogmołowa-Miyaoki-Yau uzyskujemy $P_{\mathcal{C}}(n) \geq 0$. Podstawiając teraz $n = 3$ do wielomianu Hirzebrucha uzyskujemy żądaną nierówność, co kończy nasze rozważania. Nawet jeśli nakreślona konstrukcja wygląda na dość mocno techniczną (i w rzeczywistości tak jest), uzyskana nierówność jest bardzo poręczna i pozwala nam na jej bezpośrednie zastosowanie w kontekście hipotezy o ograniczonej ujemności. Powyższa nierówność pozwala udowodnić następujące oszacowanie na globalne indeksy Harbourne'a stopnia d.

Twierdzenie 2.17 ([Hab2])**.** *Niech $d \geq 3$ będzie ustalone. Wówczas*
$$h_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \geq -4 - \frac{5}{2}d^2 + \frac{9}{2}d.$$

W ostatniej części tej sekcji skupimy się na innej ciekawej klasie konfiguracji krzywych. Zakładamy od teraz, że X jest gładką zespoloną powierzchnią rzutową posiadającą trywialną klasę kanoniczną, dla przykładu $X = K3$. Rozważamy konfiguracje krzywych wymiernych na X, tj. $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_\tau\} \subset X$ jest konfiguracją gładkich nieprzywiedlnych krzywych wymiernych takich, że wszystkie osobliwości tej konfiguracji są zwyczajne. Pierwszym rezultatem jest nierówność typu Hirzebrucha dla konfiguracji krzywych wymiernych.

Twierdzenie 2.18 ([Hab3])**.** *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową z trywialną klasą kanoniczną. Załóżmy, że $\mathcal{C} \subset X$ jest konfiguracją gładkich nieprzywiedlnych krzywych wymiernych posiadającą τ składowych oraz tylko zwyczajne osobliwości. Wówczas*
$$4\tau - t_2 + \sum_{r\geq 3}(r-4)t_r \leq 3c_2(X) \leq 72.$$

Nasz dowód powyższej nierówności typu Hirzebrucha opiera się na wykorzystaniu logarytmicznej wersji nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau [25] oraz analizie kombinatoryki konfiguracji krzywych. Rezultat ten jest kluczowym krokiem do oszacowania dolnego następującego globalnego indeksu Harbourne'a.

Definicja 2.19. *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową posiadającą trywialną klasę kanoniczną. Liczbę rzeczywistą*
$$H_{\text{rational}}(X) = \inf_{\mathcal{C}} h(X; \mathcal{C}),$$
gdzie infimum przebiega przez wszystkie konfiguracje wymiernych gładkich nieprzywiedlnych krzywych $\mathcal{C} \subset X$ posiadających tylko zwyczajne osobliwości, nazywamy globalnym wymiernym indeksem Harbourne'a powierzchni X.

Twierdzenie 2.20 ([Hab3])**.** *Przy powyższych oznaczeniach oraz założeniach jak w Twierdzeniu 2.18, mamy*
$$H_{\text{rational}}(X) \geq -45.$$

Można zapytać, jak bardzo ujemne mogą być indeksy Harbourne'a dla naszych konfiguracji krzywych wymiernych. To pytanie jest główną motywacją dla drugiej części pracy [Hab3], gdzie przedstawiamy, na przykład, dwie ciekawe konfiguracje krzywych na gładkich kwartykach w $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ składających się z dokładnie 16 prostych i dokładnie 8 prostych punktów poczwórnych, dla których indeksy Harbourne'a są równe -8. To też pokazuje, że zachowanie indeksów Harbourne'a dla powierzchni algebraicznych, które posiadają krzywe ujemne, jest diametralnie różne w porównaniu z zachowaniem indeksów Harbourne'a dla konfiguracji krzywych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej.

Inne wyniki powiązane z tematyką indeksów Harbourne'a i konfiguracji krzywych

W tej części podamy tylko kilka wybranych rezultatów, które są bezpośrednio powiązane z $[\mathrm{Hab2}]$ i $[\mathrm{Hab3}]$.

[1] X. Roulleau, Bounded Negativity, Miyaoka—Sakai Inequality, and Elliptic Curve Configurations. *Int. Math. Res. Not.* **2017(8)**: 2480–2496 (2017).

Autor pracy zajmował się konfiguracjami krzywych eliptycznych na zespolonych powierzchniach abelowych. Pierwszy rezultat artykułu przedstawia nierówność typu Hirzebrucha, tj. jeżeli $\mathcal{C}$ jest konfiguracją krzywych eliptycznych na zespolonej powierzchni abelowej A, to wówczas

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geq \sum_{r\geq 5}(r-4)t_r.$$

Wykorzystując powyższą nierówność, autor dowodzi następującego szacowania dolnego dla indeksów Harbourne'a konfiguracji krzywych eliptycznych:

$$h(A, \mathcal{C}) \geq -4.$$

Ponadto, autor przedstawia konstrukcję pewnej rodziny C_n składającej się z gładkich krzywych stopnia 3 zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, która dopuszcza nie tylko osobliwości zwyczajne, dla której mamy

$$h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; C_n) \to -4,$$

przy czym $n \to \infty$. Na mocy tej obserwacji uzyskujemy $h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \leq -4$. Wspomniana powyżej konstrukcja rodziny gładkich krzywych stopnia 3 ma bardzo ciekawe geometryczne pochodzenie, mianowicie wywodzi się z konstrukcji autorstwa Roulleau i Urzúy prowadzącej do jednospójnych zespolonych powierzchni ogólnego typu o tej własności, że ich nachylenia Cherna są gęste w przedziale $[2, 3]$. Warto również podkreślić, że konstrukcja tych powierzchni ukazała się w Annals of Mathematics w 2015 roku.

[2] R. Laface, P. Pokora, Local negativity of surfaces with non-negative Kodaira dimension and transversal configurations of curves. *Glasg. Math. J.* **62(1)**: 123–135 (2020).

We wspólnej pracy kandydata i Laface zbadane zostały indeksy Harbourne'a dla konfiguracji prostych na gładkich hiperpowierzchniach stopnia $n \geq 4$ w $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Zakładamy, że konfiguracje prostych są spójne, tj. nie istnieje prosta, która nie przecina innej prostej z konfiguracji.

Twierdzenie 2.21. *Niech S_n będzie gładką hiperpowierzchnią $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ stopnia $n \geq 4$ i niech $\mathcal{L}$ będzie spójną konfiguracją $d \geq 2$ prostych zawartą w S_n. Wówczas*

$$h(\mathcal{L}; S_n) \geq -n(n-1).$$

Co więcej, powyższe ograniczenie dolne jest ścisłe i jest osiągane dla konfiguracji składającej się z n prostych przecinających się w dokładnie jednym punkcie.

Drugi główny wynik artykułu jest poświęcony tzw. transwersalnym konfiguracjom gładkich krzywych, tj. takim konfiguracjom krzywych dla których wszystkie punkty osobliwe są zwyczajne.

Twierdzenie 2.22. *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową o nieujemnym wymiarze Kodairy, i niech $C = C_1 + ... + C_n \subset X$ będzie transwersalną konfiguracją gładkich krzywych składającą się z $n \geq 2$ składowych nieprzywiedlnych. Wówczas*

$$K_X.C + 4\sum_{i=1}^{n}(1 - g(C_i)) - t_2 + \sum_{r\geq 3}(r-4)t_r \leq 3c_2(X) - K_X^2.$$

Korzystając z powyższego rezultatu możemy pokazać, że jeżeli $H_{\text{elliptic}}(X)$ oznacza globalny eliptyczny indeks Harbourne'a gładkiej zespolonej powierzchni rzutowej X o nieujemnym wymiarze Kodairy (tj. infimum jest brane po wszystkich konfiguracjach składających się z (gładkich) krzywych eliptycznych zawartych w X, które posiadają tylko osobliwości zwyczajne), wtedy

$$H_{\text{elliptic}}(X) \geq -4 - (3e(X) - K_X^2),$$

przy czym K_X oznacza dywizor kanoniczny oraz $e(X)$ topologiczną charakterystykę Eulera.

[3] R. Laface, P. Pokora, Towards the weighted bounded negativity conjecture for blowups of algebraic surfaces. *Manuscr. Math.* **163(3-4)**: 361–373 (2020).

W poprzednich sekcjach autoreferatu rozważaliśmy konfiguracje krzywych, które posiadają zwyczajne osobliwości. W tej części skupimy się na przypadku zredukowanych krzywych, które posiadają dowolne osobliwości. Wydaje się, że dla zredukowanych krzywych z dowolnymi osobliwościami nieco łatwiej radzimy sobie przy założeniu, że krzywe na powierzchniach są nieprzywiedlne, i dokładnie tym przypadkiem będziemy chcieli się zająć. Naszą główną motywacją jest następująca naturalna hipoteza, która w literaturze jest nazywana *słabą hipotezą o ograniczonej ujemności*.

Hipoteza 2.23 (WBNC)**.** *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową, wtedy istnieje liczba całkowita $b_w(X)$ taka, że dla wszystkich zredukowanych i nieprzywiedlnych krzywych $C \subset X$ mamy*

$$C^2 \geq -b_w(X)\cdot(H.C)^2,$$

gdzie H jest dowolną wiązką liniową dużą i numerycznie efektywną o tej własności, że $H.C > 0$.

