Dr Anna Michalak
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Uniwersytet Łódzki

# Autoreferat

## 1 Imię i nazwisko

Anna Maria Michalak

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

- **Stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki** otrzymany 29 września 2010 roku na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.
  Tytuł rozprawy doktorskiej: *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa*
  Promotor: *prof. dr hab. Andrzej Nowakowski*
- **Dyplom magistra matematyki** otrzymany w 2004 roku na kierunku matematyka, specjalność: *informatyka* na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.
  Tytuł pracy magisterskiej: *Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do przewidywania ryzyka zawału serca*
  Promotor: *prof. dr hab. Andrzej Nowakowski*

## 3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- **Adiunkt** w Katedrze Ekonometrii na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego od 28 września 2011 r.

# 4 Omówienie osiągnięć naukowych

Osiągnięciem naukowym, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r., stanowiącym podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie matematyka w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych jest powiązany tematycznie cykl publikacji zatytułowany

**Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych**

w skład którego wchodzą następujące artykuły:

[A1] A. Michalak, A. Nowakowski, Finite-time stability and finite-time synchronization of neural network - Dual approach, Journal of the Franklin Institute 354 (18) (2017), 8513-8528;

[A2] A. Michalak, A. Nowakowski, Fixed-time stability of ODE and fixed-time stability of neural network, International Journal of Control 94 (12) (2021), 3332-3338;

[A3] A. Michalak, A. Nowakowski, Dual Lyapunov approach to finite time stability for parabolic PDE, Dynamics of Partial Differential Equations 19 (3) (2022), 177-189;

[A4] A. Michalak, A. Nowakowski, New approach to fixed-time stability of a nonlinear system, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 48 (2023), 101337;

[A5] A. Michalak, Finite-time and fixed-time stability analysis for time-varying system - dual approach, Journal of the Franklin Institute 359 (18) (2022), 10676-10687.

## 4.1 Wstęp

Wyniki przedstawione w dorobku wchodzącym w skład cyklu habilitacyjnego dotyczą badania stabilności (w skończonym i stałym czasie) rozwiązań równań różniczkowych. W ramach całego cyklu zaproponowana została nowa dualna metoda podejścia do stabilności - dualna metoda Lapunowa (dla równań różniczkowych zwyczajnych [A1], [A2], [A5] oraz parabolicznych [A3]) oraz nowa metoda wykorzystująca metody sterowania optymalnego ([A4]).
W autoreferacie omawiam mój oryginalny i indywidualny wkład w prace współautorskie ([A1], [A2], [A3] [A4]) oraz wyniki uzyskane w indywidualnej publikacji [A5]. Jedynymi wynikami wspólnymi w prezentowanym autoreferacie jest Twierdzenie 21 oraz pojawiające się w sekcjach 4.4 i 4.5 Twierdzenia 25, 28, 29 oraz Przykłady 26 i 27.
Zanim przejdę do omówienia powyższych metod oraz przykładów zastosowania, przypomnę najważniejsze definicje i wprowadzę potrzebne oznaczenia.
Na przestrzeni ostatniego dziesięciolecia w literaturze pojawiło się wiele prac dotyczących różnych typów stabilności dla różnych typów równań różniczkowych. Z praktycznego punktu

widzenia jednak bardziej interesujące jest nie tyle wiedzieć, czy rozwiązanie równania różniczkowego jest stabilne, jednostajnie, wykładniczo lub nawet asymptotycznie stabilne, ale czy dociera i dotyka rozwiązania zerowego. Jeśli dzieje się to w skończonym czasie (nazywanym czasem osadzania), to mówimy o stabilności w skończonym czasie. Gdy dodatkowo czas ten jest niezależny od warunków początkowych, to mamy do czynienia ze stabilnością w stałym czasie. Wszystkie wyniki przedstawione w cyklu habilitacyjnym dotyczą właśnie tych dwóch pojęć: stabilności w skończonym (finite-time) i stałym (fixed-time) czasie.

Pojęcie stabilności w skończonym i stałym czasie zostało szeroko rozwinięte w literaturze ([3], [8], [17], [22], [23], [25], [26]). Jeśli stały czas osadzania można również wyrazić w terminach parametrów równania, odnosi się to do pojęcia stabilności w czasie określonym (*ang. prescribed-time stability*) ([9], [11], [12], [13], [27], [28], [29]).

Głównym narzędziem do badania różnych rodzajów stabilności jest funkcja Lapunowa. Najczęściej występującymi wystarczającymi warunkami dla stabilności w stałym czasie są $\dot{V} \leqslant -r(V(x))$, gdzie $V$ jest funkcją Lapunowa, a $r$ jest ciągłą, dodatnio określoną funkcją (zobacz [22], [23]) lub $\dot{V} \leqslant -(aV(x)^{\frac{\alpha}{\kappa}} + bV(x)^{\frac{\beta}{\kappa}})$, $a, b, \alpha, \beta, \kappa > 0$, $\kappa\alpha < 1$, $\kappa\beta > 1$ (np. patrz [17]). Te warunki stały się niezwykle popularne w artykułach dotyczących stabilności w stałym czasie, ale w rzeczywistości opisują stabilność w czasie określonym (np. Twierdzenie 2 i 4 w [25]). Inni autorzy zajmujący się stabilnością w stałym czasie rozwijali jedynie powyższy warunek, ale zawsze był to warunek o podobnej formie (np. patrz [10], [14]).

W prezentowanym przeze mnie cyklu przedstawiona metoda badania stabilności w stałym i skończonym czasie została przeze mnie nazwana metodą dualną. Jest ona rozwinięciem metody zapoczątkowanej przeze mnie w pracy [21], a inspiracją wprowadzenia tego typu dualności była praca [24]. Jest to zupełnie nowe podejście do badania stabilności w stałym i skończonym czasie dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych oraz stabilności w stałym czasie dla rozwiązań równań różniczkowych parabolicznych.

Rozpocznę (sekcja 4.2.1) od prezentacji wyników dla układów równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

z prawą stroną typu Caratheodory'ego. Układy takie rozważane są w pracach [A1] i [A2], a uzyskane wyniki wykorzystywane są do badania stabilności sztucznej sieci neuronowej zapisanej w następującej postaci:

$$x_i'(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t) g_j(t, x_j(t)) + I_i(t),\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Jest o tyle nowatorskie zastosowanie, gdyż w rozważanych tu sieciach współczynniki $b$ i funkcja aktywacji $g$ zależy od czasu, dlatego w praktyce możemy wyniki zastosować do bardziej ogólnych modeli sieci, niż te występujące powszechnie w literaturze (por. [15], [16], [30]).

Wyniki uzyskane dla sieci neuronowych zaprezentuję w oddzielnej sekcji (sekcja 4.4). W pracy

[A3] badane są układy równań różniczkowych parabolicznych (wyniki przedstawię w sekcji 4.2.3), w [A4] zaprezentowane jest zupełnie inne i nowe spojrzenie na problem stabilności w stałym czasie rozwiązania zerowego układu równań różniczkowych zwyczajnych (dlatego wyniki zawarte są w oddzielnej sekcji 4.3), a w [A5] rozważam specyficzny układ równań różniczkowych (sekcja 4.2.2). Samo pojęcie i idea stabilności w stałym lub skończonym czasie jest takie samo, natomiast omawiając prace [A3], [A4] i [A5] wrócę jeszcze do doprecyzowania definicji w tych szczególnych sytuacjach.
W ramach całego cyklu pojawia się pojęcie przestrzeni prymalnej i dualnej. Za każdym razem (za wyjątkiem sytuacji, gdy podane jest inaczej) mówiąc o przestrzeni prymalnej bądź dualnej mam na myśli otwarty podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zawierający element 0. Pojęcie dualności w badaniu stabilności, jak również pojęcie dualnej przestrzeni, dualnego równania czy dualnej funkcji Lapunowa zostało wprowadzone przeze mnie w pracy [21], a następnie rozwijane w pracach stanowiących cykl habilitacyjny. Idea dualności tego typu została zainspirowana pracą [24], lecz pojęcia te zostały przeze mnie wykorzystane w zupełnie inny sposób. W ten sposób została opracowana przeze mnie nowa metoda badania stabilności (nazywana przeze mnie metodą dualną). Nie ma ona nic wspólnego z pojęciem dualności znanym w literaturze. Pojęcie dualności pojawia się tutaj za sprawą wprowadzenia przestrzeni dualnej, do której przenoszę rozważania na temat stabilności.
Głównym narzędziem wykorzystywanym przeze mnie w celu stwierdzania stabilności w skończonym lub stałym czasie jest dualna funkcja Lapunowa oraz lemat porównawczy (we wszystkich pracach wchodzących w skład cyklu korzystam z Lematu pochodzącego z pracy [19] (Stwierdzenie 2.3)). Idea dualnego podejścia w badaniu stabilności polega na przeniesieniu rozważań dotyczących stabilności do nowej przestrzeni (nazwanej przestrzenią dualną), gdzie rozważany jest dualny układ równań. W przestrzeni tej wprowadzam funkcję Lapunowa, którą nazywam dualną funkcją Lapunowa. Jeśli dualna funkcja Lapunowa spełnia odpowiednie warunki, to mogę orzekać o stabilności rozwiązania zerowego układu prymalnego w skończonym i stałym czasie ([A1], [A2] i [A3]). W pracy [A5] rozważam układ dwóch równań (równania prymalnego i dualnego) i poprzez rozszerzenie definicji dualnej funkcji Lapunowa na obie zmienne przestrzenne, mogę wnioskować o równoczesnej stabilności rozwiązania zerowego układu prymalnego i dualnego (zarówno w skończonym jak i w stałym czasie).
Natomiast w pracy [A4] zastosowane jest zupełnie nowe podejście do badania stabilności w skończonym i stałym czasie. Zaproponowana metoda wykorzystuje w absolutnie nowatorskiej formie metody programowania dynamicznego (metoda ta opisana jest w sekcji 4.3).

## 4.2 Dualne podejście typu Lapunowa

### 4.2.1 Układy równań różniczkowych zwyczajnych ([A1], [A2])

W sekcji tej przedstawię opracowaną przeze mnie dualną metodę badania stabilności w skończonym i stałym czasie rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Podam warunki wy-

starczające stabilności odpowiedniego typu.
Wiele autorów w pracach dotyczących stabilności w skończonym i stałym czasie (m.in. [22], [23]) stosuje warunek typu $\dot{V}(x) \leqslant -r(V(x))$, gdzie $V$ jest funkcją Lapunowa, a $r$ to ciągła, dodatnio określona funkcja. W prezentowanej przeze mnie dualnej metodzie otrzymuję wystarczający warunek stabilności w skończonym i stałym czasie poprzez dualną nierówność Hamiltona-Jacobiego typu (13) lub (14). W pracach [22], [23] oszacowanie czasu ustalania jest dokonywane za pomocą nieznanej *a priori* funkcji Lapunowa $V$, w dualnym podejściu oszacowanie dokonane jest za pomocą znanej funkcji $c(t)$ należącej do klasy $\mathcal{M}$ (stabilność w skończonym czasie) lub $\mathcal{MB}$ (stabilność w stałym czasie).Warto zauważyć, że w tych warunkach funkcja $c(t)$ zależy od czasu $t$ i może być jedynie mierzalna tylko względem $t$. Przedstawione podejście jest zupełnie nowe, m.in Twierdzenie 5 i jego dowód nie mają odpowiedników w literaturze.
Autorzy prac [23] i [22] podają warunek konieczny i wystarczający dla stabilności w stałym czasie, lecz rozważają układy z prawą stroną ciągłą, a tu wymagane jest jedynie, aby prawa strona równania spełniała warunek Caratheodory'ego.
Sekcję tę rozpocznę od wprowadzenia kilku potrzebnych pojęć i definicji. Będę rozważać układ równań różniczkowych zwyczajnych następującej postaci:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{3}$$

gdzie $f : [0, +\infty) \times \mathcal{X} \to \boldsymbol{R}^n$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a ze względu na pierwszą zmienną i ciągła ze względu na drugą zmienną; $\mathcal{X}$ jest otwartym podzbiorem $\boldsymbol{R}^n$ takim, że $0 \in \mathcal{X}$; $f(t, 0) = 0$ dla $t \geqslant 0$ oraz istnieje wstępująca rodzina zbiorów zwartych o niespustym wnętrzu $Q_k \subset \mathcal{X}$ taka, że $0 \in int\ Q_1$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} int\ Q_k = \mathcal{X}$ i istnieje $m_k \in L^\infty([0, \infty))$, $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla prawie wszystkich $t \geqslant 0$ i wszystkich $x \in Q_k$, $f$ spełnia $|f(t, x)| < m_k(t)$, gdzie $L^\infty([0, \infty))$ jest zbiorem wszystkich istotnie ograniczonych funkcji mierzalnych.
Oznaczę (podobnie jak w [21]) poprzez $\mathbb{X}$ i $\mathbb{X}_\infty$, ($\mathbb{X}_\infty \subset \mathbb{X}$), zbiory funkcji absolutnie ciągłych $x : I_x \to \boldsymbol{R}^n$, takich,że:

$$\mathbb{X} = \{x : I_x \subset [0, +\infty), x(t) \in \mathcal{X},\ x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{dla p.w. } t \in I_x,$$

$$x \text{ jest prawostronnie wysycone}\},$$

$$\mathbb{X}_\infty = \{x : I_x \subset (0, +\infty), x(t) \in \mathcal{X},\ x'(t) = f(t, x(t)) \text{ dla p.w.} t \in I_x\}.$$

Przed wprowadzeniem pojęć stabilności w skończonym i stałym czasie przypomnę dwie definicje (definicje te pojawiają się w [21] i [19] odpowiednio):
Powiemy, że funkcja $\zeta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ należy do klasy $\mathcal{K}_1$ jeśli jest rosnąca oraz $\zeta(0) = 0$.
Powiemy, że funkcja $c : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ należy do klasy $\mathcal{M}$ jeśli jest funkcją nieujemną, mierzalną, ograniczoną z góry na każdym zwartym podprzedziale $(0, \infty)$ i taką, że istnieje $t_c \geqslant 0$ takie, że $\int\limits_{t_c}^{+\infty} c(\tau)d\tau = +\infty$.

