dr Rafał Kamocki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Autoreferat

Spis treści

RK

1 Imię i nazwisko

Rafał Kamocki

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki z wyróżnieniem**, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, 13 czerwca 2012 roku.
  Tytuł rozprawy: *"Pewne ułamkowe układy sterowania zwyczajne i o parametrach rozłożonych i ich optymalizacja"*.
  Promotor: prof. dr hab. Dariusz Idczak.

- **Dyplom magistra matematyki**, Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, czerwiec 2004 roku.
  Tytuł pracy magisterskiej: *"O pewnych zagadnieniach brzegowych w przestrzeniach Sobolewa"*.
  Promotor: prof. dr hab. Dariusz Idczak.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- **2012 - do chwili obecnej:** adiunkt w Katedrze Równań Różniczkowych i Informatyki, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

- **2005 - 2012:** asystent w Katedrze Równań Różniczkowych i Informatyki, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

- **2012 - 2017:** starszy wykładowca w Instytucie Nauk Ekonomicznych i Informatyki, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Płocku.

- **2004 - 2005:** nauczyciel matematyki w Gimnazjum im. S. Małachowskiego w Moszczenicy.

4 Wskazanie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

Omówienie to winno dotyczyć merytorycznego ujęcia przedmiotowych osiągnieć, jak i w sposób precyzyjny określać indywidualny wkład w ich powstanie, w przypadku, gdy dane osiągnięcie jest dziełem współautorskim, z uwzględnieniem możliwości wskazywania dorobku z okresu całej kariery zawodowej.

Głównym osiągnięciem naukowym jest jednolity cykl publikacji zatytułowany

RK

OPTYMALIZACJA WYBRANYCH UKŁADÓW STEROWANIA Z OPERATORAMI NIECAŁKOWITEGO RZĘDU,

w którego skład wchodzą następujące artykuły:

[H1] D. Idczak, R. Kamocki, M. Majewski, S. Walczak, *Existence of optimal solutions to Lagrange problems for Roesser type systems of the first and fractional orders*, Applied Mathematics and Computations 266, (2015), 809–819; $\mathbf{IF}_{2015} : 1,345$.

[H2] R. Kamocki, D. Idczak, *Existence of optimal solutions to Lagrange problem for a nonlinear control system with Riemann-Liouville derivative*, Mathematical Control and Related Fields 7(3), (2017), 449–464; $\mathbf{IF}_{2017} : 0,631$.

[H3^a] R. Kamocki, *A nonlinear control system with a Hilfer derivative and its optimization*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 24(2), (2019), 279–296; $\mathbf{IF}_{2019} : 2,78$.

[H3^b] R. Almeida, R. Kamocki, A.B. Malinowska, T. Odzijewicz, *Optimal leader-following consensus of fractional opinion formation models*, Journal of Computational and Applied Mathematics 381 (2021) 112996; $\mathbf{IF}_{2021} : 2,872$.

[H4] R. Almeida, R. Kamocki, A.B. Malinowska, T. Odzijewicz, *On the necessary optimality conditions for the fractional Cucker–Smale optimal control problem*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 96, (2021) 105678; $\mathbf{IF}_{2021} : 4,186$.

[H5] R. Kamocki, *Optimal control of a nonlinear PDE governed by fractional Laplacian*, Applied Mathematics and Optimization 84(suppl. 2), (2021), 1505–1519; $\mathbf{IF}_{2021} : 2,194$.

Powyższe osiągnięcie uzupełnia uzyskany dorobek naukowy w postaci 23 publikacji (22 po uzyskaniu stopnia doktora) w czasopismach z bazy JCR, jedna praca zamieszczona jako rozdział monografii oraz 8 prac zamieszczonych w materiałach konferencyjnych (zob. wykaz osiągnięć). Szczególną uwagę chciałbym zwrócić na prace:

[P1] R. Kamocki, *A new representation formula for the Hilfer fractional derivative and its application*, Journal of Computational and Applied Mathematics 38, (2016), 39–45; $\mathbf{IF}_{2016} : 1,357$,

[P2] D. Idczak, R. Kamocki, M. Majewski, *Nonlinear continuous Fornasini–Marchesini model of fractional order with nonzero initial conditions*, J. Integral Equations Applications 32(1), (2020), 19–34; $\mathbf{IF}_{2020} : 1,204$.

4.1 Wprowadzenie

Rozwój rachunku różniczkowo–całkowego niecałkowitego rzędu (fractional calculus), będącego uogólnieniem klasycznego rachunku różniczkowo–całkowego, został zapoczątkowany w XVII wieku, kiedy to G. W. Leibniz oraz L. Euler opublikowali pierwsze prace z tej tematyki. Kolejne artykuły powstały w XIX wieku. Warto tu wymienić takich autorów jak: N. H. Abel, P. S. Laplace, J. B. J. Fourier, B. Riemann, J. Liouville, J. Hadamard, czy A. V. Letnikov. Potem, dopiero w drugiej połowie XX wieku nastąpiło odrodzenie rachunku niecałkowitego rzędu. Z tego okresu pochodzą monografie: [49, 52, 59], a także

RK

znamienne stwierdzenie prof. K. Nishimoto: "*Fractional Calculus is Calculus in the 21st Century*" (zob. [51]). I rzeczywiście, w ostatnich kilkunastu latach jest on intensywnie rozwijany przez wielu badaczy z różnych dziedzin ze względu na jego szerokie zastosowania. Okazuje się, że wiele zjawisk z różnych obszarów nauki może być lepiej opisanych przy pomocy równań całkowych, różniczkowych, różniczkowo-całkowych oraz różnicowych zawierających operatory różniczkowe lub całkowe niecałkowitego rzędu. Równania takie, czy też ogólniej - układy takich równań bardzo dobrze modelują m.in. materiały lepkosprężyste (zob. [6, 41, 48]), anomalną dyfuzję (zob. [45, 46]), czy superkondensator elektryczny (zob. [20, 66]). Ponadto, z uwagi na nielokalność operatorów niecałkowitego rzędu, wykorzystywane są one często w układach, w których uwzględniana jest pamięć (zob. [2, 55, 61, 65]).