Powyższa hipoteza ma dość ciekawe implikacje. Jeżeli WBNC jest prawdziwa, to wówczas globalna stała Seshadriego powierzchni X w punkcie $x \in X$ jest dodatnia (stała ta jest równa infimum branym po jednopunktowych stałych Seshadriego w punkcie $x \in X$ względem wszystkich szerokich wiązek liniowych $L \in \mathrm{Pic}(X)$). Główny rezultat artykułu jest uogólnieniem nierówności, która nosi miano uogólnionej nierówności Orevkova-Zaidenberga.

Twierdzenie 2.24. *Niech X będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową o nieujemnym wymiarze Kodairy. Przypuśćmy, że $C \subset X$ jest zredukowaną i nieprzywiedlną krzywą posiadającą punkty osobliwe $p_1, ..., p_s$. Oznaczmy przez μ_i i m_i liczbę Milnora oraz krotność punktu osobliwego p_i. Wówczas*

$$\sum_{i=1}^{s} \left(2 + \frac{1}{m_i}\right)\mu_i \leq 3e(X) - K_X^2 + 2C^2 + K_X.C.$$

Rezultat ten pozwala nam na udowodnienie następującej wariacji na temat WBNC.

Twierdzenie 2.25. *W sytuacji z powyższego twierdzenia, rozważmy $\pi : Y \to X$ rozdmuchanie X wzdłuż n parami różnych punktów. Wówczas istnieje duża i numerycznie efektywna wiązka liniowa Γ na Y taka, że dla każdej krzywej zredukowanej i nieprzywiedlnej $C \subset Y$ mamy*

$$C^2 \geq -\frac{1}{2}\left(3e(X) - K_X^2\right) - n - \Gamma.C.$$

W szczególności, nasze ograniczenie dolne jest funkcją liniową względem Γ-stopnia.

W przypadku zespolonej płaszczyzny rzutowej możemy wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.26. *Niech $\pi : X_n \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie rozdmuchaniem zespolonej płaszczyzny rzutowej wzdłuż n parami różnych punktów. Wówczas dla każdej zredukowanej i nieprzywiedlnej krzywej $C \subset X_n$ (zawsze możemy założyć, że C nie jest dywizorem wyjątkowym) mamy*

$$C^2 \geq -n(C.H),$$

gdzie $H = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1))$.

[4] A. Dimca, B. Harbourne, G. Sticlaru, On the Bounded Negativity Conjecture and singular plane curves. *Mosc. Math. J.* **22(3)**: 427–450 (2022).

W artykule, który jest dość techniczny, autorzy przedstawiają ograniczenia na numeryczną charakteryzację krzywych w kontekście hipotezy o ograniczonej ujemności - krzywe te są zdefiniowane nad dowolnym ciałem $\mathbb{F}$. Najciekawszym rezultatem, z bardzo subiektywnej perspektywy kandydata, jest ten dotyczący krzywych wymiernych zawartych w płaszczyźnie rzutowej nad ciałem $\mathbb{F}$. Okazuje się, że indeks Harbourne'a dla wymiernej krzywej C posiadającej co najwyżej 9 punktów osobliwych spełnia warunek $h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}}, C) \geq -2$, i ograniczenie to jest prawdziwe bez żadnego założenia o charakterystyce ciała $\mathbb{F}$.

2.3. **Klastry punktów oraz konstruowalność (bardzo) osobliwych krzywych.** W tej części autoreferatu skupimy się na wspólnej pracy kandydata z Joaquimem Roé [Hab4]. Praca ma charakter dość techniczny, odnosimy się bowiem do teorii klastrów punktów, które wymagają wprowadzania sporej ilości materiału wstępnego, zatem skupimy się na najważniejszych zagadnieniach i krótko skomentujemy zastosowane metody konstrukcyjno-dowodowe bez odnoszenia się do technikaliów. Naszym celem przewodnim było zbadanie hipotezy o ograniczonej ujemności z perspektywy punktów nieskończenie bliskich i tutaj pojawia się potrzeba wykorzystania teorii klastrów i klastrów z wagami. Naszym punktem startowym była specjalna wersja Problemu 1.4, którą teraz przytoczymy w dogodnej formie do dalszej dyskusji.

Problem 2.27. *Niech S będzie gładką zespoloną powierzchnią rzutową oraz niech $b(S) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ o tej własności, że dla każdej nieprzywiedlnej i zredukowanej krzywej $C \subset S$ mamy $C^2 \geq -b(S)$. Niech $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita $b(S, n)$ taka, że dla każdego morfizmu $S_\pi \xrightarrow{\pi} S$, który jest złożeniem dowolnych n punktowych rozdmuchań, i dla każdej nieprzywiedlnej (zredukowanej) krzywej $C \subset S_\pi$ mamy $C^2 \geq -b(S, n)$?*

Jeżeli odpowiedź na powyższe pytanie byłaby twierdząca dla danej powierzchni S i dowolnego $n \geq 1$, to wówczas wszystkie gładkie powierzchnie rzutowe biwymierne z S spełniałyby hipotezę o ograniczonej ujemności. Zasadniczy problem polega na tym, że nie mamy ani jednego przypadku powierzchni dla której odpowiedź byłaby znana dla każdego n. Przypomnijmy, że w najprostszym przypadku $S = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ wartość $b(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)$ jest nieznana dla $n \geq 10$.

Ponieważ samoprzecięcie transformaty właściwej $\tilde{C}$ na rozdmuchaniu π_p powierzchni S w punkcie $p \in C$ wynosi $\tilde{C}^2 = C^2 - \mathrm{m}_p^2(C)$, zatem oczekujemy, że stała $b(S, n)$, o ile istnieje, powinna być funkcją rosnącą względem n. W przypadku zespolonej płaszczyzny rzutowej, wobec istnienia krzywych wymiernych Severiego stopnia d posiadających dokładnie $n := (d-1)(d-2)/2$ prostych punktów podwójnych, jeżeli $b(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)$ istnieje dla każdego n, to wówczas

$$\liminf_{n \to \infty} (b(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)/n) \geq 2.$$

Wynika to z faktu, że samoprzecięcie transformaty właściwej krzywej na rozdmuchaniu wzdłuż n punktów wynosi $d^2 - 4n \approx -2n + 3\sqrt{2n}$. W szczególności, $b(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)$ musi rosnąć przynajmniej liniowo względem n.

Nie jest znany żaden przykład ciągu nieprzywiedlnych krzywych dla którego ujemność (w sensie wartości samoprzecięcia) rosłaby szybciej niż $2n$, wobec czego naturalnym krokiem jest rozważanie konfiguracji krzywych na powierzchniach algebraicznych. Definiujemy

$$h(S, n) = \inf_{\substack{S_\pi \to S \\ n\text{-punktowe rozdmuchanie}}} \left\{ \inf_{\substack{C \subset S_\pi \\ \text{zredukowana}}} \frac{C^2}{n} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

zatem $b(S, n)$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy wartość $h(S, n)$ jest skończona. Przykład rodziny konfiguracji gładkich krzywych stopnia 3 zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ pokazuje nam, że

$$\liminf_{n \to \infty} h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n) \leq -4,$$

oraz nie istnieje żaden przykład rodziny krzywych dla którego ujemność rosłaby szybciej niż liniowo, zatem [4, Problem 3.10] skupia się na pytaniu czy rzeczywiście $\lim_{n \to \infty} h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n) = -4$.

Pierwszym wspólnym wynikiem kandydata i Roé jest twierdzenie ukazujące, że jeżeli $\inf_n h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)$ byłoby wartością skończoną (co jak wiem pozostaje kwestią otwartą), to wówczas to infimum nie jest wyliczane przez C^2/n dla jakiejś krzywej zredukowanej C na rozdmuchaniu $S_\pi \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ powierzchni $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ wzdłuż n punktów.

Twierdzenie 2.28 ([Hab4])**.** *Niech $h = \inf_n h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, n)$. Wówczas dla każdego morfizmu $S_\pi \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, który jest n-punktowym rozdmuchaniem oraz dla każdej zredukowanej krzywej $C \subset S_\pi$ mamy $C^2 > h \cdot n$.*

Przechodzimy teraz do dyskusji na temat indeksów Harbourne'a dla zredukowanych krzywych na powierzchniach algebraicznych. Jak zaobserwowaliśmy we wprowadzeniu, indeksy te mogą być traktowane jako ważone samoprzecięcia krzywych krzywych ujemnych podzielone przez liczbę punktów osobliwych, które te krzywe posiadają. Ogólniejsza definicja, wprowadzająca pojęcie stałej Harbourne'a z uwzględnieniem klastrów punktów, przedstawia się następująco.

Definicja 2.29. *Niech $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie zredukowaną krzywą stopnia d oraz niech $K \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie ustalonym skończonym zbiorem punktów. Stałą Harbourne'a krzywej C wzdłuż K definiujemy jako*

$$H(C, K) = \frac{d^2 - \sum_{p \in K} \mathrm{m}_p(C)^2}{|K|},$$

przy czym $|K|$ oznacza liczność K. W przypadku punktów nieskończenie bliskich mamy co następuje. Jeżeli $p_i \in S_i$, przy czym $S_1 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ oraz $\pi_i : S_{i+1} \to S_i$ jest rozdmuchaniem w punkcie p_i, i wtedy $\mathrm{m}_{p_i}(C)$ zastępujemy przez krotność transformaty właściwej krzywej C w punkcie p_i.