Kolejna definicja została przeze mnie wprowadzona w pracy [A2]. Definiuje ona klasę funkcji $\mathcal{MB}$, która jest rozszerzeniem klasy $\mathcal{M}$ i pełni kluczową rolę w twierdzeniu o stabilności w stałym czasie (m.in. w Twierdzeniach 4 i 5).
Niech $\mathcal{MB}$ będzie klasą funkcji należących do $\mathcal{M}$ i takich, że istnieje $t_1 > 0$ i $U > 0$ takie, że $\int\limits_t^{+\infty} \frac{1}{c(\tau)} d\tau < U$ dla wszystkich $t > t_1$.

#### 4.2.1.1 Funkcja czasu osadzania i definicja stabilności w skończonym i stałym czasie

W analizie stabilności w skończonym lub stałym czasie, najważniejszym zagadnieniem jest estymacja funkcji czasu osadzania, która dla danej trajektorii (tj. trajektorii startującej z danego punktu początkowego) określa czas „dotarcia" tej trajektorii do trajektorii zerowej.
Dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ i $\varphi \in \mathbb{X}$ takich, że $\varphi(t_0) = x_0$ oznaczmy poprzez $d_\varphi(t_0, x_0)$ skończoną wartość (o ile istnieje) taką, że $\varphi(t) \in \mathcal{X}$ dla $t \in (t_0, d_\varphi(t_0, x_0))$ i $\lim_{t \to d_\varphi(t_0,x_0)^-} \varphi(t) = 0$.
Niech

$$\tau_\varphi(t_0, x_0) = \begin{cases} d_\varphi(t_0, x_0), & \text{jeśli istnieje} \\ +\infty, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \tag{4}$$

Odwzorowanie $S : [0, +\infty) \times \mathcal{X} \to \boldsymbol{R}^n \cup \{+\infty\}$ nazwiemy *funkcją czasu osadzania*, jeśli $S(t_0, 0) = t_0$ dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i dla dowolnych $t_0 \geqslant 0$ i $x_0 \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$, $S(t_0, x_0) = \sup\{\tau_\varphi(t_0, x_0),\ \varphi \in \mathbb{X} \text{ takie, że } \varphi(t_0) = x_0\}$.
Powiemy, że rozwiązanie zerowe (3) jest *stabilne w skończonym czasie* jeśli jest stabilne i dla każdego $t_0 \geqslant 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego rozwiązania (3) spełniającego $|x(t_0)| < \delta$, funkcja czasu osadzania $S(t_0, x(t_0))$ jest skończona.
Powiemy, że rozwiązanie zerowe (3) jest *stabilne w stałym czasie* jeśli jest stabilne w skończonym czasie i dla $t_0 > 0$ funkcja czasu osadzania $S(t_0, x_0)$jest lokalnie ograniczona na $\mathcal{X}$ oraz $\sup\limits_{x_0 \in \mathcal{X}} S(t_0, x_0) < +\infty$.

#### 4.2.1.2 Założenia o funkcji $W$ i dualna funkcja Lapunowa $T$

Niech $\mathcal{P}$ będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, takim, że $0 \in \mathcal{P}$. W zbiorze $\mathcal{P}$, nazywanym przestrzenią dualną zdefiniuję pomocniczą funkcję $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ dwóch zmiennych $(t, y)$ przyjmującą wartości rzeczywiste.
Symbol $'$ oznacza pochodną po zmiennej $t$, a $W_t$ pochodną po pierwszej zmiennej funkcji $W$, natomiast $W_y$ pochodną funkcji $W$ po drugiej zmiennej. Symbol $W_{yy}$ oznacza macierz pochodnych drugiego rzędu po drugiej zmiennej funkcji $W$.
O funkcji $W$ załóżmy, że spełnia:
**(Z1):** $W \in C^1([0, +\infty) \times \mathcal{P})$ oraz dla wszystkich $t \geqslant 0$, zachodzi $W_y(t, 0) = 0, W(t, 0) =$

0, $W_y(\cdot,\cdot)$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską, $-W_y(t,\mathcal{P}) \subset \mathcal{X}, -W_y(t,\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ i istnieje $W_{yy}(\cdot,\cdot)$.
Wprowadzę następujące równanie, które będę nazywać równaniem dualnym. Równanie w takiej postaci zostało wprowadzone przeze mnie po raz pierwszy w pracy [21], tam też zostało nazwane równaniem dualnym:

$$\frac{d}{dt}W_y(t,y(t)) = -f(t,-W_y(t,y(t))) \text{ dla p.w. } t \in I_y,\ I_y \subset [0,+\infty) \tag{5}$$

oraz zbiór funkcji absolutnie ciągłych $\mathbb{P} = \{y : I_y \to \mathbb{R}^n,\ y(t) \in \mathcal{P} \text{ dla } t \in I_y \text{ spełnia } (5)\}$.
Elementy zbioru $\mathbb{P}$ będę nazywać rozwiązaniami (5).
Zdefiniuję teraz dualną funkcję Lapunowa $T : [0,+\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ następująco:

$$T(t,y) = W(t,y) - yW_y(t,y). \tag{6}$$

O funkcji $T$ zakładam, że spełnia następujący warunek wzrostu:

$$T(t,y) \geqslant a_1(|y|) \tag{7}$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $y \in \mathcal{P}$ i pewnej funkcji $a_1 \in \mathcal{K}_1$. W niektórych twierdzeniach (por. Twierdzenie 5) osłabię ten warunek do warunku postaci:

$$T(t,y) > 0 \text{ dla } y \neq 0 \text{ oraz } T(t,0) = 0 \text{ dla } t \geqslant 0. \tag{8}$$

Przestrzeń prymalną $\mathcal{X}$ i dualną $\mathcal{P}$ łączy następujący operator przejścia:

$$\mathcal{X} \ni x = -W_y(t,y) \text{ dla wszystkich } t \geqslant 0 \text{ i } y \in \mathcal{P}. \tag{9}$$

Zakładam, że funkcja $W : [0,+\infty) \times \mathcal{P} \to \boldsymbol{R}$ spełnia następujące warunki, które oznaczę jako **(Z2)**:

1. dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego $t_0 \geqslant 0$ istnieje $\varepsilon_1 > 0$ takie, że dla wszystkich $t \geqslant t_0$ i $y \in \mathcal{P}$, jeżeli $|y| < \varepsilon_1$, to $|W_y(t,y)| < \varepsilon$.

2. dla każdego $x \in \mathbb{X}$ istnieje $y \in \mathbb{P}$ takie, że $I_x \subset I_y$ i dla każdego $t \in I_x$ zachodzi $x(t) = -W_y(t,y(t))$.

3. dla wszystkich $t_0 \geqslant 0$ i $\delta_1 > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in \mathbb{X}$, jeżeli $|x(t_0)| < \delta$, to istnieje $y \in \mathbb{P}$ takie, że $|y(t_0)| < \delta_1$.

Założenie $W_y(t,0) = 0$ dla $t \in [0,\infty)$ jest konieczne, aby rozwiązaniu zerowemu $y = 0$ w przestrzeni dualnej odpowiadało rozwiązanie zerowe $x = 0$ w przestrzeni prymalnej, gdyż mamy $-W_y(t,0) = x = 0$. Zatem aby uzyskać konkluzje dotyczące wybranego typu stabilności nie potrzebuję zakładać, że $W_y(t,0) = 0$, ale wtedy rozwiązaniu zerowemu w przestrzeni dualnej

odpowiada rozwiązanie $\bar{x}(t) = -W_y(t, 0)$ w przestrzeni prymalnej, gdzie $\bar{x}(t) \in \mathcal{X}$ jest absolutnie ciągła, $\bar{x}(t)$ spełnia (3) i należy do $\mathbb{X}_\infty$. Oznacza to również, że nie ma konieczności, aby $f(t, 0) = 0$. Wtedy natomiast mam $\bar{x}'(t) = f(t, \bar{x}(t))$ oraz wtedy to rozwiązanie $\bar{x}(t)$ jest stanem równowagi równania (3), którego stabilność badam. W takim wypadku wszystkie definicje dotyczące funkcji $-W_y$ muszą być przesunięte o $\bar{x}(t)$ (por. przykład 27).
W obu artykułach [A1], [A2] zakładam, że pomocnicza funkcja $W$ spełnia dualną nierówność Hamiltona-Jacobiego postaci (10), natomiast w [A5] nierówność postaci (11). W pracy [21] w Stwierdzeniu 1 i 2 pokazałam, że dualna funkcja Lapunowa $T$, spełniająca (10) bądź (11), jest nierosnąca wzdłuż odpowiednich rozwiązań. Fakt ten jest niezbędny w twierdzeniach dotyczących stabilności. Dla przejrzystości późniejszych wnioskowań przywołam wspomniane stwierdzenia:

**Stwierdzenie 1** *([21], [A1] Proposition 11) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca założenie **(Z1)** oraz taka, że dla prawie wszystkich $t \geqslant 0$ i każdego $z \in W_y(t, \mathcal{P})$ zachodzi nierówność*

$$\frac{\partial}{\partial t}(W(t, z) - zW_y(t, z)) - zW_{yy}(t, z)f(t, z) \leqslant 0, \tag{10}$$

*wtedy dla dowolnego $y \in \mathbb{P}$ funkcja*

$$I_y \ni t \mapsto T(t, -W_y(t, y(t)))$$

*jest nierosnąca.*

**Stwierdzenie 2** *[21] Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca założenie **(Z1)** oraz taka, że dla prawie wszystkich $t \geqslant 0$ i każdego $z \in W_y(t, \mathcal{P})$ zachodzi nierówność*

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t, y) + yf(t, -W_y(t, y)) \leqslant 0 \tag{11}$$

*wtedy dla dowolnego $y \in \mathbb{P}$ funkcja*

$$I_y \ni t \mapsto T(t, y(t))$$

*jest nierosnąca.*

#### 4.2.1.3 Twierdzenia o stabilności

W pracy [21] założenie (10) wraz z warunkiem wzrostu (7) oraz „klasycznymi" założeniami o funkcji Lapunowa dawało w rezultacie wniosek o stabilności rozwiązania zerowego badanego równania. Teraz, chcąc uzyskać stabilność w skończonym czasie muszę wzmocnić (10) do postaci (12) poprzez dołożenie do lewej strony nierówności nieujemnego składnika $c(t)(T(t, z))^\alpha > 0$. Zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3** *([A1] Theorem 14) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca (7) oraz założenia **(Z1)** oraz **(Z2)** i istnieje $c \in \mathcal{M}$ oraz $\alpha \in (0,1)$ takie, że dla $(t,z) \in [0,+\infty) \times (-W_y(t,\mathcal{P}))$ zachodzi*

$$\frac{\partial}{\partial t}(W(t,z) - zW_y(t,z)) - zW_{yy}(t,z)f(t,z) + c(t)(T(t,z))^\alpha \leqslant 0 \tag{12}$$

*wtedy rozwiązanie zerowe równania (3) jest stabilne w skończonym czasie. Co więcej, funkcję czasu osadzania dla trajektorii startujących z punktu $(t_0, x_0)$ niedaleko punktu $(t_0, 0)$ można oszacować następująco:*

$$S((t_0, x_0) \leqslant t_{c,T(t_0,-W_y(t,y_0))},$$

*gdzie $y_0$ jest takim punktem w przestrzeni dualnej, że $x_0 = -W_y(t_0, y_0)$.*

Idea dowodu opiera się na wynikach z pracy [21] oraz wykorzystuje lemat porównawczy w celu stwierdzenia stabilności w skończonym czasie (por. Stwierdzenie 2.3 [19]). Czas $t_{c,T(t_0,-W_y(t,y_0))}$ pochodzi wprost z dowodu lematu porównawczego, gdzie

$$t_{c,z} = \inf \left\{ \bar{t} \geqslant t : \int_t^{\bar{t}} c(\tau) d\tau = \frac{|z|^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right\}$$

(por. [19] lub wzór (18) w pracy [A1]).
Teza następnego twierdzenia dotyczy stabilności w stałym czasie. Dodatkowym założeniem, które należy uwzględnić jest wzmocniony warunek dotyczący funkcji $c$. Teraz $c \in \mathcal{MB}$, i jest to warunek kluczowy, a zarazem wystarczający, aby otrzymać stabilność w stałym czasie.