Układy sterowania są zazwyczaj układami równań funkcyjnych, które, oprócz funkcji niewiadomej (zwanej trajektorią układu), zawierają dodatkowy parametr funkcyjny zwany sterowaniem. Układy takie, w zależności od typu równań, rozważane są z warunkami lokalnymi (początkowymi, brzegowymi) lub globalnymi. W praktyce układy sterowania opisują procesy (np. fizyczne) zależne od parametru sterującego. których celem jest przeprowadzenie układu ze stanu początkowego do stanu pożądanego pod wpływem działania sterowania. Często wymaga się, aby dodatkowo owe sterowanie wraz z odpowiadającą mu trajektorią układu sterowania (takę parę trajektoria–sterowanie nazywamy dopuszczalną) optymalizowało pewien funkcjonał, zwany *funkcjonałem kosztu*[1]. Otrzymujemy wtedy tzw. zadanie sterowania optymalnego, którego rozwiązaniem jest para dopuszczalna, która minimalizuje bądź maksymalizuje funkcjonał kosztu (w dalszej części będziemy rozważać minimalizacyjne zadania sterowania optymalnego). Składniki tej pary nazywane są odpowiednio: trajektorią optymalną i sterowaniem optymalnym. Fundamentalnymi rezultatami w teorii sterowania optymalnego są tzw. zasady maksimum, formułujące warunki konieczne dla rozwiązań optymalnych. W przypadku klasycznego zadania sterowania optymalnego, opisanego przy pomocy równania różniczkowego I rzędu, po raz pierwszy wyprowadził taką zasadę Pontryagin wraz ze swoimi uczniami pod koniec lat pięćdziesiątych ubiegłego stulecia (zob. [56])[2]. Za pierwszą pracę dotyczącą problemów sterowania optymalnego dla układów opisanych przez równania niecałkowitego rzędu (*ang. fractional optimal control problems* - w skrócie: FOCPs), w kontekście warunków koniecznych, należy uznać pracę [1]. Badany był w niej układ sterowania z pochodną w sensie Riemanna–Liouville'a oraz całkowym funkcjonałem kosztu (zadanie Lagrange'a). Nieograniczoność zbioru wartości sterowań oraz założenia gładkości funkcji występujących w badanym zadaniu pozwoliły zastosować techniki wariacyjne do wyprowadzenia tzw. słabej zasady maksimum (w której punktowy warunek maksimum funkcji Hamiltona jest zastąpiony przez słabszy warunek znikania gradientu Hamiltonianu). Wyniki tego typu dla FOCPs z pochodną w sensie Caputo zostały uzyskane w pracach [21, 22, 32]. Silną wersję zasady maksimum uzyskałem w swojej rozprawie doktorskiej dla zadania Lagrange'a z pochodną w sensie Riemanna-Liouville'a (wyniki zostały opublikowane w pracy [35]). Warunki konieczne optymalności zostały tam wyprowadzone w oparciu o gładko-wypukłą zasadę ekstremum (zob. [26]). Oczywiście warunki konieczne na ogół nie gwarantują istnienia rozwiązań optymalnych. Dlatego, w przedłożonym cyklu publikacji, w którym rozważane były FOCPs z funkcjonałami całkowymi oraz układami sterowania opisanymi przez różnego rodzaju operatory różniczkowe niecałkowitego rzędu, celem było zbadanie tych problemów zarówno w kon-

[1] Inne określenia funkcjonału kosztu to: funkcja celu, wskaźnik jakości, czy kryterium optymalności.

[2] W literaturze funkcjonuje określenie *zasada maksimum Pontryagina* (Pontryagin maximum principle - w skrócie PMP).

ℓK

tekście zagadnienia istnienia rozwiązań optymalnych jak i warunków koniecznych optymalności. W odróżnieniu od problemów badanych w [1, 21, 22, 32], na zbiór wartości sterowań nakładane były pewne ograniczenia, co wykluczało stosowanie technik wariacyjnych. Warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań optymalnych są jednymi z głównych nurtów teorii sterowania optymalnego. Istnieje wiele monografii dotyczących tej tematyki. Warto tutaj wymienić książki [7, 11, 12, 43, 44, 47, 60, 63].

4.2 Rachunek niecałkowitego rzędu

4.2.1 Całki i pochodne niecałkowitego rzędu

W tej części autoreferatu podam niezbędne pojęcia i fakty z rachunku niecałkowitego rzędu[3], które ułatwią czytanie dalszej części autoreferatu (więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w monografiach [39, 49, 59]). Omówione zostaną tu również prace [**P1**] oraz [**P2**].

Ustalmy przedział ograniczony $[a,b] \subset \mathbb{R}$. W autoreferacie nazwy funkcji oznaczane są małymi literami, np. u, f. Tam gdzie jest to konieczne, stosowany jest także zapis $u(\cdot)$, $f(\cdot)$.

Definicja 1 *Niech $\alpha > 0$ oraz $f \in L^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Funkcję postaci*

$$\left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t \in [a,b] \ p.w. \tag{1}$$

nazywamy lewostronną funkcją pierwotną (całką) rzędu α, w sensie Riemanna-Liouville'a $\Big($$\Gamma$ oznacza funkcję Gamma, która jest określona następująco: $\Gamma(\alpha) := \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$, $\alpha > 0\Big)$.
Dodatkowo przyjmujemy, że $I^0_{a+}f = f$.

Uwaga 1 *W elementarny sposób (wykorzystując twierdzenie Fubiniego) można pokazać, że funkcja*

$$[a,b] \ni t \to \left(I^{\alpha}_{a+}f\right)(t) \in \mathbb{R}^n$$

jest określona prawie wszędzie na $[a,b]$, sumowalna na $[a,b]$ i w konsekwencji prawie wszędzie skończona na $[a,b]$. Łatwo zauważyć, że gdy $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, to całka (1) uogólnia znany wzór na n-tą funkcję pierwotną, gdyż mamy wtedy

$$\left(I^{n}_{a+}f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau = \int\limits_a^t d\tau_1 \int\limits_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int\limits_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n.$$

Definicja 2 *Mówimy, że funkcja $f \in L^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ posiada lewostronną pochodną ułamkową $D^{\alpha}_{a+}f$ w sensie Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0,1)$, jeśli $I^{1-\alpha}_{a+}f \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ $\Big($dokładniej, istnieje absolutnie ciagła funkcja na $[a,b]$ równa p.w. na $[a,b]$ funkcji $I^{1-\alpha}_{a+}f\Big)$ i przyjmujemy*

$$\left(D^{\alpha}_{a+}f\right)(t) := \frac{d}{dt}\left(I^{1-\alpha}_{a+}f\right)(t), \quad t \in [a,b] \ p.w. \tag{2}$$

[3] W dalszej części, z uwagi na angielskie określenie *fractional calculus*, będę używał wymiennie określenia niecałkowity/ułamkowy, np. pochodna niecałkowitego rzędu/pochodna ułamkowa. Użycie tylko określenia *ułamkowy* wskazywałoby na *wymierny*, a jak wiadomo, można rozważać także rzędy niewymierne, a nawet zespolone.

DK

Zbiór funkcji f posiadających pochodną $D^\alpha_{a+}f$ oznaczać będziemy symbolem AC^α_{a+}[4].

Warto zwrócić uwagę, że powyższa pochodna zdefiniowana jest dla funkcji należących do klasy funkcji sumowalnych. W konsekwencji, w równaniach różniczkowych zawierających operator różniczkowy w sensie Riemanna-Liouville'a, zamiast klasycznego warunku początkowego $x(a) = x_0$, rozważa się warunek[5]

$$(I^{1-\alpha}_{a+}x)(a) = x_0, \tag{3}$$

gdzie x jest niewiadomą funkcją występującą w równaniu, a x_0 - stanem początkowym (zob. [39, Rozdział 3]). W przypadku ułamkowych zagadnień z klasycznym warunkiem początkowym, często rozważa się. zaproponowaną przez M. Caputo w pracy [16], modyfikację Definicji 2, polegającą na zamianie miejscami operacji klasycznego różniczkowania i całkowania rzędu $1-\alpha$ we wzorze (2). W ten sposób powstała lewostronna pochodna rzędu $\alpha \in (0,1)$ w sensie Caputo, określona następująco:

$$\left({}^C\mathcal{D}^\alpha_{a+}f\right)(t) := \left(I^{1-\alpha}_{a+}f'\right)(t), \quad t \in [a,b] \ p.w. \tag{4}$$

o ile $f' \in L^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. W powyższej definicji naturalnym jest zakładać, że f jest absolutnie ciągła na $[a,b]$, co jest jednak dość restrykcyjnym warunkiem. Okazuje się, że jeśli założymy tylko ciągłość funkcji f na $[a,b]$, to można rozważać zmodyfikowaną pochodną rzędu α w sensie Riemanna-Liouville'a postaci:

$$({}^C D^\alpha_{a+}f)(t) := D^\alpha_{a+}(f(\cdot) - f(a))(t), \quad t \in [a,b] \ p.w., \tag{5}$$

pod warunkiem, że pochodna Riemanna-Liouville'a prawej strony (5) istnieje. W przypadku, gdy $f \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ formuły (4) i (5) są równoważne, dlatego, zgodnie z nazewnictwem przyjętym w monografii [39], pochodną określoną powyżej również nazywać będziemy *lewostronną pochodną rzędu α w sensie Caputo*[6].