W sytuacji niniejszej definicji, indeks Harbourne'a krzywej C posiadającej tylko osobliwości zwyczajne jest zdefiniowany jako

$$h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; C) := H(C, \mathrm{Sing}(C)).$$

Do tego momentu (w autoreferacie) najbardziej ujemną krzywą, w sensie wartości indeksu Harbourne'a, w klasie krzywych zredukowanych zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ posiadających tylko osobliwości zwyczajne jest konfiguracja prostych Wimana, oznaczana przez $\mathcal{W}$, dla której $h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; \mathcal{W}) = -225/67 \simeq -3.358$. W pracy $[\mathrm{Hab4}]$ skonstruowaliśmy rodzinę krzywych o rekordowo niskich wartościach indeksu Harbourne'a, i to przy dodatkowym założeniu, że wszystkie osobliwości krzywych są zwyczajne.

Twierdzenie 2.30 ([Hab4])**.** *Istnieje (rodzina) zredukowanych krzywych $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ z osobliwościami zwyczajnymi o tej własności, że wartość $h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; C)$ jest dowolnie bliska $-25/7 \simeq -3.571$.*

Nasza konstrukcja wykorzystuje klasyczne nakrycie Kummera

$$\pi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \ni [x : y : z] \to [x^k : y^k : z^k] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$

które jest rozgałęzione wzdłuż $xyz = 0$, przy czym dla $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Nakrycie π stosujemy do konfiguracji 45 prostych Wimana $\mathcal{W}$ w ten sposób, że dla kolejnych odpowiednio dużych wartości k konstruujemy ciąg krzywych C_k biorąc przeciwobrazy. Przechodząc do granicy względem k uzyskujemy

$$\mathrm{lim}_{k \to \infty} h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; C_k) = \frac{-225}{67} \cdot \frac{201}{198} = -\frac{25}{7} \approx -3.571.$$

Inne wyniki powiązane z tematyką indeksów Harbourne'a, klastrów punktów, i konstruowalności (bardzo) osobliwych krzywych z wykorzystaniem morfizmów rozgałęzionych

[1] P. Pokora and J. Roé, The 21 reducible polars of Klein's quartic. *Exp. Math.* **30(1)**: 1 – 18 (2021).

W niniejszym artykule skupiliśmy się na konstrukcji tzw. konfiguracji Kleina krzywych płaskich. Nasze krzywe są skonstruowane z wykorzystaniem morfizmu gradientowego wyznaczonego przez pochodne cząstkowe standardowego równania kwartyki Kleina, tj.

$$\Phi_4 \, : \, xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0.$$

Kwartyka Kleina jest bardzo specjalna z perspektywy twierdzenia Hurwitza, otóż rząd grupy autmorfizmów tej krzywej posiada maksymalną możliwą wartość (dla krzywych stopnia 4) równą 168. Grupa automorfizmów działa na płaszczyźnie rzutowej, a w szczególności pozwala nam skonstruować konfigurację składającą się z 21 prostych oraz 28 potrójnych i 21 poczwórnych punktów przecięcia - jest to słynna konfiguracja Kleina prostych. Korzystając teraz z morfizmu gradientowego zastosowanego do odpowiednio dobranego równania definiującego dla konfiguracji prostych Kleina uzyskujemy krzywą stopnia 63, która rozpada się na dwie orbity długości 21, pierwsza składa się z 21 prostych Kleina, a druga składa się z 21 gładkich stożkowych. Każda para prosta-stożkowa dostarcza nam dokładnie dwa punkty przecięcia, zatem nasza krzywa stopnia 63 posiada dokładnie $2 \cdot 21 = 42$ proste punkty podwójne, $9 \cdot 28 = 252$ proste punkty potrójne, oraz $9 \cdot 21 = 189$ proste punkty poczwórne. Okazuje się, że z powodzeniem możemy kontynuować wskazaną procedurę. Biorąc przeciwobraz krzywej stopnia 63 względem morfizmu gradientowego otrzymujemy krzywą, która składa się z 21 prostych, 21 gładkich stożkowych, oraz 21 krzywych stopnia 6, jednakże osobliwości tej krzywej składającej się z trzech orbit długości 21 przestają być zwyczajne (w odróżnieniu do przypadku prostych i stożkowych).

[2] I. Dolgachev, A. Laface, U. Persson, G. Urzúa, Chilean configuration of conics, lines and points. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)* **23(2)**: 877–914 (2022).

W tym interesującym artykule autorzy konstruują niezwykle nietrywialną konfigurację składającą się z 12 gładkich stożkowych zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ przecinających się parami transwersalnie w 9 punktach krotności 8 oraz w 12 prostych punktach podwójnych. Konfiguracja ta może być traktowana jako naturalne uogólnienie konfiguracji 12 prostych Hessego, który dostarcza nam 9 punktów krotności 4 oraz 12 punktów podwójnych. Konfiguracja 12 stożkowych jest nazywana w literaturze jako chilijska konfiguracja 12 stożkowych, i została ona skonstruowana z wykorzystaniem pęku Halphena o indeksie 2, który zawiera dokładnie 4 zredukowane i rozkładalne elementy, a każdy z tych elementów składa się z dokładnie 3 gładkich stożkowych.

[3] C. Galindo, F. Monserrat, C.-J. Moreno-Ávila, E. Pérez-Callejo, On the Degree of Curves with Prescribed Multiplicities and Bounded Negativity. *Int. Math. Res. Not.*, https://doi.org/10.1093/imrn/rnac085.

W niniejszej pracy autorzy przedstawiają dolne ograniczenia na stopień krzywych zawartych w $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, które przechodzą przez centra waluacji dywizorialnych ν dla $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ przy ustalonych krotnościach. W tym celu stosują liczne techniki wykorzystujące teorię klastrów punktów z wagami. Podają oni również ciekawe techniczne wyniki dotyczące hipotezy o ograniczonej ujemności dla tych powierzchni wymiernych, które posiadają zespoloną płaszczyznę rzutową jako ich relatywny model minimalny.

2.4. **Konfiguracje prostych i stożkowych zawarte w zespolonej płaszczyźnie rzutowej w kontekście wolności, hipotezy o ograniczonej ujemności, oraz ich ekstremalnych własności kombinatorycznych.** Głównym celem niniejszej części jest zaprezentowanie technik i narzędzi, które były rozwijane przez kandydata (również we współpracy ze współautorami) w celu lepszego zrozumienia kombinatoryki i geometrii konfiguracji krzywych wymiernych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Bez cienia wątpliwości, teoria konfiguracji prostych jest bardzo klasycznym obszarem badań, zawierającym wiele ciekawych i głębokich wyników, które dotykają również innych dziedzin. Jeżeli teraz dokonamy porównania, nawet dość naiwnego, pomiędzy teorią konfiguracji prostych a rezultatami dotyczącymi konfiguracji krzywych wymiernych na płaszczyźnie, to możemy zaobserwować bardzo duży dysonans. Nietrudno przewidzieć, że w celu osiągnięcia podobnego poziomu zaawansowania prowadzonych badań potrzeba jeszcze sporo czasu na nadrobienie zaległości. Ta dość ogólna obserwacja stanowi podstawową motywację do podjęcia tematyki konfiguracji prostych i gładkich stożkowych na płaszczyźnie. W szczególności, naszym celem było podjęcie systematycznych badań odnoszących się do maksymalnie szerokiego spektrum zagadnień związanych z tą tematyką. Na samym początku rozpoczęliśmy badania nad konfiguracjami prostych i stożkowych posiadających osobliwości zwyczajne. To założenie wydaje się być mocno restrykcyjnym, jednak największą korzyścią płynącą z tego założenia jest możliwość zastosowania podstawowych tożsamości kombinatorycznych w bardzo szerokim spektrum zastosowań geometrycznych. W dalszej części autoreferatu omówimy wyniki dotyczące konfiguracji, które dopuszczają również niezwyczajne punkty osobliwe (tj. styczne punkty podwójne).

Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją składającą się z d prostych i k gładkich stożkowych o tej własności, że wszystkie punkty osobliwe są zwyczajne. Korzystając z twierdzenia Bézouta uzyskujemy następujące zliczanie kombinatoryczne:

$$4\binom{k}{2} + \binom{d}{2} + 2kd = \sum_{r\geq 2}\binom{r}{2}t_r,$$

gdzie t_r oznacza liczbę r-krotnych punktów przecięcia. W dalszej części będziemy również korzystać ze znanego już oznaczenia, mianowicie dla każdego $i \in \{0,1\}$ mamy

$$f_i := \sum_{r\geq 2} r^i t_r.$$

Pierwszym wynikiem, który chcielibyśmy zaprezentować, to nierówność typu de Bruijna-Erdősa, które podaje oszacowanie dolne na liczbę punktów przecięcia dla pewnej klasy konfiguracji prostych i stożkowych.

Twierdzenie 2.31 ([Hab7])**.** *Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją składającą się z $d \geq 2$ prostych i $k \geq 2$ stożkowych, która posiada tylko zwyczajne osobliwości. Przypuśćmy, że $t_{k+d} = t_{k+d-1} = t_{k+d-2} = t_{k+d-3} = 0$, wówczas*

$$f_0 = \sum_{r\geq 2} t_r \geq k + d.$$

Dowód powyższego twierdzenia to połączenie klasycznych rozważań geometrycznych i podstawowych własności formy przecięcia, które są zakodowane za pomocą Twierdzenia Hodge'a o indeksie.