**Twierdzenie 4** *([A2] Theorem 1) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca (7) oraz założenia **(Z1)** i **(Z2)** i istnieje $c \in \mathcal{MB}$ oraz $\alpha \in (0,1)$ takie, że dla $(t,z) \in [0,+\infty) \times (-W_y(t,\mathcal{P}))$ zachodzi*

$$\frac{\partial}{\partial t}(W(t,z) - zW_y(t,z)) - zW_{yy}(t,z)f(t,z) + c(t)(T(t,z))^\alpha \leqslant 0 \tag{13}$$

*wtedy rozwiązanie zerowe równania (3) jest stabilne w stałym czasie.*

W dowodzie wykorzystuję własności klasy $\mathcal{MB}$, m.in. z faktu, że $c \in \mathcal{MB}$ wynika, że istnieje funkcja pierwotna $c_p$, która jest rosnąca. Zatem istnieje również funkcja do niej odwrotna $(c_p)^{-1}$. Te własności klasy $\mathcal{MB}$ pozwalają, aby ze stabilności w skończonym czasie przejść do stabilności w stałym czasie.

Kolejne twierdzenie pochodzi z pracy [A2]. Jego teza mówi co prawda o stabilności w stałym czasie, jednakże zmieniając założenie $c \in \mathcal{MB}$ na $c \in \mathcal{M}$ w oczywisty sposób mogę uzyskać wynik dotyczący stabilności w skończonym czasie. W twierdzeniu tym korzystam również z innej postaci nierówności Hamiltona-Jacobiego, mianowicie postaci (14). W pracy [21] występowała nierówność postaci (11), a teraz po dołożeniu nieujemnego składnika do lewej strony nierówności otrzymuję nierówność postaci (14), a w tezie konluzję na temat stabilności w stałym czasie. Bardzo istotne jest, że w (14) występuje funkcja $g(\cdot)$, dolnie półciągła, nierosnąca i taka, że $g(0) = 0$. Jest to istotne uogólnienie w stosunku do Twierdzenia 4, gdzie po lewej stronie nierówności był skladnik $c(t)(T(t,z))^{\alpha}$. Jest to wynik ogólniejszy, a zatem obejmuje znacznie szerszą klasę równań.

**Twierdzenie 5** *([A2] Theorem 2) Jeśli istnieje funkcja $W : [0,+\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca (8) oraz założenia **(Z1)** i **(Z2)** i istnieje $c \in \mathcal{MB}$ i funkcja $g(\cdot)$, dolnie półciągła, nierosnąca i taka, że $g(0) = 0$ oraz $\int_0^b \frac{1}{g(s)} ds < \infty$ dla $b > 0$ i zachodzi warunek*

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t,y) + yf(t, -W_y(t,y)) + c(t)g(T(t,y)) \leqslant 0 \ dla\ (t,y) \in [0,+\infty) \times \mathcal{P}, \tag{14}$$

*wtedy rozwiązanie zerowe równania (3) jest stabilne w stałym czasie.*

Kolejne stwierdzenie pokazuje jak można powiązać (poprzez funkcję $W$) rozwiązanie zerowe w przestrzeni dualnej z rozwiązaniem zerowym w przestrzeni prymalnej poprzez własność stabilności w skończonym i stałym czasie. Zastosowanie poniższego stwierdzenia jest zilustrowane m.in. w przykładzie 32.

**Stwierdzenie 6** *([A5] Proposition 13) Jeśli istnieje funkcja $W : [0,+\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca **(Z1)**, **(Z2)** i rozwiązanie zerowe równania (5) jest stabilne w stałym (skończonym) czasie, to odpowiadające mu rozwiązanie zerowe równania (3) jest również stabilne w stałym (skończonym) czasie.*

### 4.2.2 Układ dwóch równań: prymalny i dualny ([A5])

Zależność pomiędzy stabilnością rozwiązania dualnego i prymalnego, czyli teza stwierdzenia 6 stała się inspiracją do badań przedstawionych poniżej. Pokażę w nich zastosowanie dualnych narzędzi mające na celu stwierdzenie jednoczesnej stabilności rozwiązań zerowych równania prymalnego i dualnego. Wyniki przedstawione w tej sekcji są znaczącym rozszerzeniem tych uzyskanych w [A5] i [A2], gdzie badana była stabilność tylko w przestrzeni prymalnej. Wyniki tej sekcji dotyczą stabilności w skończonym i stałym czasie rozwiązań układu (15) składającego się z równania prymalnego i dualnego. Głównym wynikiem tej sekcji jest otrzymanie warunków wystarczających jednoczesnej stabilności w skończonym i stałym czasie dla równania prymalnego i dualnego. Warto też podkreślić, że nie badano dotychczas stabilności w skończonym i stałym czasie rozwiązań równania dualnego, zatem wyniki [A5] są zupełnie nowe i oryginalne. Dualne narzędzia przedstawione w tej sekcji mogą służyć również jako nowe narzędzie do badania stabilności w skończonym lub stałym czasie jedynie równania

dualnego (por. Przykład 31). W sekcji tej rozszerzam również definicję dualnej funkcji Lapunowa na trzy zmienne.
Rozważam następujący układ dwóch równań:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \\ \frac{d}{dt}(W_y(t, (y(t)))) = -f(t, -W_y(t, (y(t)))), \end{cases} \tag{15}$$

gdzie $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ jest zmienną stanu układu, $f : [0, +\infty) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a ze względu na pierwszą zmienną i ciągła ze względu na drugą zmienną dla prawie wszystkich $t \in [0, +\infty)$ oraz $f(t, 0) = 0$. Zauważmy, że jeśli $y(t) \in \mathbb{P}$ to $x(t) = -W_y(t, y(t)) \in \mathbb{X}$, oraz co więcej, jeśli $y(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem dualnego równania, to $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem równania prymalnego. Powiemy, że $(x, y)$ jest rozwiązaniem układu (15) jeżeli $x \in \mathbb{X}$ oraz $y \in \mathbb{P}$.

**Uwaga 7** *[A5] Parę funkcji $(x, y) \equiv (0, 0) \in \mathbb{X} \times \mathbb{P}$ będziemy nazywać rozwiązaniem zerowym układu (15).*

Moim celem jest zbadanie stabilności w skończonym i stałym czasie rozwiązania zerowego układu (15). Przy wcześniej uczynionych założeniach w sekcji 4.2.1.2 zdefiniuję warunki wystarczające takiej stabilności. W tym celu muszę przedefiniować dualną funkcję Lapunowa $T$ na funkcję trzech zmiennych. Oznaczę ją jako $\overline{T}$.
Niech $\overline{T} : [0, +\infty) \times \mathcal{X} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$,

$$\overline{T}(t, x, y) = W(t, y) + xy. \tag{16}$$

Od funkcji Lapunowa zwykle wymaga się, aby była nierosnąca wzdłuż rozwiązań układu i spełniała odpowiednie warunki wzrostu. Zatem najpierw należy stwierdzić własność odpowiedniej monotoniczności $\overline{T}$ wzdłuż rozwiązań układu (15). Stosując klasyczne metody dowodowe otrzymuję następujące stwierdzenie:

**Stwierdzenie 8** *([A5] Proposition 7) Jeśli funkcja $W$ spełnia założenia z paragrafu 4.2.1.2 oraz zakładając, że dla prawie wszystkich $t \geqslant 0$ i wszystkich $y \in \mathcal{P}$, funkcja $W$ spełnia nierówność Hamiltona-Jacobiego postaci (11), wtedy funkcja $I_y \ni t \mapsto \overline{T}(t, -W_y(t, y(t)), y(t))$ jest nierosnąca.*

Załóżmy ponadto następujący warunek wzrostu:

$$W(t, y) - yW_y(t, y) \geqslant a(|y|) \tag{17}$$

dla wszystkich $t > 0$ i $y \in \mathcal{P}$ i pewnej funkcji $a \in \mathcal{K}_1$.
Następne twierdzenie podaje warunki wystarczające, aby rozwiązanie zerowe układu (15) było stabilne.

**Twierdzenie 9** *([A5] Theorem 8) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca **(Z1)**, **(Z2)**, (11) oraz (17) to rozwiązanie zerowe układu (15) jest stabilne.*

Kolejne dwa twierdzenia mówią o stabilności w skończonym i stałym czasie rozwiązania zerowego układu (15).

**Twierdzenie 10** *([A5] Theorem 9) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca **(Z1)**, **(Z2)**, (11), (17) oraz istnieje funkcja $c \in \mathcal{M}$ i $g(\cdot)$ dolnie półciągła i niemalejąca, $g(0) = 0$, $\int_0^b \frac{1}{g(s)} ds < \infty$ dla $b > 0$ taka, że funkcja $\overline{T}$ zdefiniowana w (16) spełnia*

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, y) + y f(t, -W_y(t, y)) + c(t) g(\overline{T}(t, -W_y(t, y), y)) \leqslant 0 \tag{18}$$

*dla $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{P}$, to rozwiązanie zerowe układu (15) jest stabilne w skończonym czasie.*

**Twierdzenie 11** *([A5] Theorem 10) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca **(Z1)**, **(Z2)**, (11) oraz (17) oraz istnieje funkcja $c \in \mathcal{MB}$ i $g(\cdot)$ dolnie półciągła i niemalejąca, $g(0) = 0$, $\int_0^b \frac{1}{g(s)} ds < \infty$ dla $b > 0$ taka, że funkcja $\overline{T}$ zdefiniowana w (16) spełnia*

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, y) + y f(t, -W_y(t, y)) + c(t) g(\overline{T}(t, -W_y(t, y), y)) \leqslant 0 \tag{19}$$

*dla $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{P}$, to rozwiązanie zerowe układu (15) jest stabilne w stałym czasie.*

Dowody tych twierdzeń wykorzystują między innymi własności klas $\mathcal{M}$ i $\mathcal{MB}$ odpowiednio oraz korzystają z lematu porównawczego. Przebiegają analogicznie do dowodów Twierdzeń 3, 4 i 5.

**Uwaga 12** *Stwierdzenie 6 oznacza między innymi, że Twierdzenia 10 oraz 11 mogą być również wykorzystywane jako nowe narzędzia do badania stabilności w stałym (skończonym czasie) rozwiązania zerowego prymalnego równania (3).*

#### 4.2.2.1 Region atrakcji

Pojęcie regionu atrakcji zostało wprowadzone przeze mnie w pracy [A5] jako zastosowanie wyników Twierdzeń 10 i 11. Wynik przedstawiony w Twierdzeniu 14 jest zupełnie nowy.
Aby zdefiniować region atrakcji dla danego równania, najpierw wprowadzę niezbędne definicje:

Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (3) jest *globalnie asymptotycznie stabilne*, jeśli jest stabilne i dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i każdego rozwiązania (3) mamy $\lim_{t \to +\infty} |x(t)| = 0$ (por. [1])

Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (3) jest *globalnie stabilne w skończonym czasie*, jeśli jest globalnie asymptotycznie stabilne i dowolne rozwiązanie równania (3) „dociera" do rozwiązania zerowego w pewnym skończonym momencie (por. [25]).
Jako przykład zastosowania Twierdzeń 10 i 11 wprowadzę pojęcie regionu atrakcji równania (3). Ta koncepcja pokazuje jak można połączyć obie przestrzenie: prymalną $\mathcal{X}$ i dualną $\mathcal{P}$.

**Definicja 13** *[A5] Niech $A \subset \mathcal{X}$ będzie niepustym zbiorem. Powiemy, że jest on regionem atrakcji dla równania (3) jeśli dowolne rozwiązanie równania (3) spełniające $x(t_0) \in A$ dla pewnego $t_0 \geqslant 0$ „dociera" do rozwiązania zerowego w pewnym skończonym czasie $S_x(t_0)$.*

**Twierdzenie 14** *([A5] Theorem 19) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca **(Z1)** i **(Z2)** oraz rozwiązanie zerowe równania (5) jest globalnie stabilne w skończonym czasie, wtedy zbiór $A = -W_y(t, \mathcal{P})$ jest regionem atrakcji dla równania (3).*

Zastosowanie powyższego twierdzenia jest zilustrowane w Przykładzie 33.