Pewne uogólnienie pochodnych w sensie Riemanna-Liouville'a oraz Caputo zaproponował R. Hilfer w monografii [25].

Definicja 3 *Niech $\beta \in [0,1]$ oraz $f \in L^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Mówimy, że funkcja f posiada lewostronną pochodną w sensie Hilfera rzędu $\alpha \in (0,1)$ i typu β, jeśli funkcja $I^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{a+}f$ jest absolutnie ciągła na $[a,b]$ (z dokładnością do reprezentanta równego p.w. na $[a,b]$) i wówczas przyjmujemy*

$$(D^{\alpha,\beta}_{a+}f)(t) := \left(I^{\beta(1-\alpha)}_{a+}\frac{d}{dt}I^{(1-\alpha)(1-\beta)}_{a+}f\right)(t), \quad t \in [a,b] \ p.w. \tag{6}$$

[4] W pracy [10] podana została następująca charakteryzacja funkcji posiadających lewostronną pochodną w sensie Riemanna-Liouville'a: $f \in AC^\alpha_{a+}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $c \in \mathbb{R}^n$ oraz funkcja $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ takie, że

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{c}{(t-a)^{1-\alpha}} + (I^\alpha_{a+}\varphi)(t), \quad t \in [a,b] \ p.w.$$

W takim przypadku, $(I^{1-\alpha}_{a+}f)(a) = c$ oraz $(D^\alpha_{a+}f)(t) = \varphi(t)$, $t \in [a,b]$ $p.w.$

[5] W pracy [50] rozważany jest liniowy układ sterowania z warunkiem (1), który jest interpretowany jako pamięć początkowa układu. Pewne interpretacje fizyczne tego warunku zostały podane w pracy [24].

[6] Przy omawianiu prac zgłoszonych do osiągnięcia, mówiąc o pochodnej Caputo, będę miał na myśli pochodną postaci (5).

ek

Uwaga 2 *Zauważmy, że*

- *gdy* $\beta = 0$, *to*
$$D^{\alpha,\beta}_{a+}f = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{a+}f = D^{\alpha}_{a+}f;$$
- *gdy* $\beta = 1$, *to*
$$D^{\alpha,\beta}_{a+}f = I^{1-\alpha}_{a+}f' = {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = {}^{C}D^{\alpha}_{a+}f.$$

Ponadto, przyjmując $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, *pochodną (6) można wyrazić następująco:*

$$(D^{\alpha,\beta}_{a+}f)(t) = \left(I^{\gamma-\alpha}_{a+}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}_{a+}f\right)(t) = \left(I^{\gamma-\alpha}_{a+}D^{\gamma}_{a+}f\right)(t), \quad t \in [a,b] \text{ a.e.},$$

a zatem operator $D^{\alpha,\beta}_{a+}$ *jest określony dla funkcji posiadających lewostronną pochodną w sensie Riemanna-Liouville'a rzędu* γ.

Uwaga 3 *Warto zwrócić uwagę na nielokalny charakter powyższych definicji pochodnych niecałkowitego rzędu. Oznacza to, że wartość pochodnej funkcji w punkcie* t *zależy nie tylko od przebiegu różniczkowanej funkcji w dowolnie małym otoczeniu tego punktu (jak to jest w przypadku pochodnych rzędu naturalnego), lecz w całym przedziale* $[a,t]$ *(innymi słowy, konieczne jest "pamiętanie całej historii" funkcji różniczkowanej). Można zatem powiedzieć, że zmiana rzędu różniczkowania z naturalnego na ułamkowy wprowadza do modelu matematycznego efekt pamięci.*

W podobny sposób można zdefiniować prawostronną całkę i pochodne niecałkowitego rzędu. W razie potrzeby, odpowiednie definicje podane zostaną we właściwej części autoreferatu.

Z uwagi na "nieco skomplikowaną" postać (6) lewostronnej pochodnej Hilfera (składane są ze sobą operatory całkowe i różniczkowe różnych rzędów), badanie problemów, w których występuje owa pochodna może być utrudnione. Pewnym wyjściem z tej sytuacji okazało się rozważenie, zaproponowanej przeze mnie w pracy [**P1**], nowej formuły na lewostronną pochodną w sensie Hilfera postaci:

$$(D^{\alpha,\beta}_{a+}z)(t) = D^{\alpha}_{a+}\left(z(\cdot) - \frac{(I^{1-\gamma}_{a+}z)(a)}{\Gamma(\gamma)(\cdot - a)^{1-\gamma}}\right)(t), \quad t \in [a,b] \text{ a.e.}, \tag{7}$$

gdzie $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$. Widzimy, że można ją wyrazić przy pomocy lewostronnej pochodnej w sensie Riemanna-Liouville'a, i co bardzo istotne, **tego samego rzędu** α. W wymienionej wyżej pracy zostało udowodnione (zob. [**P1** Theorem 10]), że pochodna (7) jest równoważna pochodnej określonej wzorem (6) w klasie funkcji z AC^{γ}_{a+}. Dowód tego faktu jest elementarny i polega głównie na wykorzystaniu własności półgrupy operatora całkowego Riemanna-Liouville'a oraz własności składania operatorów różniczkowych i całkowych. Niemniej otrzymany wynik uważam za bardzo wartościowy, gdyż uzyskany nowy wzór na pochodną w sensie Hilfera przynosi wiele korzyści. Chciałbym zwrócić uwagę na trzy z nich. Po pierwsze, rozwiazywanie wielu problemów, w których występuje nowy operator różniczkowy jest ułatwione, gdyż problemy takie można sprowadzić do rozwiązywania problemów opisanych za pomocą pochodnej Riemanna-Liouville'a (zob. zagadnienie początkowe [**P1** (12)] oraz wyniki z pracy [**H3**[a]], które zostaną omówione w

RK

dalszej części). Wówczas, wykorzystując rezultaty dla problemów zawierających pochodną Riemanna-Liouville'a, natychmiast uzyskiwane są analogiczne wyniki dla problemów z pochodną Hilfera. Po drugie, wiele własności, w których występuje pochodna w sensie Hilfera dana wzorem (7) można bardzo łatwo udowodnić wykorzystując analogiczne własności dla pochodnej Riemanna-Liouville'a (zob. [**P1** Lemma 16 i Theorem 17]). Po trzecie (zob. [**P1** Remark 14]), wyznaczanie pochodnej funkcji w sensie Hilfera przy użyciu wzoru (7) jest łatwiejsze (w porównaniu z wykorzystaniem wzoru oryginalnego). Ponadto, wzór (7) ułatwia obliczanie pochodnej Hilfera w sposób numeryczny (składamy mniej operatorów, przez co generowany jest mniejszy błąd).