Kolejny rezultat to nierówność typu Hirzebrucha dla konfiguracji prostych i stożkowych, który został udowodniony, i jest najważniejszym rezultatem w tej części autoreferatu, w pracy [Hab7].

Twierdzenie 2.32. *Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $d \geq 6$ prostych oraz $k \geq 2$ stożkowych o tej własności, że wszystkie punkty przecięcia są zwyczajnymi osobliwościami. Przypuśćmy ponadto, że $t_{d+k} = 0$ oraz możemy wskazać podkonfigurację składającą się z 6 prostych, które przecinają się tylko w punktach podwójnych i potrójnych. Wówczas*

$$8k + t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geq d + \sum_{r\geq 5}(2r-9)t_r.$$

Dowód powyższej nierówności opiera się na zastosowaniu teorii nakryć abelowych, a dokładniej konstrukcji nakrycia autorstwa Namby. Warto podkreślić, że konstrukcja Namby jest bardziej skomplikowana, i mniej elastyczna, niż klasyczna konstrukcja z której korzystał Hirzebruch w [19].

Przechodzimy teraz do zastosowań powyższej nierówności, a pierwszy rezultat odnosi się do hipotezy o ograniczonej ujemności.

Twierdzenie 2.33 ([Hab7])**.** *W sytuacji z Twierdzenia 2.32, mamy*

$$h(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}; \mathcal{CL}) \geq -4.5.$$

W kolejnym kroku badania skupiły się na geografii log-powierzchni oraz ich nachyleń Cherna. Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją d prostych i k stożkowych, która posiada zwyczajne osobliwości. Przypuśćmy, że $t_{k+d} = 0$. Rozważmy rozdmuchanie $f : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ wzdłuż punktów osobliwych konfiguracji $\mathcal{CL}$ krotności ≥ 3. Oznaczmy teraz przez $\overline{\mathcal{CL}}$ zredukowaną transformatę całkowitą konfiguracji $\mathcal{CL}$. Rozważmy parę $(X, \overline{\mathcal{CL}})$, która jest log-powierzchnią algebraiczną. Dla tej pary możemy szybko wyznaczyć liczby Cherna, mianowicie

$$\overline{c}_1^2(X, \overline{\mathcal{CL}}) = 9 - 5d - 8k + \sum_{r\geq 2}(3r-4)t_r;$$

$$\overline{c}_2(X, \overline{\mathcal{CL}}) = 3 - 2d - 2k + \sum_{r\geq 2}(r-1)t_r.$$

Przypomnijmy, że na podstawie twierdzenia Miyaoki-Sakai, jeżeli logarytmiczny wymiar Kodairy dla pary $(X, \overline{\mathcal{CL}})$ jest równy 2, to wówczas

$$\overline{c}_1^2(X, \overline{\mathcal{CL}}) \leq 3\overline{c}_2(X, \overline{\mathcal{CL}}).$$

Przypomnijmy, że jeżeli rozpatrujemy tylko konfiguracje prostych, tj. $k = 0$, to na mocy [32, Theorem 5.1] mamy

$$\overline{c}_1^2(X, \overline{\mathcal{L}}) \leq \frac{8}{3}\overline{c}_2(X, \overline{\mathcal{L}}),$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}$ jest konfiguracją prostych rzutowo równoważną dualnej konfiguracji Hessego. Jeżeli teraz nasze konfiguracje rozpatrujemy nad dowolnym ciałem $\mathbb{F}$, Eterović, Figueroa i Urzúa w [14] udowodnili, że

$$\frac{2d-6}{d-2} \leq \frac{\overline{c}_1^2(X, \overline{\mathcal{L}})}{\overline{c}_2(X, \overline{\mathcal{L}})} \leq 3,$$

przy czym równość po lewej stronie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}$ jest konfiguracją posiadającą tylko punkty podwójne przecięcia, a równość po prawej stronie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{r\geq 2} t_r = d$.

Jeżeli teraz skupimy się na przypadku konfiguracji stożkowych, tj. $d = 0$, to wtedy, na mocy rezultatu uzyskanego przez kandydata w [26], zachodzi

$$\overline{c}_1^2(X,\overline{\mathcal{C}}) < \frac{8}{3}\overline{c}_2(X,\overline{\mathcal{C}}),$$

ale nie wiemy, czy istnieje jakaś konfiguracja stożkowych ze zwyczajnymi osobliwościami dla której $\frac{\overline{c}_1^2(X,\overline{\mathcal{C}})}{\overline{c}_2(X,\overline{\mathcal{C}})} \approx \frac{8}{3}$.

Powyższe rozważania stanowią motywację dla naszego kolejnego problemu badawczego, czyli wskazanie tych konfiguracji prostych i stożkowych dla których wartości nachyleń Cherna są wysokie. Przypomnijmy, że iloraz

$$E(X,\overline{\mathcal{CL}}) := \frac{\overline{c}_1^2(X,\overline{\mathcal{CL}})}{\overline{c}_2(X,\overline{\mathcal{CL}})}$$

nazywamy nachyleniem Cherna pary $(X,\overline{\mathcal{CL}})$. Zanim przejdziemy do najważniejszego wyniku w tym kontekście, przypomnijmy następujące pytanie Urzúy [36, Question VII.12] zawarte w jego pracy doktorskiej.

Problem 2.34. *Niech $\mathcal{CL} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $k \geq 2$ stożkowych i $d \geq 2$ prostych o tej własności, że wszystkie osobliwości są zwyczajne. Czy prawdą jest, że $E(X,\overline{\mathcal{CL}}) \leq \frac{8}{3}$?*

Na ten moment, niestety, nie potrafimy odpowiedzieć na to pytanie, co jest trochę rozczarowujące. Z drugiej jednak strony, udało nam się wskazać konfigurację prostych i stożkowych dla której wartość $E(X,\overline{\mathcal{CL}})$ jest rekordowo wysoka, i jest to najwyższa znana wartość nachylenia Cherna w tej klasie konfiguracji krzywych.

Przykład 6. Przypomnijmy, że wspólnie z Roé opisaliśmy konfigurację 21 prostych i 21 stożkowych Kleina, która posiada 42 podwójne, 252 potrójne i 189 poczwórne proste punkty przecięcia. Przeprowadzając proste obliczenia uzyskujemy

$$E(X,\overline{\mathcal{CL}}) = \frac{\overline{c}_1^2(X,\overline{\mathcal{CL}})}{\overline{c}_2(X,\overline{\mathcal{CL}})} = \frac{9 - 8\cdot 21 - 5\cdot 21 + 2\cdot 42 + 5\cdot 252 + 8\cdot 189}{3 - 2\cdot 21 - 2\cdot 21 + 42 + 2\cdot 252 + 3\cdot 189} \approx 2.512,$$

i jest to najwyższa znana wartość nachylenia Cherna w klasie prostych i stożkowych z osobliwościami zwyczajnymi.

Przechodzimy teraz do drugiej klasy konfiguracji prostych i stożkowych, którą zbadaliśmy w kontekście problemu wolności. Ta część autoreferatu opiera się na wspólnym projekcie naukowym prowadzonym we współpracy z Alexandru Dimcą.

Rozpoczynamy od zdefiniowania podstawowych obiektów naszych badań. Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją d prostych oraz k stożkowych. Załóżmy, że $\mathcal{CL}$ posiada n_2 prostych punktów podwójnych, t stycznych punktów podwójnych, oraz n_3 prostych punktów potrójnych. Korzystając z twierdzenia Bézouta uzyskujemy następującą równość kombinatoryczną:

$$4\binom{k}{2} + \binom{d}{2} + 2kd = n_2 + 2t + 3n_3.$$

Pierwszym rezultatem jest nierówność typu Hirzebrucha, która została udowodniona w $[\mathrm{Hab6}]$.

Twierdzenie 2.35. *Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją d prostych i k gładkich stożkowych o tej własności, że $2k + d \geq 12$. Przypuśćmy, że $\mathcal{CL}$ posiada tylko n_2*

prostych punktów podwójnych, t stycznych punktów podwójnych, oraz n_3 prostych punktów potrójnych. Wówczas

$$20k + n_2 + \frac{3}{4}n_3 \geq d + 4t.$$

Dowód powyższej nierówności opiera się na zastosowaniu wariantu orbifoldowej nierówności Bogomolova-Miyaoki-Yau pochodzącej z [22].

Kolejno, korzystając z pojęcia spektrum osobliwości oraz technik rozwijanych przez Varchenkę i Steenbrinka, udowodniliśmy następujący rezultat $[\mathrm{Hab6}]$.

Twierdzenie 2.36. *Niech $\mathcal{CL} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $d \geq 0$ prostych oraz $k \geq 0$ gładkich stożkowych. Załóżmy, że $\mathcal{CL}$ posiada tylko n_2 prostych punktów podwójnych, t stycznych punktów podwójnych, oraz n_3 prostych punktów potrójnych. Niech $C = \ell_1 + ... + \ell_d + C_1 + ... + C_k$ oraz zapiszmy stopień konfiguracji $m := \deg C = d + 2k$ jako $m = 3m' + \varepsilon$, przy czym $\varepsilon \in \{1, 2, 3\}$. Wówczas*

$$t + n_3 \leq \binom{m-1}{2} + k - \frac{m'(5m'-3)}{2}$$

oraz

$$n_3 \leq (m'+1)(2m'+1).$$

Główny wynik tej części autoreferatu, pochodzący z $[\mathrm{Hab6}]$, dostarcza nam pełną klasyfikację wolnych konfiguracji prostych i stożkowych z ustalonymi jak wyżej osobliwościami.