### 4.2.3 Układy równań różniczkowych parabolicznych ([A3])

Jednym z głównych narzędzi,powszechnie stosowanych do badania stabilności lub niestabilności równania (20) jest funkcja Lapunowa, która w przypadku (20) przyjmuje postać standardowej funkcji energii (patrz np. [4], [6]). W ciągu ostatnich dwóch dekad pojawiła się inna metoda badania stabilności przez aproksymację równania (20) równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, wykorzystując techniki takie jak metoda Galerkina lub różnice skończone, a następnie stosując metody optymalnego sterowania w skończonym wymiarze [2], [5], [7]. Innym podejściem jest wykorzystanie optymalizacji metodą sumy kwadratów do konstrukcji funkcji Lapunowa dla równań parabolicznych (patrz [20]). W sekcji tej chcę zbadać stabilność równania (20) w zupełnie inny i nowy sposób. Koncepcja ta opiera się na pomysłach z pracy [21] (patrz również [24]). Mianowicie rozszerzam przestrzeń $[0, +\infty) \times \Omega$ do przestrzeni dualnej $[0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$, a następnie będę rozważać równanie dualne do (20) w tej przestrzeni dualnej $[0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P}$. Następnie definiuję funkcję pomocniczą $W$, która spełnia dualną nierówność Hamiltona-Jacobiego. Taka funkcja $W$ jest podstawą do konstrukcji dualnej funkcji Lapunowa. To podejście pozwala na powrót do pierwotnych pomysłów Lapunowa, gdy funkcja Lapunowa spełnia pewną (dualną) nierówność Hamiltona-Jacobiego w $[0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P}$. Ponadto, osłabię założenia dotyczące $f$, tj. $f$ jest funkcją Caratheodory'ego (mierzalną w $(t, x)$ i ciągłą względem $u$).
W tej sekcji przedstawię dualne podejście do badania stabilności typu Lapunowa rozwiązania zerowego $u = 0$ parabolicznego równania różniczkowego postaci:

$$u_t(t, x) - \Delta_x u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \ (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \tag{20}$$

$$\text{oraz } u = 0 \text{ na zbiorze } (0, \infty) \times \partial\Omega,$$

przy perturbacjach należących do $C^0(\Omega)$.
Warto zaznaczyć, że dualne podejście nie było wcześniej stosowane do tego typu równań, i tym samym wszystkie twierdzenia tej sekcji, zarówno dotyczące stabilności (Twierdzenia 17, 18, 19), jak i stabilności w skończonym czasie (Twierdzenie 21) są zupełnie nowe.
Zakładam, że $\Omega$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^n$ z dostatecznie gładkim brzegiem oraz, że $f : [0, +\infty) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t, x, 0) = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $x \in \Omega$, $f \not\equiv 0$, mierzalna ze względu na $(t, x)$ i ciągła ze względu na trzecią zmienną $u$.
W sekcji tej funkcja pomocnicza $W$ jak i dualna funkcja Lapunowa $T$ oraz zbiór $\mathbb{P}$ dualnych rozwiązań są zdefiniowane w nowy sposób. Jednakże, aby nie wprowadzać czytelnika w błąd, pozostanę przy oznaczeniach z poprzednich sekcji, tj. $W$, $T$ i $\mathbb{P}$.
Niech $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ będzie otwartym podzbiorem zawierającym 0 (nazywać go będę zbiorem dualnym) i niech $W : [0, +\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją pomocniczą taką, że $W \in C^2([0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P}) \cap C([0, +\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathcal{P})$ oraz $\Delta_x(W_y(t, x, y))$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i wszystkich $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{P}$.
Zakładam również, że dla wszystkich $t \geqslant 0$ i $x \in \Omega$ zachodzi $W(t, x, 0) = 0$ oraz $W_y(t, x, 0) = 0$ i, że dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ i wszystkich $(t, y) \in [0, +\infty) \times \mathcal{P}$ funkcja $W$ spełnia następującą dualną nierówność Hamiltona-Jacobiego

$$W_t(t, x, y) - y \cdot \Delta_x(W_y(t, x, y)) + yf(t, x, -W_y(t, x, y)) \leqslant 0. \tag{21}$$

Zanim sformułuję problem stabilności w przestrzeni dualnej wprowadzę pojęcie rozwiązania dualnego do rozwiązania $u$ równiania (20):
Powiemy, że $y(t, x)$, $(t, x) \in [0, +\infty) \times \Omega$, $y \in C^1([0, +\infty) \times \Omega)$, jest dualnym do $u(t, x)$ rozwiązaniem równania (20) jeśli spełnia dla wcześniej zdefiniowanej funkcji $W$ następujące dualne równanie:

$$\frac{d}{dt}(W_y(t, x, y(t, x))) - \Delta_x(W_y(t, x, y(t, x))) = -f(t, x, -W_y(t, x, y(t, x))),$$
$$\text{dla p.w. } (t, x) \in [0, +\infty) \times \Omega,\ y = 0 \text{ dla } [0, +\infty) \times \partial\Omega. \tag{22}$$

Zwróćmy uwagę, że wobec założeń na $f$ i $W$, mamy, że $y = 0$ jest rozwiązaniem (22).
Oznaczmy poprzez $\mathbb{P}$ zbiór wszystkich rozwiązań dualnych do rozwiązań równania (20).
Zatem mamy następującą relację: dla każdego $y \in \mathbb{P}$ istnieje rozwiązanie $u(t, x)$ równania (20) takie, że

$$u(t, x) = -W_y(t, x, y(t, x)),\ (t, x) \in [0, +\infty) \times \Omega. \tag{23}$$

Zbiór wszystkich rozwiązań $u(t, x)$ równania (20) spełniających (23) oznaczę poprzez $\mathbb{U}$.
Zdefiniuję zatem dualną funkcję Lapunowa $T : [0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ następująco:

$$T(t, x, y) = W(t, x, y) - yW_y(t, x, y). \tag{24}$$

**Definicja 15** *Powiemy, że dla dowolnego $x \in \Omega$ funkcja $T$ jest nierosnąca wzdłuż $y \in \mathbb{P}$, jeżeli funkcja $[0, +\infty) \ni t \mapsto T(t, x, y(t, x)) = T_y(t, x)$ jest nierosnąca dla każdego ustalonego $x \in \Omega$.*

Przy założeniach jakie uczyniliśmy w tym paragrafie prawdziwe jest stwierdzenie:

**Stwierdzenie 16** *([A3] Proposition 2.2) Jeśli* $W : [0,+\infty) \times \bar{\Omega} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *spełnia założenia z sekcji 4.2.3, to dla każdego ustalonego* $x \in \Omega$ *i każdej funkcji* $y \in \mathbb{P}$*, funkcja* $t \to T_y(t,x)$ *jest nierosnąca w* $[0,+\infty)$*.*

Dowód w dużej mierze bazuje na wykorzystaniu dualnej nierówności Hamiltona-Jacobiego (21).
Dla dualnej funkcji Lapunowa zdefiniowanej wzorem (24) zakładam następujący warunek wzrostu: dla dowolnej funkcji $d_1 \in \mathcal{K}_1$ funkcja $T$ spełnia nierówność

$$T(t,x,y) \geqslant d_1(|y|) \tag{25}$$

dla wszystkich $t \geqslant 0$, $x \in \Omega$, $y \in \mathcal{P}$.
Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (22) *jest stabilne*, jeśli dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $y \in \mathbb{P}$ spełniającego $|y(t_0,x)| < \delta$ dla wszystkich $x \in \Omega$ mamy $|y(t,x)| < \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$.
Następne twierdzenie daje warunek dostateczny stabilności rozwiązania zerowego równania (22) z wykorzystaniem narzędzi dualnych.

**Twierdzenie 17** *([A3] Theorem 2.4) Jeśli istnieje funkcja* $W : [0,+\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *zdefiniowana powyżej oraz funkcja* $T$ *zdefiniowana w (24) spełnia (25), wtedy rozwiązanie zerowe dualnego równania (22) jest stabilne.*

Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (22) *jest jednostajnie stabilne*, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$, $x \in \Omega$ i każdego $y \in \mathbb{P}$ spełniającego $|y(t_0,x)| < \delta$ mamy $|y(t,x)| < \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0, x \in \Omega$.

Aby uzyskać jednostajną stabilność rozwiązania zerowego równania (22) muszę jedynie dodatkowo założyć, że funkcja $T$ jest ograniczona z góry przez niezależną od czasu i ciągłą w 0 funkcję $d_2(|y|)$ należącą do klasy $\mathcal{K}_1$.

**Twierdzenie 18** *([A3] Theorem 2.6) Jeśli istnieje funkcja* $W : [0,+\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *zdefiniowana powyżej, a funkcja* $T$ *zdefiniowana w (24) spełnia (25) oraz*

$$T(t,x,y) \leqslant d_2(|y|),$$

*dla* $t \geqslant 0$, $x \in \Omega$, $y \in \mathcal{P}$ *i pewnej funkcji* $d_2 \in \mathcal{K}_1$ *ciągłej w 0, wtedy rozwiązanie zerowe dualnego równania (22) jest jednostajnie stabilne.*

Koncepcje dowodów twierdzeń 17 i 18 są podobne do dowodów twierdzeń dotyczących stabilności i jednostajnej stabilności rozwiązań zerowych równań różniczkowych zwyczajnych przedstawionych w mojej wcześniejszej pracy [21].

Następne twierdzenia pokażą wykorzystanie dualnych narzędzi do badania stabilności prymalnego równania (20).
Oznaczmy poprzez $\mathcal{U}$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych $u : [0, +\infty) \times \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ mających dla prawie wszystkich $x \in \Omega$ pochodną ze względu na $t$ i takich, że dla prawie wszystkich $t$ istnieje $\Delta_x u(t, x)$.
Będziemy rozważać mocne rozwiązania równania (20), tzn. funkcje $u \in \mathcal{U}$ spełniające (20) prawie wszędzie w $[0, b) \times \Omega$, $b > 0$. Zbiór tych rozwiązań oznaczę poprzez $\mathcal{U}_s$. Niech $\mathcal{U}_0$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ z normą $\|u\| = \max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)|$.

Wprowadźmy definicje stabilności i jednostajnej stabilności dla równania prymalnego:
Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (20) *jest stabilne*, jeśli dla każdego $t_0 \geqslant 0$ i $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że każde rozwiązanie $u \in \mathcal{U}_s$ równania (20) spełniające $|u(t_0, x)| < \delta$ dla każdego $x \in \Omega$, jest przedłużalne na $[t_0, +\infty)$ i $|u(t, x)| < \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$.
Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (20) *jest jednostajnie stabilne*, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$, istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $t_0 \geqslant 0$, $x \in \Omega$ i dowolnego rozwiązania $u \in \mathcal{U}_s$ równania (20) spełniającego $|u(t_0, x)| < \delta$ zachodzi $|u(t, x)| < \varepsilon$ dla $t \geqslant t_0$, $x \in \Omega$.

Aby uzyskać warunek dostateczny stabilności w przestrzeni prymalnej muszę dla funkcji $W$ wprowadzić dodatkowe założenie, które oznaczę jako **(Z3)**:

1. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $t_0 \geqslant 0$ istnieje $\varepsilon_1 > 0$ taki, że dla wszystkich $x \in \Omega$, $t \geqslant t_0$ i $y \in \mathcal{P}$, jeśli tylko zachodzi $|y| < \varepsilon_1$, to $|W_y(t, x, y)| < \varepsilon$.

2. dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i $\delta_1 > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $u(t_0, \cdot) \in \mathcal{U}_0$, jeśli zachodzi $|u(t_0, x)| < \delta$, dla każdego $x \in \Omega$, to istnieje $y \in \mathbb{P}$, $u(t_0, x) = -W_y(t_0, x, y(t_0, x))$ taki że $|y(t_0, x)| < \delta_1$ dla każdego $x \in \Omega$.

**Twierdzenie 19** *([A3] Theorem 3.5) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca poprzednie założenia oraz spełniająca **(Z3)** oraz jeśli rozwiązanie zerowe dualnego równania (22) jest stabilne, to odpowiadające mu rozwiązanie zerowe prymalnego równania (20) jest stabilne.*

Zauważmy, że na podstawie Twierdzeń 17 i 19 prawdziwe jest też następujące spostrzeżenie:

**Uwaga 20** *([A3] Remark 3.6) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca poprzednie założenia oraz (21) i **(Z3)**, a funkcja $T$ zdefiniowana w (24) spełnia (25), to rozwiązanie zerowe prymalnego równania (20) jest stabilne.*

Aby otrzymać warunek wystarczający stabilności w skończonym czasie potrzeba wzmocnić warunek Hamiltona-Jacobiego. Podobnie jak dla równań różniczkowych zwyczajnych do lewej strony nierówności Hamiltona-Jacobiego postaci (21) należy dodać odpowiedni nieujemny składnik (wykorzystujący funkcję z klasy $\mathcal{M}$), co w konsekwencji daje nierówność

(27). W dowodzie ponownie wykorzystam lemat porównawczy.
W sekcji 4.2.1.1 zdefiniowałam funkcję osadzania $S$. W przypadku równań parabolicznych definicja ta wygląda podobnie, jednak dla zachowania odpowiedniej precyzji przywołajmy całą definicję.

Dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i $u_0(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \Omega$, $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0$ i $\varphi \in \mathcal{U}$ takiego, że $\varphi(t_0, x) = u_0(x)$ dla $x \in \Omega$, oznaczmy poprzez $d_\varphi(t_0, u_0(\cdot))$ skończoną wartość (o ile istnieje) taką, że $\varphi(t, x) \in \mathbb{R}$ dla $t \in (t_0, d_\varphi(t_0, u_0(\cdot)))$, $x \in \Omega$ i

$$\lim_{t \to d_\varphi(t_0, u_0(\cdot))^-} (\sup_{x \in \Omega} \mid \varphi(t, x) \mid) = 0.$$

Niech

$$\tau_\varphi(t_0, u_0(\cdot)) = \begin{cases} d_\varphi(t_0, u_0(\cdot)), & \text{jeśli istnieje,} \\ +\infty, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \tag{26}$$

Odwzorowanie $S : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nazwiemy *funkcją czasu osadzania*, jeśli

- $S(t_0, 0) = t_0$ dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$,
- dla dowolnego $u_0 \in \mathcal{U}_0$, $t_0 \geqslant 0$ i $u_0(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \Omega$,
  $S(t_0, u_0(\cdot)) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{U}_s, \\ \varphi(t_0, \cdot) = u_0(\cdot)}} \{\tau_\varphi(t_0, u_0(\cdot))\}$.

Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (20) jest *stabilne w skończonym czasie*, jeśli jest stabilne i dla każdego $t_0 \geqslant 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego rozwiązania równania (20) spełniającego $|u(t_0, x)| < \delta$, $x \in \Omega$, wartość funkcji czasu osadzania $S(t_0, u(t_0, \cdot))$ jest skończona.

Poniższe twierdzenie podaje warunki wystarczające na to, aby rozwiązanie zerowe równania (20) było stabilne w skończonym czasie. W warunkach tych pojawia się funkcja $c$ należąca do klasy $\mathcal{M}$ zdefiniowanej w paragrafie 4.2.1. Dowód wykorzystuje lemat porównawczy.

**Twierdzenie 21** *([A3] Theorem 5.6) Jeśli istnieje funkcja $W : [0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ spełniająca założenia z sekcji 4.2.3 i **(Z3)**, oraz funkcja $T$ zdefiniowana w (24) spełnia (25) oraz istnieje $c \in \mathcal{M}$ i $\alpha \in (0, 1)$ takie, że dla $(t, x, y) \in [0, +\infty) \times \Omega \times \mathcal{P}$ zachodzi*

$$W_t(t, x, y) - y \cdot \Delta_x W_y(t, x, y) + y f(t, x, -W_y(t, x, y)) + c(t, x)(T(t, x, y))^\alpha \leqslant 0, \tag{27}$$

*to rozwiązanie zerowe równania (20) jest stabilne w skończonym czasie.*
*Funkcję czasu osadzania dla trajektorii startujących z punktu $(t_0, u_0(\cdot))$ blisko $(t_0, 0)$, ($u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0$) można oszacować następująco:*

$$S(t_0, u_0(\cdot)) \leqslant t_{c, u_0},$$

*gdzie $y_0(x)$ jest punktem w przestrzeni dualnej, takim, że*

$$u_0(x) = -W_y(t_0, x, y_0(x)), \quad x \in \Omega.$$

Podobnie jak w Twierdzeniu 3 czas $t_{c,u_0}$ pochodzi wprost z dowodu lematu porównawczego (por. [19] lub wzór (18) w pracy [A1]).

### 4.3 Dualne podejście typu programowania dynamicznego ([A4])

Moim celem jest konstrukcja nowych wystarczających warunków stabilności w stałym czasie w kontekście teorii optymalnego sterowania. W podejściu tym warunek początkowy trajektorii $x_0$ traktuję jako sterowanie. Sterowanie punktem $x_0$ nie jest możliwe w klasycznym podejściu, jak i w dualnym podejściu typu Lapunowa (sekcja 4.2.1). To jest jeden z powodów, dla którego chcę zastosować metodę dualnego programowania dynamicznego. Jest to zupełnie nowatorskie spojrzenie na problem stabilności w skończonym i stałym czasie. Zupełnie nowe są też dualne narzędzia zastosowane w celu sformułowania warunków wystarczających optymalności.
W sekcji tej wrócę do rozważania stabilności w stałym czasie rozwiązania zerowego równania różniczkowego

$$x'(t) = f(t, x(t)), \; x(t_0) = x_0, \; t > 0, \; x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{28}$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spełnia założenia z sekcji 4.2.1.
Przedstawiona metoda wykorzystuje przestrzeń dualną (natomiast wprowadzoną w nieco inny sposób). Odejdę teraz zupełnie od metody Lapunowa. Ponieważ zaprezentowane tutaj, zupełnie nowe podejście będzie wykorzystywało dualne podejście do programowania dynamicznego, zatem warunki wystarczające będą również sformułowane w tym języku.
W tej sekcji zakładać będę, że rozwiązanie zerowe jest globalnie stabilne w skończonym czasie. Dla wygody czytelnika przypomnę obie definicje: globalnej stabilności w skończonym i stałym czasie (definicje te podaję za [25]).
Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (28) jest *globalnie stabilne w skończonym czasie*, jeśli jest globalnie asymptotycznie stabilne i każde rozwiązanie (28) przechodzące przez punkt $(t_0, x_0)$, $x_0 = x(t_0)$ „dotyka" rozwiązania zerowego w skończonym czasie (nazywanym czasem osadzania $S(t_0, x_0)$). Ponieważ punkt $x_0 = x(t_0)$, zatem dla uproszczenia oznaczeń wprowadzę następujące oznaczenie $\mathcal{S}(x_0) = S(t_0, x_0)$.
Powiemy, że rozwiązanie zerowe równania (28) jest *globalnie stabilne w stałym czasie*, jeśli jest globalnie stabilne w skończonym czasie i czas osadzania $\mathcal{S}(x_0)$ jest ograniczony z góry przez pewną liczbę $S_{max}$.
Idea dualnego podejścia wykorzystuje metody programowania dynamicznego i opiera się na

spostrzeżeniu, że obie definicje sugerują, że rozwiązanie równania (28) jest postaci

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = x_0 + z(t).$$

W sekcji tej rozwiązanie $x(t)$ będę utożsamiać z parą $(z, x_0)$, a $x_0$ mogę traktować jak sterowanie. Ponieważ badając problem stabilności w stałym czasie konieczne jest aby czas osadzania był ograniczony przez pewną stałą niezależną od $x_0$, zatem potrzeba, aby $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{S}(x_0) \leqslant S_{max}$. Ponieważ nie znamy $S_{max}$, to dosyć naturalne wydaje się spojrzenie na problem stabilności w stałym czasie jak na problem sterowania optymalnego, a rozwiązanie tego problemu pozwoli na znalezienie oszacowania $S_{max}$.
Na początku zakładam, że rozwiązanie zerowe równania (28) jest globalnie stabilne w stałym czasie, a punkt początkowy $x_0$ traktuję jak sterowanie. Następnie chcę maksymalizować czas, w którym trajektorie startujące z punktu $x_0$ docierają do rozwiązania zerowego.
Niech dla danego $x_0$ czas $\mathcal{S}(x_0)$ oznacza czas końcowy (czas dotarcia do zera) dla trajektorii startującej z $(t_0, x_0)$. Jeśli jest więcej trajektorii startujących z $(t_0, x_0)$, to $\mathcal{S}(x_0)$ niech oznacza maksymalny czas spośrod czasów końcowych dla tych trajektorii.
Mogę w takim razie sformułować problem **P** sterowania optymalnego następująco:

$$\text{maximize }_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \; \mathcal{S}(x_0). \tag{29}$$

Jest jasne, że jeśli optymalna wartość dla problemu **P** jest skończona, to rozwiązanie zerowe równania (28) jest globalnie stabilne w stałym czasie. Dlatego problem **P** jest w istocie przeformułowaniem problemu globalnej stabilności w stałym czasie w języku sterowania optymalnego.

### 4.3.1 Warunki wystarczające optymalności dla problemu P

W celu sformułownia warunków wystarczających optymalności dla problemu **P** zastosuję dualne podejście do programowania dynamicznego (zapoczątkowane w pracy [24]). Jednakże moje podejście będzie się trochę różnić, gdyż zrezygnuję z dość restrykcyjnego warunku transwersalności, występującego w [24], wprowadzając zamiast tego w przestrzeni dualnej parę funkcji $(y^0, Z)$ spełniającą odpowiednie założenia.
Niech $p \in \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n_{<0}$, tzn. zakładam, że wszystkie współrzędne $p = (p_1, ..., p_n)$ są niedodatnie, $p_i \leqslant 0, i = 1, ..., n$, oraz niech zbiór $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem zmiennych $(t, p) \in [t_0, \infty) \times \mathbf{P}$.
Podstawowy pomysł programowania dynamicznego polega na sformułowaniu równania różniczkowego programowania dynamicznego. Tutaj zastosuję jednak trochę inne podejście, gdyż szukam pary funkcji $(y^0, Z)$ spełniającej równanie różniczkowe programowania dynamicznego.
Załóżmy, że:

**(Z5)**: istnieje czas $F$ i para funkcji $(y^0(t), Z(t,p))$, $y^0 : [0,F) \to \mathbb{R}$, $y^0 \in L^1(t_0,F)$,$Z$ : $[t_0,F) \times \mathbf{P} \to \mathbb{R}$, $Z \in C([t_0,F) \times \mathbf{P})$, taka, że $Z_t \in L^2([t_0,F) \times \mathbf{P})$, spełniająca na $[t_0,F) \times \mathbf{P}$ następujące równanie:

$$Z_t(t,p) - \inf\{pf(t, x_0 + pZ(t,p)) - \mathcal{S}(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^n\} = y^0(t), \tag{30}$$

gdzie $L^1(t_0,F)$ - przestrzeń funkcji całkowalnych na $[t_0,F]$, $L^2([t_0,F) \times \mathbf{P})$ - przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na $[t_0,F) \times \mathbf{P}$, $pf$ oznacza iloczyn skalarny, zaś $pZ(t,p)$ oznacza, że każda współrzędna wektora $p$ jest pomnożona przez $Z(t,p)$.
Przypomnę, że zakładam, że $\mathcal{S}(x_0)$ jest skończone dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Aby lepiej zrozumieć równanie (30) można je zapisać w postaci następującej nierówności:

$$-Z_t(t,p) + pf(t, x_0 + pZ(t,p)) + y^0(t) \geqslant \mathcal{S}(x_0), \text{dla wszystkich } x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Weźmy dowolną ustaloną funkcję $y \in L^1(t_0,F)$ taką, że $y^0(t) - y(t) = constant \geqslant 0$ dla $[t_0,F)$.
Dla powyższych $Z$, $y$ i dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy poprzez $p(t)$, $t \in [t_0,F]$ rozwiązanie równania

$$Z_t(t,p(t)) - p(t)f(t, x_0 + p(t)Z(t,p(t))) = y(t) \tag{32}$$

należące do $L^2(t_0,F)$. Rozwiązanie $p(\cdot)$ będę nazywać dualną trajektorią odpowiadającą $Z$ i $x_0$. Oczywiście, nie dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje trajektoria $p(t)$ spełniająca (32), dlatego trzeba ograniczyć poszukiwanie optymalnego rozwiązania problemu $\mathbf{P}$ do zbioru $Ad_Z^{y^0,y}$ następująco:

$$Ad_Z^{y^0,y} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \text{istnieje } p(\cdot) \in L^2(t_0,F) \text{ spełniające (32)}\}.$$

Konsekwentnie zredukuję problem $\mathbf{P}$ do problemu $\mathbf{P}_Z$ następująco:

$$\text{maximize}_{\ x_0 \in Ad_Z^{y^0,y}} \ \mathcal{S}(x_0).$$

### 4.3.2 Twierdzenie weryfikacyjne dla problemu $\mathbf{P}_Z$

**Twierdzenie 22** *([A4] Theorem 1) Załóżmy, że istnieje trójka funkcji $(y^0(t), Z(t,p), y(t))$ spełniająca założenie **(Z5)** oraz niech $y \in L^1(t_0,F)$ spełnia $y^0(t) - y(t) = constant \geqslant 0$ w $[t_0,F)$.*
*Niech istnieje $\bar{p}(\cdot) \in L^2(t_0,F)$ i $\bar{x}_0 \in Ad_Z^{y^0,y}$ spełniające (32) i*

$$Z_t(t,\bar{p}(t)) - \bar{p}(t)f(t, \bar{x}_0 + \bar{p}(t)Z(t,\bar{p}(t))) + \mathcal{S}(\bar{x}_0) = y^0(t). \tag{33}$$

*Wtedy $\mathcal{S}(\bar{x}_0)$ jest maksymalnym czasem dla problemu $\mathbf{P}_Z$, tzn. $\mathcal{S}(\bar{x}_0)$ jest stałym czasem osadzania dla równania (28).*

To twierdzenie ma na razie postać czysto teoretyczną, a jego dowód jest praktycznie natychmiastową konsekwencją przyjętych założeń.