Uwaga 4 *W literaturze rozważa się również inne typy pochodnych niecałkowitego rzędu (należy tu wspomnieć choćby o pochodnych w sensie Hadamarda, Weyla, Riesza, czy Grünwalda-Letnikova). Nie będę jednak ich omawiać dokładniej, gdyż nie występują one w pracach zgłoszonych do osiągnięcia.*

Niech teraz $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ będzie ustalonym ograniczonym prostokątem.

Definicja 4 *Lewostronne całki cząstkowe rzędu $\alpha > 0$ względem zmiennej odpowiednio x i y z funkcji $\varphi \in L^1(P, \mathbb{R}^n)$ określamy następująco:*

$$I^{\alpha}_{a+,x}\varphi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(s,y)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds, \quad (x,y) \in P \text{ p.w.}$$

$$I^{\alpha}_{c+,y}\varphi(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_c^y \frac{\varphi(x,t)}{(y-t)^{1-\alpha}}dt, \quad (x,y) \in P \text{ p.w.}$$

Definicja 5 *Funkcję $z \in L^1(P, \mathbb{R}^n)$ posiadającą reprezentację całkową*

$$z(x,y) = \mu(y) + \int_a^x l(s,y)ds$$

dla p.w. $y \in [c,d]$ i wszystkich $x \in [a,b]$, gdzie $\mu \in L^1([c,d], \mathbb{R}^n)$, $l \in L^1(P, \mathbb{R}^n)$, nazywamy absolutnie ciągłą względem zmiennej x. Zbiór takich funkcji oznaczamy przez $AC_x(P, \mathbb{R}^n)$. Dowodzi się, że

$$\mu(y) = z(a,y), \quad y \in [c,d] \text{ p.w.}, \qquad l(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y), \quad (x,y) \in P \text{ p.w.}$$

Podobnie określamy zbiór funkcji absolutnie ciągłych względem zmiennej y:

$$AC_y(P, \mathbb{R}^n) := \left\{ z : P \to \mathbb{R}^n : \ z(x,y) = \nu(x) + \int_c^y h(x,t)dt, \ x \in [a,b] \text{ p.w.}, \ y \in [c,d] \right\},$$

przy czym $\nu \in L^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $h \in L^1(P, \mathbb{R}^n)$. W tym przypadku można pokazać, że

$$\nu(x) = z(x,c), \quad x \in [a,b] \text{ p.w.}, \qquad h(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y), \quad (x,y) \in P \text{ p.w.}$$

Definicja 6 *Mówimy, że funkcja $z \in L^1(P, \mathbb{R}^n)$ posiada lewostronną pochodną cząstkową w sensie Riemanna-Liouville'a rzędu $\alpha \in (0,1)$ $D^{\alpha}_{a+,x}z$ ($D^{\alpha}_{c+,y}z$) względem zmiennej x (y), jeśli $I^{1-\alpha}_{a+,x}z \in AC_x(P, \mathbb{R}^n)$ ($I^{1-\alpha}_{c+,y}z \in AC_y(P, \mathbb{R}^n)$) (z dokładnością do reprezentanta równego p.w. na P). W takim przypadku*

$$D^{\alpha}_{a+,x}z(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(I^{1-\alpha}_{a+,x}z)(x,y), \ (x,y) \in P \text{ p.w.}$$

$$(D^{\alpha}_{c+,y}z(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(I^{1-\alpha}_{c+,y}z)(x,y), \ (x,y) \in P \text{ p.w.}).$$

RK

W pracy [**P2**] rozważaliśmy prostokąt P, przy czym $a = c = 0$ (w dalszej części tego rozdziału oznaczymy go symbolem P_0).

Definicja 7 *Mieszaną całkę w sensie Riemanna-Liouville'a rzędu α, $\beta > 0$ z funkcji $\varphi \in L^1(P_0, \mathbb{R}^n)$ definiujemy następująco:*

$$I^{\alpha,\beta}_{x,y} z(x,y) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint_{(0,x)\times(0,y)} \frac{z(s,t)}{(x-s)^{1-\alpha}(y-t)^{1-\beta}} d(s,t), \ (x,y) \in P_0 \ p.w.$$

Wykorzystując twierdzenie Fubiniego można pokazać, że $I^{\alpha,\beta}_{x,y}\varphi \in L^1(P_0, \mathbb{R}^n)$ oraz[7]

$$I^{\alpha,\beta}_{x,y} z(x,y) = I^{\alpha}_{x} I^{\beta}_{y} z(x,y) = I^{\beta}_{y} I^{\alpha}_{x} z(x,y), \quad (x,y) \in P_0 \ p.w. \tag{8}$$

Definicja 8 *Mówimy, że funkcja $z \in L^1(P_0, \mathbb{R}^n)$ posiada mieszaną pochodną cząstkową w sensie Riemanna-Liouville'a $D^{\alpha,\beta}_{x,y} z$ rzędu $(\alpha, \beta) \in (0,1) \times (0,1)$, jeśli $I^{1-\alpha,1-\beta}_{x,y} z \in AC_{x,y}$[8]. W takim przypadku*

$$D^{\alpha,\beta}_{x,y} z(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(I^{1-\alpha,1-\beta}_{x,y} z \right)(x,y), \ (x,y) \in P_0 \ p.w.$$

Zbiór funkcji posiadających mieszaną pochodną w sensie Riemanna-Liouville'a rzędu (α, β) oznaczać będziemy symbolem $AC^{\alpha,\beta}_{x,y}$.
W pierwszej części pracy [**P2**] udowodniłem następujące twierdzenie o całkowej reprezentacji funkcji posiadających mieszaną pochodną cząstkową w sensie Riemanna-Liouville'a (zob. [**P2** Theorem 15])

Twierdzenie 1 *Niech $z \in L^1(P_0, \mathbb{R}^n)$. Wówczas z posiada mieszną pochodną cząstkową w sensie Riemanna-Liouville'a $D^{\alpha,\beta}_{x,y} z$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\varphi \in L^1(P_0, \mathbb{R}^n)$, $\mu \in L^1([0,b], \mathbb{R}^n)$, $\nu \in L^1([0,d], \mathbb{R}^n)$ oraz stała $e \in \mathbb{R}^n$ takie, że*

$$\begin{aligned} z(x,y) = I^{\alpha,\beta}_{x,y}\varphi(x,y) &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} I^{\beta}_{0+}\nu(y) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{y^{1-\beta}} I^{\alpha}_{0+}\mu(x) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{e}{x^{1-\alpha} y^{1-\beta}} \end{aligned} \tag{9}$$

for $(x,y) \in P_0$ p.w. W takim przypadku

$$D^{\alpha,\beta}_{x,y} z(x,y) = \varphi(x,y), \ (x,y) \in P_0 \ p.w.,$$

$$D^{\alpha}_{x}(I^{1-\beta}_{y} z)(x,0) = \mu(x), \ x \in [0,b] \ p.w.,$$

$$D^{\beta}_{y}(I^{1-\alpha}_{x} z)(0,y) = \nu(y), \ y \in [0,d] \ p.w.,$$

$$I^{1-\alpha,1-\beta}_{x,y} z(0,0) = e.$$

[7] W pracy [**P2**], dla skrócenia zapisu stosujemy symbole I^{α}_{x}, I^{β}_{y} zamiast $I^{\alpha}_{0+,x}$, $I^{\beta}_{0+,y}$, odpowiednio.

[8] Symbolem $AC_{x,y}$ oznaczamy zbiór funkcji określonych na P_0 absolutnie ciągłych względem obu zmiennych (zob. [64], [**P2** Definition 12]).