Twierdzenie 2.37. *Niech $\mathcal{CL}$ będzie konfiguracją $d \geq 1$ prostych i $k \geq 1$ gładkich stożkowych taką, że posiada proste podwójne, styczne podwójne, i proste potrójne punkty przecięcia jak osobliwości. Wówczas $\mathcal{CL}$ jest konfiguracją wolną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{CL}$ jest jedną z poniższych konfiguracji (standardowo n_2, t, n_3 oznaczają, odpowiednio, liczbę prostych podwójnych, stycznych podwójnych, i prostych potrójnych punktów przecięcia):*

(1) $d = k = 1$ oraz $\mathcal{CL}$ składa się z gładkiej stożkowej i prostej stycznej. W tym przypadku mamy $n_2 = n_3 = 0$, $t = 1$.

(2) $d = 2$, $k = 1$ oraz $\mathcal{CL}$ składa się z gładkiej stożkowej i dwóch prostych stycznych do stożkowej. W tym przypadku mamy $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $t = 2$.

(3) $d = 3$, $k = 1$ i wówczas albo $\mathcal{CL}$ składa się z gładkiej stożkowej wpisanej w trójkąt trzech prostych[2] $\triangle$, albo $\mathcal{CL}$ składa się z gładkiej stożkowej opisanej na trójkącie trzech prostych $\triangle$. W pierwszym przypadku mamy $n_2 = 3$, $n_3 = 0$, $t = 3$, natomiast w drugim przypadku $n_2 = t = 0$, $n_3 = 3$.

(4) $d = 3$, $k = 2$ i $\mathcal{CL}$ składa się z trójkąta trzech prostych Δ, gładkiej stożkowej wpisanej w Δ, i drugiej stożkowej opisanej na Δ. W tym przypadku mamy $n_2 = 0$, $n_3 = 3$, $t = 5$.

W szczególności, każda z powyższych konfiguracji wolnych jest wyznaczona, z dokładnością do rzutowej równoważności, przez słabą kombinatorykę $(d, k; n_2, t, n_3)$.

Wobec powyższego, uzyskujemy następujący wniosek będących najważniejszym osiągnięciem kandydata w kontekście wolnych krzywych zredukowanych.

Wniosek 2.38. *Numeryczna hipoteza Terao zachodzi dla konfiguracji prostych i gładkich stożkowych z prostymi podwójnymi, stycznymi podwójnymi, i prostymi potrójnymi punktami przecięcia.*

[2]Jest to konfiguracja trzech prostych, które przecinają się w dokładnie trzech punktach podwójnych.

Inne wyniki powiązane z tematyką wolnych i niemal wolnych zredukowanych krzywych płaskich

Przedstawiamy tylko kilka wyników badań powiązanych z tematyką wolności i niemal wolności krzywych płaskich.

[1] A. Dimca, M. Janasz, P. Pokora, On plane conic arrangements with nodes and tacnodes. *Innov. Incidence Geom.* **19(2)**: 47 – 58 (2022).

W niniejszej pracy badamy konfiguracje gładkich stożkowych, które posiadają tylko proste i styczne punkty podwójne. Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie, że jeżeli $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_k\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ jest konfiguracją $k \geq 6$ gładkich stożkowych, która posiada tylko proste punkty podwójne oraz dokładnie t stycznych punktów podwójnych, to wówczas

$$t \leq \frac{k^2}{3} + 3k.$$

W szczególności, wynik ten poprawia ograniczenie dolne na liczbę stycznych punktów podwójnych dla konfiguracji gładkich stożkowych udowodnione przez Miyaokę w [25] w przypadku, gdy $k \geq 16$.

Drugim najważniejszym wynikiem niniejszej pracy jest pełna charakteryzacja konfiguracji niemal wolnych składających się z gładkich stożkowych posiadających tylko proste i styczne punkty podwójne.

Twierdzenie 2.39. *Niech $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją składającą się $k \geq 2$ gładkich stożkowych posiadających tylko proste i styczne punkty podwójne jako osobliwości. Wówczas $\mathcal{C}$ jest niemal wolna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$k \leq 4 \textit{ oraz } t = k(k-1).$$

[2] P. Pokora, $\mathcal{Q}$-conic arrangements in the complex projective plane. Dostępna pod adresem internetowym https://arxiv.org/abs/2203.11503.

Głównym celem artykułu jest zbadanie własności wolności dla układów gładkich stożkowych, które dopuszczają proste punkty podwójne, styczne punkty podwójne, proste potrójne i poczwórne punkty przecięcia. Główny rezultat, który jest dość zaskakujący, można sformułować następująco.

Twierdzenie 2.40. *Niech $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $k \geq 3$ gładkich stożkowych, która dopuszcza tylko proste punkty podwójne, styczne punkty podwójne, proste potrójne i poczwórne punkty przecięcia. Wówczas $\mathcal{C}$ nigdy nie jest wolna.*

[3] A. Gałecka, On the nearly freeness of conic-line arrangements with nodes, tacnodes, and ordinary triple points. *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.* **28(3)**: Paper No. 67, 12 p. (2022).

Autorka udowodniła, że jeżeli istnieje niemal wolna konfiguracja prostych i stożkowych z prostymi punktami podwójnym, stycznymi punktami podwójnymi, oraz prostymi potrójnymi punktami przecięcia, to wówczas jej stopień jest mniejszy bądź równy od 12. W kolejnym kroku, autorka pokazała, że istnieją przykłady takich konfiguracji prostych i stożkowych gdy stopień konfiguracji jest równy $3, 4, 5, 6, 7$. Co więcej, stosując nierówność typu Hirzerbucha dla takich konfiguracji, autorka dowodzi, że nie można skonstruować takich konfiguracji w stopniach $10, 11, 12$. Wobec tego, aby zakończyć procedurę klasyfikacyjną, pozostaje sprawdzić konstruowalność takich konfiguracji w stopniach 8 i 9, co okazuje się jednak być bardzo trudnym (i nadal otwartym) problemem.

[4] A. Dimca, P. Pokora, Maximizing curves viewed as free curves. Dostępna pod adresem internetowym https://arxiv.org/abs/2208.13399.

Głównym celem niniejszej pracy jest scharakteryzowanie zredukowanych wolnych krzywych płaskich dopuszczających osobliwości typu ADE oraz tzw. krzywych maksymalizujących, tj. zredukowanych krzywych płaskich $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ parzystego stopnia $n \geq 4$, które posiadają tylko osobliwości typu ADE, o tej własności, że

$$\tau(C) = 3\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1,$$

przy czym $\tau(C)$ oznacza całkowitą liczbę Tjuriny krzywej C. Nasz główny wynik można sformułować następująco.

Twierdzenie 2.41. *Niech C będzie płaską krzywą stopnia $n = 2m \geq 4$, która posiada osobliwości typu ADE. Wówczas C jest maksymalizująca wtedy i tylko wtedy, gdy C jest krzywą wolną z eksponentami $(m-1, m)$.*

2.5. **Nierówności typu Hirzebrucha oraz ich zastosowanie w kontekście ekstremalnych problemów kombinatoryki konfiguracji punktów i prostych.** Niniejsza część jest poświęcona rezultatom przedstawionym w $[\mathrm{Hab5}]$. Praca ta łączy w sobie cechy artykułu przeglądowego ukierunkowanego na tematykę nierówności typu Hirzebrucha w odniesieniu do zastosowań kombinatorycznych, jak również posiada cechy artykułu stricte naukowego ze względu na to, że zawiera nowe rezultaty. Głównym celem, który przyświecał powstaniu $[\mathrm{Hab5}]$, jest wprowadzenie, o charakterze algebraiczno-topologicznym, do tematyki nierówności typu Hirzebrucha dla zredukowanych krzywych zawartych w zespolonej płaszczyźnie rzutowej oraz przedstawienie głównych technik/metod dowodowych wraz z licznymi zastosowaniami, szczególnie w kontekście problemów ekstremalnych pokroju słabej hipotezy Diraca. Drugim celem było zestawienie w jednym miejscu istotnych rezultatów, uzyskanych przez kandydata, w kontekście udowodnionych przez niego nierówności typu Hirzebrucha w pracach [26, 27], oraz metod kombinatorycznych stosowanych w kontekście istnienia zespolonych ilorazów kuli [6, 26, 28]. Najważniejsza część artykułu jest poświęcona omówieniu dowodu nierówności Hirzebrucha dla zespolonych konfiguracji prostych, i naszym głównym celem było skupienie się na aspektach kombinatoryczno-algebraicznych tego dowodu, bez wchodzenia w dokładną analizę geometryczną poszczególnych kroków. W kolejnym kroku, przedstawiamy nierówności typu Hirzebrucha dla zespolonych konfiguracji krzywych, które udało się uzyskać z wykorzystaniem orbifoldowej wersji nierówności Bogomołowa-Miyaoki-Yau. Przypomnijmy zatem rezultaty otrzymane przez kandydata w [27], a które zostały omówione również w $[\mathrm{Hab5}]$.