### 4.3.3 Warunki wystarczające optymalności dla problemu $\mathbf{P}_Z$ bez założenia stabilności w skończonym czasie

W tej sekcji odejdę od założenia o stabilności w skończonym czasie rozwiązania zerowego (28). Zamiast tego założę jedynie, że jest globalnie asymptotycznie stabilne (zatem trajektorie startujące z $(t_0, x_0)$ nie muszą koniecznie dotykać zera, a to oznacza, że czas osadzania $\mathcal{S}(x_0)$ nie musi być skończony). Zakładam jednak, że istnieje podzbiór $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ taki, że dla $x_0 \in X_0$ czas osadzania $\mathcal{S}(x_0)$ jest skończony. Co więcej, zakładam, że prawa strona równania (28) spełnia następujące założenie:
(**H**): istnieje $p \in \mathbb{R}^n_-$ takie, że funkcja $X_0 \ni x_0 \to -pf(t, x_0) + \mathcal{S}(x_0)$ jest ograniczona z góry, jednostajnie ze względu na $t$ przez pewną funkcję $k(\cdot) \in L^1(t_0, \infty)$.
Założenie (**H**) jest trudne do zastosowania, bo w ogólności nie znam funkcji $x_0 \to \mathcal{S}(x_0)$. Dlatego, bazując na pracy [22] mogę wprowadzić założenie:
(**HV**): istnieje $p \in \mathbb{R}^n_-$ takie, że funkcja

$$X_0 \ni x_0 \to \mathbf{F}(t, x_0) = -pf(t, x_0) + \int_0^{V(t,x_0)} \frac{dz}{r(z)} \tag{34}$$

jest ograniczona z góry, jednostajnie ze względu na $t$ przez pewną funkcję $k(\cdot) \in L^1(t_0, \infty)$.
W założeniu (**HV**) funkcja $V$ jest klasyczną lipschitzowską funkcją Lapunowa $V : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ zaś funkcja $r : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ należy do klasy $L^2(0, \infty)$, $r(0) = 0$ oraz razem spełniają następującą nierówność:

$$\dot{V}(t, x) \leqslant -r(V(t, x)) \tag{35}$$

dla wszystkich $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.
Bazując na [22] wiem, że

$$\mathcal{S}(x_0) \leqslant \int_0^{V(t,x_0)} \frac{dz}{r(z)}. \tag{36}$$

Warto podkreślić, że nie wymagam, aby $r(\cdot)$ była ciągła oraz aby $\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{r(z)} < +\infty$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Dlatego też, $\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{r(z)}$ może być równe $+\infty$.
W tej sekcji zamiast założenia o globalnej stabilności w stałym czasie rozwiązania zerowego (28) zakładam jedynie globalną asymptotyczną stabilność oraz żądam spełnienia założenia (**HV**).
Moim celem jest podanie warunków wystarczających dla problemu sterowania optymalnego $\mathbf{P}_Z$ zapewniających, że $\mathcal{S}_{max}$ jest skończone.
Załóżmy, że:
**(Z6)**: zachodzi (**H**) lub (**HV**) oraz istnieje czas $F$ i para funkcji $(y^0(t), Z(t, p))$, $y^0 : [0, F) \to \mathbb{R}$, $y^0 \in L^1(t_0, F)$, $Z : [t_0, F) \times \mathbf{P} \to \mathbb{R}$, $Z \in C([t_0, F) \times \mathbf{P})$, $Z_t \in L^2([t_0, F) \times \mathbf{P})$, spełniająca w $[t_0, F) \times \mathbf{P}$ następujące równanie:

$$Z_t(t, p) + \sup\{-pf(t, x_0 + pZ(t, p)) + \int_0^{V(t,x_0)} \frac{dz}{r(z)} : x_0 \in X_0\} = y^0(t), \tag{37}$$

Weźmy $y \in L^1(t_0, F)$ takie, że $y^0(t) - y(t) = constant \geqslant 0$ w $[t_0, F)$. Dla $Z$ i każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ oznaczmy poprzez $p(t)$, $t \in [t_0, F]$ rozwiązanie równania

$$Z_t(t, p(t)) - p(t) f(t, x_0 + p(t) Z(t, p(t))) = y(t) \tag{38}$$

należące do $L^2(t_0, F)$. Znów ograniczę przestrzeń $\mathbb{R}^n$ do zbioru $Ad_Z^{y^0,y}$ następująco:

$$Ad_Z^{y^0,y} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \text{istnieje } p(\cdot) \in L^2(t_0, F) \text{ spełniające } (38)\}.$$

I podobnie problem $\mathbf{P}$ redukuję do problemu $\mathbf{P}_Z$:

$$\text{maximize}_{\, x_0 \in Ad_Z^{y^0,y}} \ \mathcal{S}(x_0).$$

### 4.3.4 Twierdzenie weryfikacyjne dla problemu $\mathbf{P}_Z$

**Twierdzenie 23** *([A4] Theorem 2) Załóżmy, że zachodzi (**Z6**). Niech istnieje $\bar{p}(\cdot) \in L^2(t_0, F)$ i $\bar{x}_0 \in Ad_Z^{y^0,y}$ spełniające (38) oraz*

$$Z_t(t, \bar{p}(t)) - \bar{p}(t) f(t, \bar{x}_0 + \bar{p}(t) Z(t, \bar{p}(t))) + \int_0^{V(t,\bar{x}_0)} \frac{dz}{r(z)} = y^0(t). \tag{39}$$

*Wtedy $\mathcal{S}(\bar{x}_0)$ (spełniające nierówność (36)) jest stałym czasem osadzania dla problemu $\boldsymbol{P}_Z$.*

**Uwaga 24** *Warto zaznaczyć, że w warunku (30) występującym w Twierdzeniu 22 pojawia się nieznana funkcja $\mathcal{S}(x_0)$. Natomiast w przypadku warunku (37), pojawiają się dwie funkcje $V$ i $r$, które można obliczyć na podstawie wzoru (35). To sprawia, że Twierdzenie 23 jest bardziej praktyczne niż Twierdzenie 22.*

## 4.4 Zastosowanie nowych metod badania stabilności do badania stabilności sztucznych sieci neuronowych

Jednym z ważniejszych zastosowań teorii stabilności, a zwłaszcza stabilności w skończonym i stałym czasie, jest dziedzina sztucznych sieci neuronowych. W związku z tym w tej sekcji przedstawię praktyczne wykorzystanie twierdzeń, które zostały przedstawione w poprzednich sekcjach, w celu stwierdzenia odpowiedniego typu stabilności sieci neuronowych typu Hopfielda. Sieci Hopfielda to modele asocjacyjnej pamięci, które znajdują zastosowanie w rozpoznawaniu wzorców i korygowaniu uszkodzeń w obrazach lub sygnałach. Aby sieć Hopfielda była użyteczna w praktyce, musi być stabilna i szybko zbiegać do poprawnego wzorca, a także być odporna na zakłócenia i szumy w danych wejściowych. Teoretyczne wyniki dotyczące stabilności sieci Hopfielda mogą pomóc w ustaleniu warunków, które muszą być spełnione, aby sieć była stabilna i działała prawidłowo.

### 4.4.1 Sieci neuronowe opisane przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych

W zastosowaniach twierdzeń dotyczących sieci neuronowych do badania stabilności sieci neuronowych używa się pojęcia „stabilna sieć neuronowa”. Natomiast mówiąc, że sieć neuronowa jest stabilna mamy na myśli, że rozwiązanie zerowe równania opisującego sieć neuronową jest stabilne (w odpowiednim, rozważanym przez nas sensie). Pojęcie „stabilna sieć neuronowa” jest powszechnie używane w literaturze opisującej ten temat (por. [10], [14], [15], [16], [18], [30]).
Następne twierdzenie wykorzystuje wyniki Twierdzenia 3 w celu stwierdzenia stabilności w skończonym czasie sieci neuronowej (2).
Zapiszę najpierw sieć (2) w formie macierzowej w następujący sposób:

$$x'(t) = -A(t)x(t) + B(t)h(t, x(t)) + I(t), \tag{40}$$

gdzie $x = (x_1, \dots x_n)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $h(t, x) = (h_1(t, x_1), \dots, h_n(t, x_n))$, $I = (I_1, \dots, I_n)$ oraz $B(t)h(t, 0) = -I(t)$, $h$ jest funkcją Caratheodory'ego, a $A, B, I$ są mierzalne ze względu na $t$.
Poniższe Twierdzenie jest wspólnym wynikiem otrzymanym ze Współautorem [A1].

**Twierdzenie 25** *([A1] Theorem 15) Załóżmy, że istnieją liczby $\beta \geqslant 2$, $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha\beta > 1$, funkcje $b(\cdot)$, $d(\cdot) : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}^+$ całkowalne i $a(\cdot) : (0, \infty) \to \boldsymbol{R}^+$ mierzalne i takie, że*

$$a(t) |z|^2 \leqslant zA(t)z,$$

$$I(t)z(\beta(\beta - 1) |z|^{\beta-2} + \alpha\beta(\alpha\beta - 1) |z|^{\alpha\beta-2}) \leqslant b(t) |z|^{\alpha\beta},$$

$$zB(t)g(t, z) \leqslant d(t) |z|^2$$

*dla $t \in (0, \infty)$, $z \in B(0, 1)$. Wtedy, sieć neuronowa opisana poprzez (2) jest stabilna w skończonym czasie. Co więcej, funkcję czasu osadzania dla trajektorii startujących z punktu $(t_0, x_0)$ niedaleko punktu $(t_0, 0)$ można oszacować następująco:*

$$S((t_0, x_0) \leqslant t_{c,T(t_0, -W_y(t, y_0))},$$

*gdzie $y_0 \in \mathcal{P}$ spełnia $x_0 = -W_y(t_0, y_0)$ z*

$$W(t, y) = \frac{1}{C_0} C(t) \left( |y|^\beta + |y|^{\alpha\beta} \right),$$

*$t \in (0, \infty)$, $y \in \mathcal{P} = B(0, 1)$, $\beta \geqslant 2$, $D > 0$ dostatecznie duże,*

$$C(t) = -\exp(-D\beta \int_0^t (d(s) + b(s))ds),$$

$$C_0 = \sup\{2\beta |C(t)| : t \in (0, \infty)\}$$

*i* $t_{c,T(t_0,-W_y(t,y_0))}$ *jest zdefiniowane następująco:*

$$t_{c,T(t_0,-W_y(t,y_0))} = \inf \left\{ t \geqslant t_0 : \int\limits_{t_0}^{t} c(\tau)d\tau = \frac{|T(t_0,-W_y(t,y_0))|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right\}. \tag{41}$$

W kolejnych dwóch przykładach pokażę zastosowanie twierdzeń 4 i 5 dotyczących stabilności w stałym czasie do badania stabilności sztucznej sieci neuronowej postaci (2) zapisanej w postaci macierzowej (40).

**Przykład 26** *([A2] Example 1) Rozważmy następującą sieć opisaną równaniem różniczkowym:*

$$y'(t) = 0,25 \cdot \frac{1}{t+1}(|y+1| - |y-2|) - 0,3y + 0,25 \cdot \frac{1}{t+1}, \;\; t \geqslant 0. \tag{42}$$

*Powyższa sieć jest stabilna w skończonym czasie (pokazane jest to [A1] Example 17), i co więcej, jest również stabilna w stałym czasie ([A2] Example 1), gdyż spełnione jest Twierdzenie 4.*

Przykład 27 pokazuje, że w niektórych przypadkach łatwiej jest udowodnić stabilność w stałym czasie, korzystając z dualnej przestrzeni niż pracując tylko przy użyciu klasycznych metod. Badanie stabilności sieci neuronowych z niezerowym biasem jest technicznie trudne. Zastosowanie podejścia dualnego znacznie ułatwia to zadanie.