RK

W dowodzie tego faktu wykorzystałem m.in. równości (8), własność półgrupy dla operatorów całkowych niecałkowitego rzędu oraz twierdzenie o całkowej reprezentacji funkcji z przestrzeni $AC_{x,y}$. Chciałbym podkreślić, że uzyskany wynik odegrał kluczową rolę w scharakteryzowaniu funkcji dwóch zmiennych posiadających mieszaną pochodną niecałkowitego rzędu w sensie Caputo (praca zawierająca ową charakteryzację zostanie niebawem wysłana do publikacji). Ponadto, ostatnie badania w naszej grupie badawczej pokazują, że można zdefiniować, przy pomocy funkcji próbnych, słabą pochodną mieszaną rzędu ułamkowgo i następnie wykorzystać reprezentację (9) do pokazania, że istnienie mieszanej pochodnej w sensie Riemanna-Liouville'a implikuje istnienie słabej pochodnej, która jest tożsama z pochodną Riemanna-Liouville'a. Będzie to punktem wyjścia do zdefiniowania w przyszłości ułamkowych przestrzeni typu Sobolewa funkcji dwóch zmiennych.
W drugiej części pracy badany jest problem Fornasiniego-Marchesiniego z pochodną Riemanna-Liouville'a w kontekście istnienia i jednoznaczności rozwiązania, jak również ciągłej zależności rozwiązań od sterowań. Głównym narzędziem wykorzystanym w badaniach jest twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

4.2.2 Ułamkowy operator Dirichleta-Laplace'a

W pracy [**H5**] rozważany był ułamkowy operator Laplace'a rzędu $\beta > 0$ (w sensie słabym) z jednorodnymi warunkami brzegowymi typu Dirichleta (będziemy go nazywać słabym ułamkowym operatorem Dirichleta-Laplace'a). Definicja tego operatora ma charakter spektralny[9]; dokładniej, pochodzi z rachunku operatorowego w sensie Stone–von Neumanna i jest oparta na twierdzeniu spektralnym dla operatora samosprzężonego w przestrzeni Hilberta (zob. [27]). Ułamkowe operatory Laplace'a mają szerokie zastosowanie w różnych obszarach, m.in. probabilistyce (zob. [4, 18]), hydrodynamice (zob. [13, 14, 62]), elektrostatyce (zob. [8]), czy mechanice (zob. [8, 9]).

Definicja 9 *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ będzie otwartym i ograniczonym zbiorem. Ułamkowy operator Dirichleta–Laplace'a rzędu $\beta > 0$ (w sensie słabym) $[(-\Delta)_\omega]^\beta : \mathrm{dom}([(-\Delta)_\omega]^\beta) \subset \mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$ określamy w następujący sposób:*

$$\left([(-\Delta)_\omega]^\beta w\right)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j)^\beta a_j e_j(x),$$

przy czym

$$\mathrm{dom}\left([(-\Delta)_\omega]^\beta\right) = \Bigg\{ w \in L^2(\Omega,\mathbb{R});\quad \sum_{j=1}^{\infty}((\lambda_j)^\beta)^2 a_j^2 < \infty,$$
$$\textit{gdzie } a_j \textit{ jest taki, że } w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j(x) \Bigg\},$$

gdzie (λ_j, e_j), $j \in \mathbb{N}$, jest układem wartości własnych λ_j i, odpowiadających im, wektorów własnych e_j słabego operatora Dirichleta–Laplace'a $(-\Delta)_\omega$[10].

[9] W literaturze istnieje wiele definicji ułamkowych operatorów Laplace'a. Zestawienie niektórych z nich oraz ich porównanie zostało zaprezentowane w pracy [42].

[10] [5] Mówimy, że istnieje słaby (minus) Dirichlet–Laplasjan funkcji $w : \Omega \to \mathbb{R}$, jeśli $w \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$ oraz

RK

4.3 Istnienie rozwiązań optymalnych

Omawianie prac wchodzących w skład głównego osiągnięcia rozpocznę od artykułów dotyczących istnienia rozwiązań optymalnych dla zadań typu Lagrange'a. W zależności od poczynionych założeń stosowane były różne podejścia, które teraz krótko zaprezentuję.

W pracy [**H1**] rozważany był następujący problem:

$$J(u) = \int_P f^0(x,y,z_u^1(x,y),z_u^2(x,y),u(x,y))dxdy \to \min, \tag{10}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \begin{cases} D^\alpha_{a+,x}z^1 = f^1(x,y,z^1,z^2,u) \\ D^\beta_{c+,y}z^2 = f^2(x,y,z^1,z^2,u) \end{cases} & (x,y)\in P \ p.w., \\ \begin{cases} I^{1-\alpha}_{a+,x}z^1(a,y) = 0, & y\in[c,d] \ p.w. \\ I^{1-\beta}_{c+,y}z^2(x,c) = 0, & x\in[a,b] \ p.w., \end{cases} \end{cases} \tag{11}$$

gdzie $(\alpha,\beta)\in(0,1]\times(0,1]$, $f^0 : P\times\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $f^i : P\times\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,2$, (z_u^1, z_u^2) jest jednoznacznym rozwiązaniem układu (11) (nazywanego ułamkowym układem typu Roessera[11]), odpowiadającym ustalonemu sterowaniu u należącemu do pewnego zbioru sterowań $U\subset L^1(P,\mathbb{R}^m)$.
Istnienie rozwiązań optymalnych uzyskane zostało dla różnej struktury układu (11) oraz zbioru U, a także różnych warunków wzrostu nakładanych na funkcję f^0. W pierwszej części pracy problem (10)–(11) badany był przy założeniu zwartości zbioru U w $L^1(P,\mathbb{R}^m)$. Główny wynik tej części (zob. [**H1** Section 4]) otrzymany został w oparciu o ciągłą zależność rozwiązań od sterowań oraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Twierdzenie Lebesgue'a wymusiło nałożenie dość restrykcyjnego warunku wzrostu na funkcję podcałkową f^0 (zob. [**H1** (12)]). Pewne rozwiązanie tego problemu zostało zaproponowane przeze mnie w drugiej części sekcji 4. Mianowicie, rozważany był liniowy układ sterowania w klasie sterowań absolutnie ciągłych względem zespołu zmiennych o wartościach pochodnej w ustalonym wypukłym i zwartym zbiorze M[12], przy czym rozwiązań poszukiwaliśmy w zbiorze

$$I^\alpha_{a+,x}(AC_0(P,\mathbb{R}^{n_1}))\times I^\beta_{c+,y}(AC_0(P,\mathbb{R}^{n_2})) := \{z=(z^1,z^2) : P\to\mathbb{R}^{n_1+n_2} : \\ z^1 = I^\alpha_{a+,x}\varphi_1,\ z^2 = I^\beta_{c+,y}\varphi_2;\quad \varphi_i\in AC_0(P,\mathbb{R}^{n_i}),\ i=1,2\},$$

---

istnieje funkcja $g\in L^2(\Omega,\mathbb{R})$ taka, że

$$\int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega g(x)v(x)dx$$

dla dowolnej funkcji $v\in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$. Funkcja g, oznaczana przez $(-\Delta)_\omega w$, jest nazywana słabym Dirichlet–Laplasjanem, natomiast $(-\Delta)_\omega$ jest nazywany słabym operatorem Dirichlet-Laplace'a.

[11] W przypadku $\alpha=\beta=1$ układ (11) sprowadza się do klasycznego, ciągłego układu Roessera, który można wykorzystać do opisu procesów chemicznych zachodzących w reaktorach ze zmieniającą się aktywnością katalizatora.