Twierdzenie 2.42. *Niech $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_\tau\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie d-konfiguracją $\tau \geq 3$ krzywych dla których $d \geq 2$. Wówczas*

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 + d^2\tau(d\tau - \tau - 1) \geq \sum_{r\geq 5}\left(\frac{r^2}{4} - r\right)t_r.$$

Twierdzenie 2.43. *Niech $\mathcal{LC} = \{\ell_1, ..., \ell_d, C_1, ..., C_k\}$ będzie konfiguracją d prostych i k gładkich stożkowych o tej własności, że $t_r = 0$ dla $r > \frac{2(d+2k)}{3}$. Przypuśćmy, że wszystkie osobliwości konfiguracji są zwyczajne. Wówczas*

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 + (4k + 2d - 4)k \geq d + \sum_{r\geq 5}\left(\frac{r^2}{4} - r\right)t_r.$$

W drugiej części artykułu (ta część ma już charakter czysto przeglądowy, jednak może być ciekawym referatem dla geometrów) skupiamy się na zastosowaniach rezultatów uzyskanych na gruncie geometrii algebraicznej w kontekście problemów kombinatorycznych związanych z konfiguracjami punktów i prostych na płaszczyźnie. Oznaczmy przez $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ skończony zbiór n parami różnych punktów oraz przez $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ zbiór prostych wyznaczonych przez $\mathcal{P}$. Przypomnijmy, że prosta ℓ jest wyznaczona przez zbiór $\mathcal{P}$ jeżeli ℓ przechodzi przez przynajmniej dwa punkty ze zbioru $\mathcal{P}$.

Punktem początkowym rozważań jest następujący problem (hipotezę) Diraca.

Hipoteza 2.44 (Dirac)**.** *Każdy zbiór n niewspółliniowych punktów $\mathcal{P}$ zawiera punkt, który jest incydentnymi z przynajmniej $n/2$ prostymi ze zbioru $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.*

Jak się okazało dość szybko, hipoteza Diraca jest fałszywa, a najmniejszy kontrprzykład (w sensie ilości punktów w zbiorze $\mathcal{P}$) składa się z dokładnie $n = 7$ punktów. Z drugiej strony, hipoteza Diraca została udowodniona przez Greena i Tao [16] w przypadku, gdy liczba punktów jest bardzo duża. W tym świetle możemy sformułować bardziej adekwatną hipotezę Diraca, która według naszej najlepszej wiedzy jest nadal problemem otwartym (tj. dobór optymalnej stałej c pozostaje problemem otwartym).

Hipoteza 2.45. *Istnieje stała c taka, że dla każdego zbioru punktów $\mathcal{P}$ składającego się z n niewspółliniowych punktów istnieje punkt, który jest incydentny z przynajmniej $n/2 - c$ prostymi ze zbioru $\mathcal{L}(\mathcal{P})$.*

W 1961 roku Erdős zaproponował następującą hipotezę, która znana jest pod nazwą słabej hipotezy Diraca [13].

Hipoteza 2.46 (SHD)**.** *Każdy zbiór $\mathcal{P}$ składający się z n niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie (prawdopodobnie zdefiniowany nad ciałem liczb rzeczywistych) zawiera punkt, który jest incydentny z przynajmniej $\lceil \frac{n}{c} \rceil$ prostymi ze zbioru $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ dla pewnej ustalonej stałej c.*

Słaba hipoteza Diraca została udowodniona, niezależnie, przez Becka [5] oraz Szemerédiego i Trottera w [33], jednakże w żadnych z tych wypadków stała c nie została podana w sposób jawny. Warto zaznaczyć, że hipotetyczna wartość stałej c wynosiła 3, a obserwacja ta została poczyniona w monografii [21, Chapter 6]. Wiele lat później okazało się, że przypuszczenie to jest prawdziwe [17].

Twierdzenie 2.47 (Han)**.** *Słaba hipoteza Diraca zachodzi ze stałą $c = 3$ dla dowolnego zbioru punktów zdefiniowanego nad ciałem liczb zespolonych.*

Dowód tego wyniku, niezwykle zaskakujący, to dosłownie kilka linii przekształceń, a głównym decydującym składnikiem dowodowym jest następująca nierówność autorstwa Bojanowskiego i Langera [7].

Twierdzenie 2.48. *Niech $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ będzie konfiguracją $\tau \geq 6$ prostych taką, że $t_r = 0$ dla $r > \frac{2\tau}{3}$. Wówczas*

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geq \tau + \sum_{r \geq 5} \left(\frac{r^2}{4} - r\right) t_r.$$

Kończąc rozważania kombinatoryczne, przypomnijmy jeszcze jeden bardzo ciekawy problem, który pochodzi z pracy Becka [5].

Twierdzenie 2.49 (Twierdzenie Becka o dwóch ekstremach)**.** *Istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ o tej własności, że dla każdego skończonego zbioru n punktów $\mathcal{P}$ w $\mathbb{R}^2$ przynajmniej jedna z poniższych własności zachodzi*

- *istnieje prosta, która zawiera $c_1 n$ punktów ze zbioru $\mathcal{P}$;*
- *istnieje przynajmniej $c_2 n^2$ prostych wyznaczonych przez zbiór $\mathcal{P}$.*

W swoim dowodzie Beck wykorzystał stałą $c_1 = \frac{1}{100}$, natomiast c_2 nie została wyznaczona efektywnie. Korzystając z następującego wyniku Langera [22, Proposition 13.1.1], de Zeeuw wykazał, że oszacowanie stałych c_1, c_2 można uściślić oraz znacząco polepszyć [9, Theorem 2.1].

Twierdzenie 2.50. *Niech $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ będzie układem n punktów, wówczas spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

(1) Istnieje prosta, która zawiera przynajmniej $\alpha \cdot n$ punktów ze zbioru $\mathcal{P}$, przy czym $\alpha = \frac{6+\sqrt{3}}{9} > 0,85$;
(2) Istnieje co najmniej $\frac{n^2}{9}$ prostych wyznaczonych przez $\mathcal{P}$.

3. Krótkie Podsumowanie

Moja praca badawcza, przedstawiona w ramach osiągnięcia habilitacyjnego, dotyczy teorii krzywych algebraicznych na powierzchniach, i dotyka również innych działów matematyki, co jest bezpośrednio związane z interdyscyplinarnością[3] obiektów, które badam. Jako główne obszary badawcze, w których prowadzę obecnie badania, należy uznać wariacje na temat hipotezy Terao o wolności krzywych, która wykorzystuje metody algebraiczne i kombinatoryczne, oraz hipotezę o ograniczonej ujemności krzywych, jeden z najstarszych otwartych problemów badawczych w teorii powierzchni algebraicznych. Moje osiągnięcie habilitacyjne można uznać za znaczący krok w zrozumieniu teorii krzywych osobliwych w kontekście ich lokalnej ujemności, a w szczególności przez powiązanie problematyki lokalnej ujemności z teorią rozkładów Zariskiego na powierzchniach. Wyniki uzyskane w zakresie numerycznej hipotezy Terao o wolności pozwalają nam na stwierdzenie jakich typów krzywych osobliwych nie da się skonstruować nad ciałem liczb zespolonych. W kontekście badanych hipotez, udowodniłem kilka nierówności typu Hirzebrucha dla różnych klas krzywych na powierzchniach algebraicznych, które w jawny sposób nawiązują do szeroko rozumianej kombinatoryki konfiguracji. Z tego też powodu uzyskane przeze mnie rezultaty cieszą się zainteresowaniem specjalistów pracujących w obrębie kombinatorycznych problemów konfiguracji punktów

[3] Oczywiście w obrębie matematyki.

i krzywych. Warto również podkreślić, że krzywe są niezwykle ważne w obrębie innych obszarów badawczych, np. w kontekście problemów zawierania (które leżą na pograniczu algebry przemiennej i geometrii). Ze względu na tematykę mojej pracy badawczej, oraz jej powiązania, moje osiągnięcie habilitacyjne stanowi ważny wkład w rozwój teorii krzywych osobliwych.