**Przykład 27** *([A2] Example 2) Niech $\mathcal{P} \subset \boldsymbol{R}^n$ będzie otwartym podzbiorem. Rozważamy sieć (40) z dodatkowymi założeniami co do $A$, $B$, $h$ i $I$. Niech $\mathcal{I}(t) = \int_0^t I(s)ds$ i niech $A$, $B$ będą lokalnie ograniczone, funkcja $t \to \mathcal{I}(t)$ niech będzie absolutnie ciągła spełniająca (40). Zakładamy, że dla $y \in \mathcal{P}$ zachodzi:*

$$yB(t)h(t, 3y|y| + \mathcal{I}(t)) - yA(t)(3y|y| + \mathcal{I}(t)) \leqslant -a(t)|y|^3 - d(t)|y|, \tag{43}$$

*dla pewnej mierzalnej, nieujemnej funkcji $a(\cdot)$ i dodatniej $d(\cdot)$ oraz dla $d \in \mathcal{MB}$. Zastosujmy Twierdzenie 5. Niech zatem $g$ będzie funkcją, taką, że $g(0) = 0$, $g(s) = \frac{1}{3}s^{\frac{1}{3}}$ oraz niech $W(t,y) = -|y|^3 - \mathcal{I}(t)y$. Wtedy $W_y(t,y) = -3y|y| - \mathcal{I}(t)$, $T(t,y) = 2|y|^3$. Niech $c(t) = \frac{1}{4}d(t)$. Wtedy nierówność (14) dla $(t,y) \in [0,\infty) \times \mathcal{P}$ jest postaci:*

$$-I(t)y + yB(t)h(t, 3y|y| + \mathcal{I}(t)) - yA(t)(3y|y| + \mathcal{I}(t)) + \tag{44}$$

$$+I(t)y + \frac{1}{3}c(t)(2|y|^3)^{\frac{1}{3}} \leqslant -a(t)|y|^3 - d(t)|y| + \frac{1}{4}d(t)\frac{1}{3} \cdot 2^{\frac{1}{3}}|y| \leqslant 0.$$

*Zatem na mocy Twierdzenia 5 sieć (40) jest stabilna względem $\mathcal{I}(t)$.*

## 4.5 Przykłady

Na początku pokażę różne postaci warunków dostatecznych stabilności jakie można uzyskać przy zastosowaniu dualnego podejścia do badania stabilności rozwiązania równania parabolicznego(20).

**Twierdzenie 28** *([A3] Theorem 6.1) Załóżmy, że dla* $t \in (0, \infty)$, $y \in B(0, \frac{3}{10})$, $x \in \Omega = B(0,1) \backslash B(0, \frac{1}{2})$ *zachodzi nierówność*

$$yf(t, x, -W_y(t, x, y)) \leqslant \frac{1}{4}(e^{-\frac{t}{50}} + 1) \left|y\right|^2 e^{-|y|} \tag{45}$$

*oraz*

$$W(t, x, y) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{t}{50}} + 1) \left|x\right|^2 (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin |y| + \frac{1}{2} e^{|y|} - y^2 e^{-|y|}),$$

$t \in (0, \infty)$, $x \in \Omega$, $y \in \mathcal{P} = B(0, \frac{3}{10})$. *Wtedy rozwiązanie zerowe równania (20) jest stabilne w skończonym czasie.*

Dowód bazuje na twierdzeniu 21.

**Twierdzenie 29** *([A3] Theorem 6.2) Załóżmy, że* $f$ *jest następującej postaci* $f(t, x, u) = a(t, x)u + f_1(t, x, u)$, *gdzie* $a(\cdot) : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *mierzalna,* $\Omega = B(0, 1)$ *oraz załóżmy, że istnieje mierzalna funkcja* $d(\cdot) : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ *taka, że*

$$a(t, x) + d(t, x) > \frac{1}{2}, \;\; a(t, x) + d(t, x) < 2e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\left|f_1(t, x, u)\right| \leqslant d(t, x) \left|u\right|, \tag{46}$$

*dla* $t \in (0, \infty)$, $x \in \Omega = B(0, 1) \backslash B(0, \frac{1}{2})$, $u \in \mathbb{R}$ *i niech* $W(t, x, y) = (e^{-t} + 1)(1 + \frac{1}{2} \left|x\right|^2 \left|y\right|^2 - e^{\frac{1}{2}|y|^2})$, $t \in (0, \infty)$, $x \in \Omega$, $y \in \mathcal{P} = B(0, \frac{1}{2})$. *Wtedy rozwiązanie zerowe równania (20) jest stabilne w skończonym czasie.*

Następne trzy przykłady zilustrują zastosowanie Twierdzeń z sekcji 4.2.2.

**Przykład 30** *([A5] Example 11) Rozważmy następujący układ równań*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -(1+t)^2 |x|^{\frac{1}{3}} x, \\ \frac{d}{dt}y(t) = -(1+t)^2 \cdot 6^{\frac{1}{3}} |y|^{-\frac{1}{6}} y \cdot y^{\frac{1}{3}}, \end{cases} \tag{47}$$

*gdzie* $\mathcal{X} = \mathcal{P} = \mathbb{R}$. *Zauważmy, że drugie równanie może być zapisane w postaci dualnej z* $W(t, y) = -\frac{1}{2}|y|^{\frac{3}{2}}$ *i* $f$ *taką jak w pierwszym równaniu. Co więcej wszystkie założenia Twierdzenia 11 są spełnione, np. z* $c(t) = t^{\frac{3}{2}}$ *i* $g(s) = s^{\frac{8}{10}}$. *Zatem rozwiązanie zerowe układu (47) jest stabilne w stałym czasie.*

Oczywiście możemy również zastosować Twierdzenia 10 oraz 11 do badania stabilności tylko jednego z równań układu (15).

**Przykład 31** *([A5] Example 12) Rozważmy następujące równanie:*

$$y'(t) = -\frac{e^t y|y(1+\sin(y^2))|^{-\frac{1}{6}}(1+\sin(y^2))}{1+\sin(y^2)+2y^2\cos(y^2)} \tag{48}$$

*gdzie* $\mathcal{P} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$*. Możemy zauważyć, że powyższe równanie jest stabilne w stałym czasie. W tym celu, weźmy* $W(t,y) = \frac{1}{2}(\cos(y^2) - y^2) - \frac{1}{2}$*,* $c(t) = t^{\frac{3}{2}}$ *i* $g(s) = s^{\frac{8}{9}}$*. Ponieważ wszystkie założenia Twierdzenia 11 są spełnione zatem rozwiązanie zerowe równania (48) jest stabilne w stałym czasie.*

**Przykład 32** *([A5] Example 15) Rozważmy następujące równanie*

$$x'(t) = -|\arcsin(x(t))|^{\frac{1}{3}} sign(x(t))\sqrt{1-x(t)^2}, \tag{49}$$

*gdzie* $\mathcal{X} = (-1,1)$*. Pokażemy, że rozwiązanie zerowe równania (49) jest stabilne w skończonym czasie. Zauważmy, że biorąc* $W(t,y) = \cos(y) - 1$*,* $y \in \mathcal{P} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *otrzymujemy dualne równanie* $y'(t) = -|y(t)|^{\frac{1}{3}} sign(y(t))$*, o którym wiemy, że jego rozwiązanie zerowe jest stabilne w skończonym czasie (por. [22]). Co więcej funkcja* $W$ *spełnia założenia Stwierdzenia 6, co oznacza, że rozwiązanie zerowe równania (49) jest również stabilne w skończonym czasie.*

Poniższy przykład pokazuje zastosowanie Twierdzenia 14.

**Przykład 33** *([A5] Example 20) Zobaczmy na równanie (49) z Przykładu 32. Wiemy, że rozwiązanie zerowe jest stabilne w skończonym czasie. Rozważmy dualne równanie* $y'(t) = -|y(t)|^{\frac{1}{3}} sign(y(t))$ *oraz funkcję* $W(t,y) = \cos(y) - 1$*,* $y \in \mathcal{P} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *spełniającą założenia Twierdzenia 14. Wtedy* $-W_y(t,y) = \sin(y)$ *oraz region atrakcji jest postaci:* $A = -W_y(t, \mathcal{P}) = (-1,1)$*.*

Kolejny przykład ilustruje zastosowanie Twierdzenia Weryfikacyjnego z sekcji 4.3.

**Przykład 34** *([A4] Example 4) Rozważmy następujące równanie*

$$x'(t) = -(1+t)|x|^{\frac{2}{3}} sign(x). \tag{50}$$

*Bazując na [22] wiemy, że rozwiązanie zerowe (50) jest stabilne w skończonym czasie. Zastosujmy Twierdzenie Weryfikacyjne 23 w celu pokazania, że jest również stabilne w stałym czasie. Niech* $X_0 = (0, +\infty)$ *oraz* $\mathbf{P} = (-5, -0.1)$*. Załóżmy (**HV**) z* $p = -1$*,* $V(t, x_0) = x_0^2$*,* $r(z) = 2|z|^{\frac{5}{6}} sign(z)$ *i* $k(t) = t + 30$*. Wtedy (37) jest spełnione z* $Z(t,p) = p|p|^{\frac{1}{3}}$*,* $y^0(t) = 1.1t + 10.5$ *oraz* $[t_0, F) = [10, 20)$*. Niech* $\bar{p}(t) = -0.1 + 0.625t^{\frac{1}{10}}$ *i* $\bar{x}_0 = 1$*. Wtedy (38) jest spełnione z* $y(t) = 1.1t - 1.5$*. Co więcej (39) jest również spełnione. Zatem, bazując na 23, czas* $\mathcal{S}(\bar{x}_0) = y^0(t) - y(t) = 12$ *jest stałym czasem osadzania dla równania (50).*

## 4.6 Podsumowanie

Przedstawione w ramach osiągnięcia habilitacyjnego nowe metody badania stabilności w skończonym i stałym czasie stanowią wkład w dziedzinę równań różniczkowych. Wszystkie zaprezentowane metody stanowią autorskie pomysły (początki dualnego podejścia do badania stabilności znajdują się w mojej pracy [21]). Wszystkie wyniki uzyskane w ramach cyklu (zarówno dla równań różniczkowych zwyczajnych jak i parabolicznych) są krokiem w budowę nowych narzędzi do badania stabilności w skończonym i stałym czasie.


[1] A. Bacciotti, L. Rosier, Lyapunov Functions and Stability in Control Theory, Springer, London (2005).

[2] J. Baker, P. D. Christofides, Finite-dimensional approximation and control of non-linear parabolic PDE systems, International Journal of Control 73 (2000) 439–456.

[3] S.P. Bhat, D.S. Bernstein, Finite-time stability of continuous autonomous systems, SIAM Journal of Control and Optimization 38 (2000) 751–766.

[4] N. Chafee, A Stability Analysis for a Semilinear Parabolic Partial Differential Equation, Journal of Differential Equations 15 (1974) 522–540.

[5] P. D. Christofides, P. Daoutidis, Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds, Journal of Mathematical Analysis and Applications 216 (1997) 398–420.

[6] J. Escher, B. Scarpellini, Stability properties of parabolic equations in unbounded domains, Archiv der Mathematik 71 (1998) 31–45.

[7] N. H. El-Farra, A. Armaou, P. D. Christofides, Analysis and control of parabolic PDE systems with input constraints, Automatica 39 (2003) 715–725.

[8] V.T. Haimo, Finite-time controllers, SIAM Journal of Control and Optimization 4 (1986) 760–770.

[9] J. Holloway, M.Krstic, Prescibed-Time Observers for Linear Systems in Observer Canonical Form, IEEE Transactions on Automatic Control 64 (9) (2019) 3905–3912.

[10] C. Hu, J. Yu, Z. Chen, H. Jiang, T. Huang, Fixed-time stability of dynamical systems and fixed-time synchronization of coupled discontinuous neural networks, Neural Networks 89(2017) 74–83.

[11] E. Jiménez-Rodríguez, A.J. Muñoz-Vázquez, J.D. Sánchez-Torres, M.Defoort, A.G. Loukianov, A Lyapunov-like Characterization of Predefined-Time Stability, Preprint.

[12] E. Jiménez-Rodríguez, A.J. Muñoz-Vázquez, J.D. Sánchez-Torres, A.G. Loukianov, A Note on Predefined-Time Stability, IFAC-PapersOnLine 51(13) (2018) 520–525.

[13] E. Jiménez-Rodríguez, J.D. Sánchez-Torres, A.G. Loukianov, On optimal Predefined-Time Stabilization, International Journal of Robust and Nonlinear Control 27 (17) (2017) 3620–3642.

[14] H. Li, C. Li, T. Huang, W. Zhang, Fixed-time stabilization of impulsive Cohen-Grossberg BAM neural networks, Neural Networks 98 (2018) 203–211.

[15] Y.Li, X. Yang, L. Shi, Finite-time synchronization for competitive neural networks with mixed delays and non-identical perturbations, Neurocomputing 185 (2016) 242–253

[16] Y. Liu, J.Huang, Y.Qin, X. Yang, Finite-time synchronization of complex-valued neural networks with finite-time distributed delays, Neurocomputing 416 (2020) 152–157.