[12] Zbiór sterowań U był zdefiniowany następująco:

$$U = AC_0(P,M) = \{u(x,y) = \int_a^x\int_c^y \varphi(s,t)dsdt;\quad (x,y)\in P \ p.w.,\quad \varphi\in L^1(P,M)\}.$$

ŁK

gdzie

$$AC_0(P,\mathbb{R}^n) = \{z : P \to \mathbb{R}^n; \quad z(x,y) = \int_a^x \int_c^y \psi(s,t)dsdt, \quad (x,y) \in P \ p.w., \ \psi \in L^1(P,\mathbb{R}^n)\}.$$

Najpierw, w oparciu o twierdzenie Banacha o punkie stałym, wykorzystując normę Bieleckiego w przestrzeni $AC_0(P,\mathbb{R}^{n_1}) \times AC_0(P,\mathbb{R}^{n_2})$, udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu jednoznacznego rozwiązania $(z^1,z^2) \in I^{\alpha}_{a+,x}(AC_0(P,\mathbb{R}^{n_1})) \times I^{\beta}_{c+,y}(AC_0(P,\mathbb{R}^{n_2}))$ układu (11), odpowiadającego ustalonemu sterowaniu $u \in U$ (zob. [**H1** Theorem 4.2]). Następnie, bazując na dowodzie tego twierdzenia, uzyskana została wspólna punktowa ograniczoność rozwiązań (z^1_u, z^2_u) (zob. [**H1** Theorem 4.5]), co pozwoliło rozważać następujący, ogólniejszy warunek wzrostu nałożony na f^0:

- istnieją funkcje $d \in C(\mathbb{R}^+_0, \mathbb{R}^+_0)$ oraz $\Psi \in L^1(P,M)$ takie, że

  $$f^0(z,y,z^1,z^2,u) \leqslant d\left(|(z^1,z^2)| + |u|\right)\Psi(x,y) \tag{12}$$

  dla p.w. $(x,y) \in P$ oraz wszystkich $(z^1,z^2,u) \in B(0,r) \times B(0,r) \times B(0,\rho)$, gdzie r i ρ są stałymi takimi, że

  $$|z^1_u(x,y)|, |z^2_u(x,y)| \leqslant r, \quad |u(x,y)| \leqslant \rho, \quad (x,y) \in P, \ p.w., \ u \in AC_0(P,M).$$

Istnienie rozwiązań optymalnych, podobnie jak w części pierwszej udowodnione zostało w oparciu o ciągłą zależność i przy pomocy twierdzenie Lebesque'a. Warto zwrócić uwagę, że otrzymane rezultaty uzyskane zostały bez założenia wypukłości funkcji podcałkowej f^0 [13].

W trzeciej części pracy [**H1** Section 5] rozważany był wyjściowy problem w przypadku klasycznym ($\alpha = \beta = 1$), przy czym funkcja f^0, w porównaniu z poprzednimi przypadkami, zależała od dwóch parametrów sterujących u^1 i u^2, a równania różniczkowe były liniowe ze względu na u^1 oraz u^2 odpowiednio. Ponieważ nie brałem udziału w tworzeniu tej części pracy zwrócę uwagę tylko na kluczowe fakty, które pozwoliły uzyskać istnienie rozwiązań optymalnych. Wspólna punktowa ograniczoność zbioru trajektorii została uzyskana przy pomocy lematu Gronwalla dla funkcji dwóch zmiennych (zob. [28]). To w połączeniu z twierdzeniem Arzela-Ascoli dla funkcji absolutnie ciągłych dwóch zmiennych (zob. [29]) zagwarantowało zbieżność jednostajną ciągu trajektorii. Z kolei zastosowanie twierdzenia o półciągłości z dołu funkcjonału całkowego (zob. [53]), po uwzględnieniu wypukłości funkcji f^0 ze względu na $u = (u^1, u^2)$, pozwoliło uzyskać istnienie rozwiązania optymalnego.

W pracach [**H2**], [**H3**^{a}] oraz [**H5**] udało się wyeliminować założenie liniowości układu sterowania i nadal nie zakładać wypukłości funkcji f^0 (założenie wypukłości f^0 dość często pojawiało sie w pracach z tej tematyki - zob. [36, 54, 57]).

W pracy [**H2**] badany był następujący problem:

$$J(x,u) = \int_a^b f_0(t,x(t),u(t))dt \to \min, \tag{13}$$

[13] Założenie wypukłości funkcji f^0 ze względu na (z^1,z^2,u) pojawiało się w moich wcześniejszych pracach (zob. [34, 37]) dotyczących ułamkowego układu Roessera.

RK

przy ograniczeniach

$$\left(D^{\alpha}_{a+}x\right)(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a, b] \ p.w., \tag{14}$$

$$\left(I^{1-\alpha}_{a+}x\right)(a) = x_0, \tag{15}$$

$$u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [a, b], \tag{16}$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f_0 : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times M \longrightarrow \mathbb{R}$.
Będziemy zakładać, że sterowania u są elementami zbioru

$$\mathcal{U}_M := \{u \in L^p([a, b], \mathbb{R}^m); \quad u(t) \in M, \ t \in [a, b]\},$$

natomiast przez rozwiązanie układu (14)–(16), odpowiadające ustalonemu sterowaniu $u \in \mathcal{U}_M$, będziemy rozumieć funkcję $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mającą następującą reprezentację całkową

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{c}{(t-a)^{1-\alpha}} + (I^{\alpha}_{a+}\varphi)(t), \quad t \in [a, b] \ a.e., \tag{17}$$

dla pewnych $c \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$, przy czym $1 \leqslant p < \infty$ oraz spełniającą równanie (14) p.w. na $[a, b]$ i warunek początkowy (15). Zbiór takich funkcji oznaczać będziemy przez $AC^{\alpha,p}_{a+}$ [14]. Zbiór funkcji postaci (17) z $c = 0$ oznaczamy symbolem $I^{\alpha}_{a+}(L^p)$.
Istnienie i jednoznaczność rozwiązania układu (14)–(16), przy ustalonym sterowaniu, zostały uzyskane w pracy [35]. Z uwagi na jednoznaczność rozwiązania funcjonał J możemy uzależnić tylko od sterowania u (w pracy jest on oznaczony przez $\hat{J}$).

Badanie istnienia rozwiązań optymalnych powyższego zadania zostało podzielone na dwie części. Najpierw rozważany był warunek $x_0 = 0$. Głównym narzędziem wykorzystanym w tym przypadku było twierdzenie o funkcji uwikłanej dla odwzorowania wieloznacznego (zob. [40, Rozdział II, Th. 3.12]), a otrzymanym wynikiem - [**H2** Theorem 3.5]. Aby go uzyskać, rozważa się pomocniczy (tzw. rozszerzony) układ sterowania (oznaczony w pracy przez (21)–(23)). Aby znaleźć parę optymalną dla wyjściowego zadania, najpierw dowodzi się, poprzez twierdzenie o funkcji uwikłanej zastosowane do inkluzji różniczkowej [**H2** (28)], że owa para spełnia układ pomocniczy. Optymalność uzyskuje się dzięki jednostajnej zbieżności ciągu $(I^{1-\alpha}_{a+}\tilde{x}_l)_{l\in\mathbb{N}}$, gdzie $(\tilde{x}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rozwiazań układu pomocniczego, odpowiadającym ciągowi minimalizuącemu $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Wspomnianą zbieżność, jak również silną w L^1 zbieżność ciągu trajektorii $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ uzyskuje się m.in. dzięki wspólnej, punktowej ograniczoności (przez funkcję z L^p) rozwiązań układu (14)–(16), odpowiadających sterowaniom $u \in \mathcal{U}_M$ (zob. [**H2** Lemma 3.2]). Ten z kolei wynik został otrzymany poprzez zastosowanie "ułamkowej" wersji nierówności Gronwalla z pracy [69] (a właściwie pewnej modyfikacji tej nierówności - zob. [**H2** Lemma 2.4 and Corollary 1])[15].