LITERATURA

[1] M. Barakat, L. Kühne, Computing the nonfree locus of the moduli space of arrangements and Terao's freeness conjecture. **arXiv:2112.13065**, to appear in *Mathematics of Computation*. 8

[2] Th. Bauer, Cr. Bocci, S. Cooper, S. di Rocco, M. Dumnicki, B. Harbourne, K. Jabbush, A. L. Knutsen, A. Küronya, R. Miranda, J. Roé, H. Schenck, T. Szemberg, Z. Teiler, Recent developments and open problems in linear series. In *Contributions to Algebraic Geometry*, 93–140, IMPANGA Lecture Notes (Piotr Pragacz, ed.), EMS Series of Congress Reports, edited by the European Mathematical Society Publishing House 2012. 5

[3] Th. Bauer, B. Harbourne, A. L. Knutsen, A. Küronya, S. Müller–Stach, X. Roulleau, T. Szemberg, Negative curves on algebraic surfaces. *Duke Math. J.* **162**: 1877 – 1894 (2013). 3

[4] Th. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, J. Huizenga, A. Lundman, P. Pokora, T. Szemberg, Bounded Negativity and Arrangements of Lines. *International Mathematical Research Notices* **vol. 2015**: 9456 - 9471 (2015). 14, 20

[5] J. Beck. On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős in combinatorial geometry. *Combinatorica*, **3(3-4)**: 281 – 297 (1983). 29, 30

[6] J. Bokowski and P. Pokora. On line and pseudoline configurations and ball-quotients. *Ars Mathematica Contemporanea* **13(2)**: 409 – 416 (2017). 28

[7] R. Bojanowski. *Zastosowania uogólnionej nierówności Bogomolova-Miyaoka-Yau*. Master Thesis (in Polish), http://www.mimuw.edu.pl/%Ealan/postscript/bojanowski.ps, 2003. 30

[8] R. Cheng, R. van Dobben de Bruyn, Unbounded negativity on rational surfaces in positive characteristic. *J. Reine Angew. Math.* **783**: 217-226 (2022). 4

[9] F. de Zeeuw. Spanned lines and Langer's inequality. **arXiv:1802.08015**. 30

[10] A. Dimca, *Hyperplane arrangements. An introduction*. Universitext Cham: Springer. xii, 200 p. (2017). 3

[11] A. Dimca, G. Sticlaru, Free and Nearly Free Curves vs. Rational Cuspidal Plane Curves. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **54(1)**: 163 – 179 (2018). 8

[12] S. Di Rocco, A. Küronya, S. Müller-Stach, T. Szemberg, *Mini-Workshop: Negative Curves on Algebraic Surfaces*. Oberwolfach Reports doi:10.4171/OWR/2014/10: 555 - 594 (2014). 14

[13] P. Erdős. Some unsolved problems. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl* **6**: 221 – 254 (1961). 29

[14] S. Eterović, F. Figueroa, G. Urzúa, On the geography of line arrangements. *Advances in Geometry* **22(2)**: 269 – 276 (2022). 24

[15] T. Fujita, On Zariski problem. *Proc. Japan Acad.* **55, Ser. A**: 106 – 110 (1979). 9, 10

[16] B. Green and T. Tao. On sets defining few ordinary lines. *Discrete Comput. Geom.* **50(2)**: 409 – 468 (2013). 29

[17] Z. Han. A note on the weak Dirac conjecture. *The Electronic Journal of Combinatorics* **24**:#63 (2017), http://www.combinatorics.org/v24i1p63. 29

[18] B. Harbourne, Global aspects of the geometry of surfaces. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica* **vol. IX**: 5 – 41 (2010). 3

[19] F. Hirzebruch, Arrangement of lines and Algebraic surfaces. Arithmetic and geometry, Vol. II, 113 – 140, Progr. Math., 36, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983. 6, 14, 24

[20] F. Hirzebruch, Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers. *The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984) Contemp. Math.* **58**: 141 – 155 (1986).

[21] V. Klee and S. Wagon. *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*. The Mathematical Association of America, 1991. 29

[22] A. Langer, Logarithmic orbifold Euler numbers with applications. *Proc. London Math. Soc.* **(3) 86**: 358 – 396 (2003). 26, 30

[23] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry, I & II Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Vols. 48 & 49, Springer Verlag, Berlin, 2004. 3

[24] Y. Miyaoka, On the Chern numbers of surfaces of general type. *Invent. Math.* **42(1)**: 225 – 237 (1977). 15
[25] Y. Miyaoka, The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.* **268**: 159 – 171 (1984). 16, 27
[26] P. Pokora, Hirzebruch type inequalities and plane curve configurations. *International Journal of Mathematics* **28(2)**: 1750013 (11 pages) (2017). 25, 28
[27] P. Pokora. The orbifold Langer-Miyaoka-Yau inequality and Hirzebruch-type inequalities. *Electronic Research Announcements in Mathematical Sciences* **24**: 21 – 27 (2017). 28
[28] P. Pokora, Hirzebruch-Kummer covers of algebraic surfaces. *Turk. J. Math.* **43(1)**: 412 – 421 (2019). 28
[29] P. Pokora and H. Tutaj-Gasińska, Harbourne constants and conic configurations on the projective plane. *Math. Nachr.* **289(7)**: 888-894 (2016). 15
[30] F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*. Teubner (1921). 5
[31] H. Schenck, S. Tohaneanu, Freeness of conic-line arrangements in $\mathbb{P}^2$. *Comment. Math. Helv.* **84(2)**: 235 – 258 (2009). 8, 9
[32] A. J. Sommese, On the density of ratios of Chern classes of algebraic surfaces. *Math. Annalen* **268**: 207 – 221 (1984). 24
[33] E. Szemerédi and W. T. Trotter. Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica*, **3(3-4)**: 381 – 392 (1983). 29
[34] D. Testa, T. Várilly-Alvarado, M. Velasco, Big rational surfaces. *Math. Ann.* **351(1)**: 95 – 107 (2011). 4
[35] H. Terao, Generalized Exponents of a Free Arrangement of Hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn Formula. *Invent. Math.* **63**: 159 – 179 (1981). 8
[36] G. A. Urzúa, *Arrangements of curves and algebraic surfaces*. Thesis (Ph.D.) University of Michigan, 166 pages, ISBN: 978-0549-82049-9, 2008. 25
[37] O. Zariski, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. Math.* **76**: 560 – 615 (1962). 9, 10
[38] A. Wiman, Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene. *Math. Annalen* **48**: 195 – 240 (1896). 14

Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej.

Moją działalność naukową (poza uczelnią macierzystą) rozpocząłem w trakcie studiów doktoranckich na Uniwersytecie Pedagogicznym im. KEN w Krakowie, wtedy to też odbyłem pierwsze staże naukowe w Polsce i Niemczech. Na początku drugiego roku studiów doktoranckich odbyłem semestralny staż w Warszawskim Centrum Nauk Matematycznych i Komputerowych (WCMCS KNOW), gdzie mogłem wziąć udział w zaawansowanym kursie z geometrii algebraicznej poświęconym pozytywności w geometrii algebraicznej. W tym też okresie rozpocząłem międzynarodową współpracę z Davidem Schmitzem (Marburg). Niedługo potem odbyłem swój pierwszy krótki staż międzynarodowy w Bonn (styczeń 2014), gdzie miałem okazję porozmawiać o matematyce z Robertem Lazarsfeldem, światowej sławy ekspertem w dziedzinie pozytywności w geometrii algebraicznej. W 2014 roku spędziłem cały semestr na Uniwersytecie Alberta Ludwika we Fryburgu Bryzgowijskim, w ramach Programu Wymiany Międzynarodowej *ERASMUS+*, pracując w grupie prowadzonej przez prof. Stefana Kebekusa, a następnie cały semestr zimowy roku akademickiego 2014/2015 spędziłem na Uniwersytecie Filipa w Marburgu (nad Lahnem) pracując w grupie badawczej prof. Thomasa Bauera - mój pobyt był finansowany ze środków indywidualnego stypendium DAAD, które zostało mi przyznane w czerwcu 2014 roku. Tuż po obronie pracy doktorskiej ubiegałem się o stanowisko stanowisko podoktorskie na Uniwersytecie Jana Gutenberga w Moguncji, a mój wniosek został zaakceptowany i zostałem przydzielony do pracy w grupie badawczej prowadzonej przez prof. Manfreda Lehna. W tym okresie rozpocząłem wiele projektów badawczych w ramach współpracy międzynarodowej, pracując głównie z Xavierem Roulleau (profesorem w Aix Marseilles), Jürgenem Bokowskim (emerytowanym profesorem w Darmstadt), Roberto Laface (doktorantem, a następnie postdokiem w Hanowerze), oraz Joaquimem Roé (profesorem na Uniwersytecie Autonomicznym w Barcelonie). Po rocznym stanowisku w Moguncji spędziłem dodatkowy rok za granicą w Hanowerze pracując w grupie badawczej prowadzonej przez prof. Klausa Hulka. W tym czasie kontynuowałem współpracę międzynarodową i uzyskałem tytuł naukowy *Privatdozenta*. W listopadzie 2017 wróciłem do Polski i od tego czasu pracowałem w Instytucie Matematycznym PAN, a od października 2019 na Uniwersytecie Pedagogicznym im. KEN w Krakowie. Od 2020 współpracę naukową prowadziłem głównie zdalnie, z powodu pandemii COVID, m.in. z Alexandru Dimcą (profesorem emerytowanym w Nicei) oraz Timem Römerem (profesorem i dziekanem na Uniwersytecie w Osnabrück). We wszystkich wymienionych powyżej projektach badawczych współpraca zakończyła się bardzo pomyślnie, tj. artykułami opublikowanymi w uznanych czasopismach matematycznych, m.in, w *Crelle*, *Journal of Algebraic Combinatorics*, *Manuscripta Mathematica*, czy też *Results in Mathematics*.

W międzyczasie pracując zarówno w Niemczech, jak i w Polsce, brałem udział w wielu konferencjach oraz byłem zaproszonym prelegentem na kilkunastu konferencjach. Najważniejsze prelekcje, które wygłosiłem, odbyły się w Oberwolfach, Luminy i Edynburgu. Ponadto kilkakrotnie prezentowałem postery naukowe, najważniejsza, jak sądzę, prezentacja miała miejsce podczas AMS Summer Institutes - Algebraic Geometry 2015 w Salt Lake City.

Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

Osiągnięcia dydaktyczne

Moją aktywność na polu dydaktyki rozpocząłem w semestrze zimowym 2013/2014 kiedy to prowadziłem zajęcia z Algebry Liniowej na Uniwersytecie Warszawskim w ramach mojego stażu w Warszawskim Centrum Nauk Matematycznych i Komputerowych. Krótko po obronie doktoratu w lutym 2015 roku, w ramach zatrudnienia na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie, prowadziłem zajęcia z przedmiotów informatycznych, tj. *Wprowadzenie do programowania w C++*, czy też przedmiot o metodach komputerowych w nauczaniu matematyki, oraz prowadziłem wykład *Matematyka dla biologów*. Po uzyskaniu stanowiska Postdoca na Uniwersytecie Jana Gutenberga w Moguncji prowadziłem zaawansowane przedmioty na kierunku matematyka, tj. ćwiczenia do przedmiotu Topologie (w języku niemieckim) oraz ćwiczenia do przedmiotu Computeralgebra (w języku niemieckim i angielskim). Po przejściu na Uniwersytet Leibniza w Hanowerze prowadziłem ćwiczenia do przedmiotu *Lineare Algebra I* (w języku niemieckim) oraz *Ebene Kurven - eine konkrete Einführung* (w języki niemieckim i angielskim). Po powrocie do Polski w listopadzie 2017 roku zostałem zatrudniony w Instytucie Matematyki Polskiej Akademii Nauki, i do września 2019 roku nie prowadziłem zajęć o charakterze dydaktycznym. Po zatrudnieniu na stanowisku adiunkta na Uniwersytecie Pedagogicznym w październiku 2019 powróciłem do obowiązków dydaktycznych, i od tego momentu regularnie prowadzę ćwiczenia do przedmiotu *Algebra Liniowa I i II*, oraz prowadzę regularnie zajęcia w ramach Szkoły Doktorskiej (w języku angielskim) z przedmiotów *Projekty Grantowe I i II*, oraz *Warsztat Specjalistyczny* dla doktorantów z dyscypliny matematyka. W ramach przedmiotu Warsztat Specjalistyczny wykładam zagadnienia związane z pogranicza geometrii algebraicznej, topologii algebraicznej, oraz analizy zespolonej. W ramach Kursów do Wyboru, prowadziłem dwukrotnie wykład *Krzywe i powierzchnie z ciekawymi własnościami* oraz *Wiązki Wektorowe* dla doktorantów. W okresie od października 2019 do września 2022 pełniłem funkcję promotora dla 8 prac licencjackich oraz 2 prac magisterskich. Obecnie pełnię funkcję opiekuna nad 4 magistrantami (obrony przewidziane na czerwiec 2023) i pełnię funkcję opiekuna 2 doktorantów z dyscypliny matematyka.

Wśród łącznie 10 prac dyplomowych, jakie prowadziłem, 2 zostały ocenione na ocenę bardzo dobrą z wyróżnieniem, 6 na ocenę bardzo dobrą, oraz 2 na ocenę plus dobry. Co więcej, dwie dyplomantki, na podstawie swoich prac dyplomowych, opublikowały swoje pierwsze artykuły naukowe:

- Maria Tombarkiewicz (Praca Licencjacka, Ocena: **bardzo dobry z wyróżnieniem**): praca jest poświęcona problematyce zawierania potęg symbolicznych ideałów jednorodnych stowarzyszonych z konfiguracjami punktów osobliwych wyznaczonych przez proste na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. Na podstawie tej pracy powstała publikacja *On Yoshinaga's arrangement of lines and the containment problem*, która została opublikowana w **Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie**.
- Aleksandra Gałecka (Praca Magisterska, obrona planowana na czerwiec 2023): praca jest poświęcona tematyce układów prostych i stożkowych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej, które są niemal wolne. Rozważając takie układy, które dopuszczają proste i styczne punkty podwójne, oraz proste punkty potrójne, dyplomantka podała ich prawie pełną klasyfikację. Uzyskane wyniki zostały zebrane w pracy *On the nearly freeness of conic-line arrangements with nodes, tacnodes, and ordinary triple points*, która została opublikowana w **Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana**.

Opieka nad doktorantami

W latach 2019-2020 pełniłem funkcję promotora pomocniczego w przewodzie doktorskim mgr. Jakuba Kabata (UP Kraków), promotorem głównym był prof. dr hab. Tomasz Szemberg. Pan Jakub Kabat obronił doktorat w listopadzie 2020, tytuł pracy doktorskiej brzmiał *Line arrangements in algebraic terms*, a sama praca doktorska została udostępniona publicznie w postaci elektronicznej na stronie internetowej Repozytorium Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie. Praca doktorska mgr. Kabata była poświęcona teorii konfiguracji prostych Böröczky'ego w kontekście ich wolności oraz problemu zawierania dla potęg symbolicznych ideałów jednorodnych stowarzyszonych z punktami przecięcia konfiguracji prostych, jak i metodzie rozszerzania Zieglera prostych do konfiguracji superrozwiązywalnych.

Oprócz pełnienia funkcji promotora pomocniczego pełniłem funkcję członka komisji oraz recenzenta w przypadku dwóch procedur o nadanie stopnia doktora, mianowicie:

- PhD in Mathematics na University of Kingston, kandydatem w procedurze był Chris Dionne, praca doktorska *Numerical restrictions on Seshadri curves with applications to* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ została obroniona 13 października 2021.
- Dr. rer. nat. math. na Uniwersytecie Leibniza w Hanowerze, kandydatem w procedurze był David Geis, praca doktorska *On the combinatorics of Tits arrangements* została obroniona z wyróżnieniem 31 maja 2018.

Osiągnięcia organizacyjne

W latach 2016-2022 współorganizowałem 6 międzynarodowych konferencji naukowych, zarówno w Polsce, jak i w Niemczech. W samym 2022 współorganizowałem dwie konferencje satelitarne do Wirtualnego Międzynarodowego Kongresu Matematycznego, mianowicie

- konferencja MEGA 2022 (Efektywne Metody w Geometrii Algebraicznej), 20-24 czerwca, Kraków;
- konferencja Recent Advances in Classical Algebraic Geometry, 29 czerwca - 2 lipca 2022, Kraków.

Co więcej, regularnie organizuję seminaria naukowe (tj. *reading seminars*) dotyczącze kombinatorycznej geometrii algebraicznej dla młodych badawczy pracujących na Uniwersytecie Pedagogicznym. Będąc częścią społeczności akademickiej Uniwersytetu Pedagogicznego, pracuję w ramach następujących ciał kolegialnych:

(1) Członek Rady Dyscypliny Matematyka,
(2) Członek Rady Instytutu Matematyki,
(3) Członek Senackiej Komisji ds. Nauki,
(4) Członek Komisji ds. Realizacji Programu IDUB Uniwersytetu Pedagogicznego,
(5) Członek Zespołu ds. opracowania ankiety oceny nauczycieli akademickich.

Ponadto, w październiku 2020 roku zostałem powołany przez JM Rektora UP prof. Piotra Borka na funkcję Zastępcy Przewodniczącego Rady Dyscypliny Matematyka.

W ramach dalszej działalności organizacyjnej, jestem członkiem zespołu starającego się uzyskać środki finansowe w ramach grantów instytucjonalnych. W ramach tej działalności, w 2021 roku, udało nam się uzyskać grant NAWA STER, którego celem jest zwiększenie umiędzynarodowienia Szkoły Doktorskiej UP.

Osiągnięcia popularyzujące naukę

Podczas pobytu w Polsce, przed wyjazdem do Niemiec w październiku 2015 roku, wygłaszałem regularne wykłady dla młodzieży szkolnej w liceum ogólnokształcącym w Mielcu, które sam ukończyłem. Oprócz tego regularnie brałem udział w spotkaniach kół naukowych organizowanych przez Koło Naukowe Matematyków UP. W kwietniu 2021 roku miałem przyjemność wygłosić wykład plenarny na XV Sympozjum Kół Naukowych *ZD@LNI MATEMATYCY* dotyczący układów krzywych oraz ich własności. Będąc studentem matematyki na Politechnice Krakowskiej aktywnie uczestniczyłem w działaniach *Uniwersytetu Dzieci*, głównie przez organizację warsztatów z teorii grafów.

Inne informacje

Wybrane stypendia i nagrody

2020 **Stypendium Niemieckiej Centrali Wymiany Akademickiej DAAD** Research Stays for University Academics and Scientists, październik 2020.

2018 **Distinguished Reviewer of Zentralblatt MATH**, wyróżnienie ustanowione przez FIZ Karlsruhe oraz Europejskie Towarzystwo Matematyczne.

2018 **Stypendium Naukowe START 2018** Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej, 26 maja 2018.

2018 **Nagroda im. Kazimierza Kuratowskiego**, 14 kwietnia 2018.

2016 **Stypendium Riemanna**, Riemann Center for Physics and Geometry Leibniz Universität Hannover, odmówiono.

2016 **Nagroda Drugiego Stopnia** Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za osiągnięcia w nauce, 9 grudnia 2016.

2014 **Stypendium Niemieckiej Centrali Wymiany Akademickiej DAAD** Short Research Stays in Germany for PhD students, czerwiec 2014.

2011–2012 **Stypendium Małopolskiej Fundacji Stypendialnej "Sapere Auso"**.

2010–2012 **Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego** za wybitne osiągnięcia w nauce (jako student).