[17] F. Lopez-Ramirez, D. Efimov, A. Polyakov, W. Perruquetti. On Necessary and Sufficient Conditions for Fixed-Time Stability of Continuous Autonomous Systems. Proc. 17th European Control Conference (ECC) (2018) 197–200.

[18] R. Matusik, Finite time stability of neural network, Ph.D. Thesis, 2016.

[19] R. Matusik, A. Nowakowski, S. Plaskacz, A. Rogowski, Finite-time stability for differential inclusion with application to neural network, SIAM Journal on Control and Optimization 58 (5) (2020) 2854–2870.

[20] E. Meyer, M. Peet, Stability Analysis of Parabolic Linear PDEs with Two Spatial Dimensions Using Lyapunov Method and SOS, 54th IEEE Conference on Decision and Control (2015) 1884–1890.

[21] A. Michalak, Dual approach to Lyapunov stability, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 85 (2013) 174–179.

[22] E. Moulay, W. Perruquetti, Finite-time stability conditions for non-autonomous continuous systems, International Journal of Control 81 (5) (2008) 797–803.

[23] E. Moulay, W. Perruquetti, Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems, Journal of Mathematical Analysis and Application 323 (2) (2006) 1430–1443.

[24] A.Nowakowski, The dual dynamic programming, Proceedings of the American Mathematical Society 116 (4) (1992) 1089–1096.

[25] A. Polyakov, Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of Linear Control Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Institute of Electrical and Electronics Engineers 57 (8) (2012) 2106–2110.

[26] A. Polyakov, L. Fridman, Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems, Journal of the Franklin Institute 351 (4) (2014) 1831–1865. Special Issue od 2010–2012 Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Algorithms.

[27] J.D. Sánchez-Torres, M. Defoort, A.J. Muñoz-Vázquez, Predefined-time stabilization of a class of nonholonomic systems, International Journal of Control 1(22) (2019) 1–8.

[28] J.D. Sánchez-Torres, D. Gómez-Gutiérrez, E. López, A.G. Loukianov, A class of Predefined-Time Stable Dynamical Systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information 35 (2018) i1–i29.

[29] J.D. Sánchez-Torres, E.N. Sanchez, A.G. Loukianov, Predefined-Time Stability of Dynamical Systems with Sliding Modes, American Control Conference (ACC) (2015) 5842–5846.

[30] X. Yang, D. Ho, J. Lu, Q. Song, Finite-time cluster synchronization of TS fuzzy complex networks with discontinuous subsystems and random coupling delays, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 23 (6) (2015) 2302–2316.

# 5 Informacje o aktywności naukowej na innych uczelniach

Poniżej przedstawiam informacje o mojej aktywności naukowej związanej z realizacją różnych zadań na innych uczelniach, zarówno polskich jak i zagranicznych.

**Uczelnie polskie:**

**2003-2007:** współpraca z prof. dr hab. n. med. Jarosławem Kasprzakiem z Kliniki Kardiologii Uniwersytetu Medycznego w Łodzi, owocem wspólnie prowadzonych badań było m.in. napisanie sztucznej sieci neuronowej przewidującej ryzyko zawału serca (co było tematem mojej pracy magisterskiej), a także dwa wspólne artykuły [K1], [K2].

[K1] "Artificial neural networks are a potential tool for estimating prognosis in coronary artery disease are standard algorithms sufficient?" (Jaroslaw D Kasprzak, Anna Michalak, Andrzej Nowakowski, Jaroslaw Drozdz, Maria Krzeminska-Pakula), JOURNAL OF THE AMERICAN COLLEGE OF CARDIOLOGY 49 (9) (2007)

[K2] "Artificial neural networks are a potential tool for estimating prognosis in coronary artery disease-preliminary experience" (JD Kasprzak, A Michalak, A Nowakowski), EUROPEAN HEART JOURNAL 27 (2006)

**2015:** udział w Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu. Tytuł wystąpienia: *Warunki optymalności dla alokacji Pareto w nieciągłym modelu ekonomicznym Gale'a.*

**2016:** udział w Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu. Tytuł wystąpienia: *Warunki wyższych rzędów dla punktów równowagi w nieciągłym modelu Gale'a.*

**2015-2016:** regularne uczestnictwo w comiesięcznych seminariach zatytułowanych „Matematyczne metody techniki" w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie.

**2017:** udział w warsztatach *Gry dynamiczne i informacja w grach* w Instytucie Matematyki Stosowanej i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Tytuły wystąpień: *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa* oraz *Optymalizacja względem dowolnych zbiorów preferencji.*

**2017:** udział w VII Konferencji Naukowej *Modelowanie i Prognozowanie Gospodarki Narodowej* na Wydziale Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego.Tytuł wystąpienia: *Warunki wyższych rzędów dla punktów równowagi w nieciągłym modelu Gale'a.*

**2017:** recenzent w ogólnopolskim czasopiśmie naukowym „Przegląd Statystyczny".

**2018:** wystąpienie na Seminarium Katedry Ekonomii Matematycznej na Uniwersytecie Ekonomicznym w Poznaniu. Tytuł odczytu: *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa. Stabilność w skończonym czasie. Zastosowania.*

**2019:** udział w Jubileuszowym Zjeździe Matematyków Polskich w stulecie PTM w Krakowie. Tytuł wystąpienia: *Atraktory i drugie dualne podejście do stabilności typu Lapunowa.*

**Uczelnie zagraniczne:**

**2012-obecnie:** współpraca z AMS Mathematical Reviews (MathSciNet) polegająca na tworzeniu skondensowanego opisu wyników różnych badań.

**2014:** udział w konferencji *SET OPTIMIZATION meets FINANCE* w Bruneck-Brunico (Włochy). Tytuł referatu: *Necessary and sufficient conditions for a Pareto optimal allocation in a discontinuous Gale economic model.*

**2015:** udział w konferencji *27. European Conference on Operational Research* w Glasgow (Szkocja). Tytuł referatu: *Higher-order conditions for equilibria in a discontinuous Gale economic model.*

**2016:** udział w konferencji *SET OPTIMIZATION for APPLICATIONS* w Wiedniu (Austria). Tytuł referatu: *Applications of set-valued optimization to economic equilibrium theoryl.*

**2016:** udział w konferencji *28. European Conference on Operational Research* w Poznaniu. Tytuł referatu: *Higher-order optimality conditions in set-valued optimization with respect to general preference mappings.*

**2017:** udział w konferencji *ICCAIRO: International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics and Optimization* w Pradze (Czechy). Tytuł referatów: *A characterization of Q-minimal solutions in set-valued optimization in terms of radial derivatives* oraz *Optimality conditions and duality results for a class of differentiable vector optimization problems with the multiple interval-valued objective function.*

**2018:** pisanie recenzji w międzynarodowym czasopiśmie naukowym *Nonlinear Dynamics.*

**2019:** pisanie recenzji w międzynarodowym czasopiśmie naukowym *Journal of the Franklin Institute.*

**2019:** staż naukowy w Katedrze Nauk Ścisłych i Inżynieryjnych Akademii Wojskowej w Amadora w Lizbonie (Portugalia) w okresie 24.06-1.07.2019. W czasie stażu aktywne uczestnictwo w seminariach badawczych dziedziny równań różniczkowych zwyczajnych.

**2019:** udział w konferencji *International Conference on Differential & Difference Equations and Applications* w Lizbonie (Portugalia). Tytuł referatu: *Attractors and second dual approach to Lyapunov stability.*

**Wspólne wyniki referowane były również przez prof. dr. hab. Marcina Studniarskiego na następujących konferencjach:**

**2019:** referat prezentowany w czasie konferencji *30th EUROPEAN CONFERENCE ON OPERATIONAL RESEARCH* w Dublinie (Irlandia). Tytuł referatu: *Vector-based robust efficiency in uncertain optimization.*

**2021:** referat prezentowany w czasie konferencji *EURO 2021, 31th European Conference on Operational Research (EURO XXXI)* w Atenach (Grecja) - uczestnictwo online. Tytuł referatu: *Comparison of two higher-order epiderivatives for set-valued maps.*

**2022:** referat prezentowany w czasie konferencji *International Online Conference „Current Trends in Abstract and Applied Analysis" held at Vasyl Stefanyk Precarpathian National University* w Ivano-Frankivsk (Ukraina). Tytuł referatu: *Optimization with respect to general Preference Mappings.*

**2022:** referat prezentowany w czasie konferencji *Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering & International Conference in HPC* w Cadiz (Hiszpania). Tytuł referatu: *Necessary optimality conditions in terms of the Minkowski difference of sets. Applications to uncertain optimization.*

# 6 Informacje o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

**Osiągnięcia dydaktyczne**

- **2011 - obecnie:** prowadzenie zajęć dydaktycznych (wykłady i ćwiczenia) na Wydziale Ekonomiczno -Socjologicznym UŁ. Koordynator przedmiotu „Matematyka" na kierunkach Ekonomia (studia stacjonarne i niestacjonarne), Finanse i Biznes międzynarodowy oraz Międzynarodowe Stosunki Gospodarcze. Opracowanie autorskiego skryptu i zestawu zadań do tego przedmiotu. Koordynator przedmiotu „Matematyka 1" na kierunku Ekonomia (studia stacjonarne i niestacjonarne). Prowadzenie przedmiotu „Algebra liniowa" dla kierunków Analityka Gospodarcza oraz Informatyka i Ekonometria. Koordynator przedmiotu „ Sieci neuronowe w prognozowaniu zjawisk społeczno-gospodarczych" na kierunku Ekonometria i Analityka Danych. Prowadzenie seminarium magisterskiego na kierunku Analityka Gospodarcza.
- **2013-2015:** opiekun naukowy grupy studentów kierunku zamawianego „Analityka Gospodarcza – studia z przyszłością" na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym.
- **2019:** promotor pracy magisterskiej pt. „Prognozowanie cen akcji z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych" autorstwa studenta kierunku Analityka Gospodarcza, Uniwersytet Łódzki.
- Udział w szkoleniach i kursach mających na celu doskonalenie umiejętności dydaktycznych:
  - **2007-2008:** kurs kwalifikacyjny pedagogiczny dla czynnych zawodowo nauczycieli.
  - **2019-2020:** kurs „ Academic English" w ramach programu „BUILD UP: BUDOWANIE KOMPETENCJI KADRY AKADEMICKIEJ".

**Osiągnięcia organizacyjne**

- **2012, 2016:** sekretarz Ogólnopolskiej Konferencji Dydaktycznej organizowanej przez Instytut Ekonometrii i Instytut Statystyki i Demografii Uniwersytetu Łódziego.
- **2013-2022:** budowa i administracja stroną internetową dla Katedry Ekonometrii, Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego Uniwersytetu Łódzkiego.
- **2014:** praca jako członek w Komisji Rekrutacyjnej na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym.
- **2018-2020:** przydzielanie obciążeń dydaktycznych w Katedrze Ekonometrii UŁ oraz koordynowanie prac nad obciążeniami na poziomie Instytutu Ekonometrii UŁ.

**Osiągnięcia popularyzujące naukę**

- **2012-obecnie:** wolontariat polegający na nauczaniu dzieci z rodzin zagrożonych społecznie matematyki i informatyki w Świetlicy Małych Dzieci prowadzonej przez Stowarzyszenie Małych Dzieci w Łodzi.
- **2014:** wykład z matematyki dla uczestników XIV Festiwalu Nauki, Techniki i Sztuki na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym na Uniwersytecie Łódzkim.
- **2016-2019:** udział w realizacji projektu Świetlice.Lodz realizowanego przez Stowarzyszenie Małych Dzieci w Łodzi poprzez podnoszenie kompetencji matematycznych i informatycznych dzieci z rodzin w trudnych sytuacjach życiowych i zagrożonych społecznie.
- **2020-2022:** realizacja zadania „Podnoszenie kompetencji matematycznych, naukowo-technicznych i informatycznych" w ramach projektu realizowanego przez Stowarzyszenie Małych Dzieci w Łodzi. Popularyzowanie nauki i pomoc dzieciom z rodzin w trudnych sytuacjach i zagrożonych społecznie jest kluczowym działaniem mającym na celu zrównoważony rozwój społeczny.

## 7 Inne informacje dotyczące kariery zawodowej

**2022-2025**: wykonawca merytoryczny w projekcie IDUB dla młodych naukowców pt. "Estymacja skłonności do ryzyka na podstawie polskiej edycji teleturnieju Milionerzy" (kierownik projektu: dr Paulina Malaczewska). Praca polega na wykorzystaniu modeli sieci neuronowych zawierających algorytmy rozpoznawania twarzy VGG do oszacowania wieku graczy.

**2023:** nagroda w ramach konkursu IDUB z programu "Inicjatywa doskonałości – Uczelnia Badawcza" za publikację „New approach to fixed-time stability of a nonlinear system"(A. Michalak, A. Nowakowski) Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 48 (2023).

Anna Michalak