W przypadku, gdy $x_0 \neq 0$, problem (13)–(16), poprzez odpowiednie podstawienie, sprowadzony został do równoważnego problemu z zerowym warunkiem początkowym, a następnie, korzystając z udowodnionego [**H2** Theorem 3.5], otrzymaliśmy istnienie rozwiązań optymalnych dla wyjściowego zadania ([**H2** Theorem 3.7]). W celu uniknięcia kolizji

[14]Można pokazać (zob. [10]), że jeśli $x \in AC^{\alpha,p}_{a+}$, to istnieje pochodna $D^{\alpha}_{a+}x = \varphi$ oraz $(I^{1-\alpha}_{a+}x)(a) = c$.

[15]Wspólna punktowa ograniczoność rozwiązań została uzyskana przy założeniu [**H2** (16)]. Okazuje się, że można założyć ogólniej, a mianowicie: istnieje funkcja $w \in L^p([a, b], \mathbb{R}^+_0)$ taka, że

$$|f(t, 0, u)| \leqslant w(t), \quad t \in [a, b] \ p.w., \ u \in M.$$

ŁK

oznaczeń, problem z niezerowym warunkiem początkowym został oznaczony w pracy [**H2**] przez (31)–(34), a podstawienie, o którym była mowa wcześniej, przez (35)–(36).
Dzięki opisanej wyżej metodzie, otrzymane rezultaty zostały udowodnione przy dość ogólnym założeniu wypukłości tzw. zbioru uogólnionych prędkości (założenia (e) i (F), odpowiednio w Twierdzeniach 3.5 i 3.7). Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że zbiór taki może być wypukły, mimo, że funkcje f_0 i f nie są wypukłe ze względu na u (świadczy o tym teoretyczny przykład ilustrujący otrzymane wyniki).
Istnienie rozwiązań optymalnych w przypadku liniowego układu sterowania otrzymane zostało w mojej rozprawie doktorskiej, a opublikowane w pracy [36].

[**H2** Theorem 3.5] zostało wykorzystane w pracy [**H3**^{a}] do uzyskania istnienia rozwiązań optymalnych dla następującego problemu sterowania optymalnego z lewostronną pochodną w sensie Hilfera określoną wzorem (7):

$$J(x,u) = \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))dt \to \min, \tag{18}$$

przy ograniczeniach

$$\left(D_{a+}^{\alpha,\beta}x\right)(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [a,b] \ p.w., \tag{19}$$

$$\left(I_{a+}^{(1-\alpha)(1-\beta)}x\right)(a) = x_0, \tag{20}$$

$$u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [a,b], \tag{21}$$

gdzie $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}^n$, $f_0 : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times M \to \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.
Zwróćmy uwagę, że formuła (7) ma sens, gdy istnieje tylko lewostronna pochodna Riemanna-Liouville'a rzędu α funkcji

$$z(\cdot) - \frac{(I_{a+}^{1-\gamma}z)(a)}{\Gamma(\gamma)(\cdot - a)^{1-\gamma}}$$

oraz, z uwagi na wartość $(I_{a+}^{1-\gamma}z)(a)$, funkcja $I_{a+}^{1-\gamma}z$ jest ciągła na $[a,b]$. Ponadto, łatwo stwierdzić, że

$$(I_{a+}^{1-\gamma}z)(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D_{a+}^{\alpha,\beta}z = D_{a+}^{\alpha}z.$$

Powyższe obserwacje zostały wykorzystane w pierwszym etapie badań, w którym rozważany był przypadek z zerowym warunkiem początkowym ($x_0 = 0$). Zdefiniowana została klasa sterowań taka jak w pracy [**H2**] oraz zbiór rozwiązań układu (19)–(21), oznaczony przez $K_{a+,0}^{\alpha,\beta,p}$, który w rozważanym przypadku, przy założeniu $p > \frac{1}{1-\beta(1-\alpha)}$, pokrywa się ze zbiorem rozwiązań układu (14)–(16). W konsekwencji, problem istnienia rozwiązań optymalnych zadania (18)–(21) został sprowadzony do problemu tego samego typu dla zadania (13)–(16). Główny wynik tej części pracy, a mianowicie [**H3**^{a} Theorem 4], można

---

Wówczas można pokazać, że funkcja

$$t \to \int_a^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N^n}{\Gamma(n\alpha)}(t-s)^{n\alpha-1}(I_{a+}^{\alpha}w)(s)ds$$

jest sumowalna z p-tą potęgą na $[a,b]$ (wcześniej nie zostało to zauważone) i teza wyniknie bezpośrednio z lematu Gronwalla [**H2** Lemma 2.3].

RK

wówczas natychmiast wywnioskować z [**H2** Theorem 3.5].
Przypadek z niezerowym warunkiem początkowym badany był analogicznie jak w pracy [**H2**] (zadanie (18)–(21) sprowadzone zostało do zadania z zerowym warunkiem początkowym poprzez zastosowanie odpowiedniego podstawienia, a następnie zastosowane zostało udowodnione wcześniej [**H3**^{a} Theorem 4]). Główny wynik tej części to [**H3**^{a} Theorem 7]. Otrzymane wyniki zilustrowane zostały teoretycznym przykładem, natomiast w pracy [**H3**^{b}] znajdziemy ich praktyczne zastosowanie (praca ta zostanie omówiona w sekcji 4.5.1)[16].

Inne podejście do zbadania istnienia rozwiązań optymalnych zastosowane zostało w pracy [**H5**], w której rozważany był następujący problem:

$$J(z,u) = \int_{\Omega} f_0(x, z(x), u(x))dx \to \min, \tag{22}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} \left([(-\Delta)_\omega]^\beta z\right)(x) = f(x, z(x), u(x)), & x \in \Omega \ p.w., \\ u(x) \in M, & x \in \Omega \ p.w., \end{cases} \tag{23}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, jest otwartym i ograniczonym zbiorem, $\beta > 0$, $f, f_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^m$ jest niepustym zbiorem.
Wynikało to z tego, że powyższy problem rozważany był przy ogólniejszym założeniu wypukłości niż w pracach [**H2**] i [**H3**^{a}]; dokładniej założona została wypukłość zbioru

$$Q(x,z) := \{(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \exists_{u \in M} \quad \mu_0 \geqslant f_0(x,z,u), \quad \mu = f(x,z,u)\}$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i wszystkich $z \in \mathbb{R}$.
Głównymi narzędziami zastosowanymi w pracy były: twierdzenie o dolnym domknięciu dla pola orientorowego (zob. [17, Theorem 10.7.i]) oraz twierdzenie o mierzalnej selekcji (zob. [58, Theorem 2J]). Pomocna okazała się również nierówność typu Poincaré [**H5** (5)], dzięki której uzyskana została względna słaba zwartość zbioru trajektorii dopuszczalnych. Rozwiązań układu (23) poszukiwaliśmy w zbiorze dom $\left([(-\Delta)_\omega]^\beta\right)$, natomiast sterowania były funkcjami mierzalnymi o wartościach w zbiorze M. Główny wynik pracy jest zawarty w [**H5** Theorem 4]. Rozważając ciąg minimalizujący (z^l, u^l), dzięki względnej słabej zwartości zbioru trajektorii (zob. [**H5** Corollary 1]) oraz [**H5** Proposition 1], dostajemy istnienie funkcji z^* takiej, że $z^l \to z^*$ (z dokładnością do podciągu) silnie (a więc również według miary) w L^2. Zastosowanie twierdzenia o dolnym domknięciu, a następnie twierdzenia o mierzalnej selekcji do odpowiedniej multifunkcji zagwarantuje istnienie sterowania u^*, które wraz z trajektorją z^* okazuje się być szukaną parą optymalną dla zadania (22)–(23). Tego typu podejście stosowane było także w pracy [31], gdzie badany był całkowo-różniczkowy problem Bolzy. Dla zilustrowania otrzymanego wyniku rozważony został problem (22)–(23) z jednowymiarowym operatorem Dirichleta-Laplace'a [zob. **H5** Section 3]. Kandydat na rozwiązanie optymalne (z^*, u^*) został znaleziony dzięki zasadzie maksimum, otrzymanej w pracy [30]. [**H5** Theorem 4] natomiast zagwarantowało istnienie takiego rozwiązania.

[16] Z uwagi na pewne powiązanie ze sobą prac [**H3**^{a}] i [**H3**^{b}] (warunki konieczne i wystarczające istnienia rozwiązań optymalnych z pracy [**H3**^{a}] zostały zastosowane do rozwiązania praktycznego zadania w pracy [**H3**^{b}]), można je traktować jako integralną całość, co tłumaczy ich oznaczenie w wykazie zgłoszonym do osiągnięcia.

RK

4.4 Warunki konieczne optymalności

W tej części autoreferatu omówione zostaną prace dotyczące warunków koniecznych optymalności dla zadań typu Lagrange'a.

W pracy [**H3**^{a}], oprócz istnienia rozwiązań optymalnych, uzyskane zostały także warunki konieczne optymalności dla zadania (18)–(21). Sposób postępowania był analogiczny jak w poprzedniej części rozprawy. Najpierw rozważany był przypadek z zerowym warunkiem początkowym. W tej części, dzięki nowej formule na pochodną w sensie Hilfera, warunki konieczne optymalności (zob. [**H3**^{a} Theorem 3]) zostały uzyskane poprzez zastosowanie zasady maksimum z pracy [35] dla zadania (13)–(16). Przypadek z niezerowym warunkiem początkowym badany był analogicznie jak w pracy [**H2**] (zadanie (18)–(21) sprowadzone zostało do zadania z zerowym warunkiem początkowym poprzez zastosowanie odpowiedniego podstawienia, a następnie zastosowane zostało udowodnione wcześniej [**H3**^{a} Theorem 3]). Główny wynik tej części to [**H3**^{a} Theorem 6].

W pracy [**H4**] badany był następujący problem:

$$H(x,u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \to \min, \tag{24}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} ({}^C D^{\alpha_1}_{0+} x_1)(t) = f_1(t, x(t), u(t)), & \\ \vdots & t \in [0,T] \ p.w., \\ ({}^C D^{\alpha_n}_{0+} x_n)(t) = f_n(t, x(t), u(t)), & \\ x(0) = x_0, & \\ u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m, & \end{cases} \tag{25}$$

gdzie $x_i : [0,T] \to \mathbb{R}^r$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^{nr}$, $\alpha_i \in (0,1]$, $f_i : [0,T] \times \mathbb{R}^{nr} \times M \to \mathbb{R}^r$, $i = 1, \ldots, n$, $f_0 : [0,T] \times \mathbb{R}^{nr} \times M \to \mathbb{R}$.
Zakładamy tu, że sterowania są funkcjami mierzalnymi o wartościach w zbiorze M. Zbiór takich sterowań został oznaczony symbolem $\mathcal{U}_M$. Niech $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \frac{1}{p} < \alpha_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$ oraz $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Przez rozwiązanie układu (25), odpowiadające ustalonemu sterowaniu u, rozumiemy funkcję $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{AC}^{\alpha,p}_{0+}$, gdzie

$$\mathbb{AC}^{\alpha,p}_{0+} := {}_C AC^{\alpha_1,p}_{0+}([0,T], \mathbb{R}^r) \times \cdots \times {}_C AC^{\alpha_n,p}_{0+}([0,T], \mathbb{R}^r),$$

przy czym

$${}_C AC^{\alpha_i,p}_{0+}([0,T], \mathbb{R}^r) := \{z_i : [0,T] \to \mathbb{R}^r : \quad z_i(t) = z_i(0) + (I^{\alpha_i}_{0+} \varphi_i)(t), \ t \in [0,T] \ p.w., \}$$

dla pewnej funkcji $\varphi_i \in L^p([0,T], \mathbb{R}^r)$, $i = 1, \ldots, n$.
Problem zbadania warunków koniecznych istnienia rozwiązań optymalnych powyższego zadania, podobnie jak we wcześniej omawianych pracach, został podzielony na dwie części. Najpierw rozważany był warunek $x_0 = 0$. Z uwagi na to, że w drugiej części stosowane było pewne podstawienie wygodnie jest zmienić oznaczenia zmiennych i funkcji w zadaniu (24)–(25) w rozważanym przypadku. Rozważmy zatem zadanie postaci:

$$J(y,u) = \int_0^T g_0(t, y(t), u(t))dt \to \min, \tag{26}$$

RK

przy ograniczeniach

$$\begin{cases} ({}^C D^{\alpha_1}_{0+} y_1)(t) = g_1(t, y(t), u(t)), & \\ \vdots & t \in [0,T] \ p.w., \\ ({}^C D^{\alpha_n}_{0+} y_n)(t) = g_n(t, y(t), u(t)), & \\ y(0) = 0, & \\ u(t) \in M \subset \mathbb{R}^m. & \end{cases} \tag{27}$$

Głównym narzędziem wykorzystanym w tym przypadku była gładko-wypukła zasada ekstremum (zob. [26])[17] sformułowana dla następującego abstrakcyjnego zadania sterowania optymalnego:

$$\begin{aligned} & F_0(x,u) \to \inf; \\ & F(x,u) = 0, \\ & f_1(x,u) \leqslant 0, \dots, f_n(x,u) \leqslant 0, \\ & u \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

gdzie X, Y są przestrzeniami Banacha, $\mathcal{U}$ - dowolnym niepustym zbiorem, $f_0, \dots, f_n : X \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ oraz $F : X \times \mathcal{U} \to Y$.
Aby wyprowadzić zasadę maksimum dla zadania (26)–(27) (zob. [**H4** Theorem 4]) rozważone zostały: funkcjonał

$$F_0 : \mathbb{I}^{\alpha}_{0+}(L^p) \times \mathcal{U}_M \ni (y(\cdot), u(\cdot)) \longrightarrow \int_0^T g_0(t, y(t), u(t))dt \in \mathbb{R},$$

oraz operator

$$F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{I}^{\alpha}_{0+}(L^p) \times \mathcal{U}_M \longrightarrow \mathbb{L}^p([0,T], \mathbb{R}^{nr}),$$

$$F_i : I^{\alpha_i}_{0+}(L^p) \times \mathcal{U}_M \ni (y(\cdot), u(\cdot)) \longrightarrow ({}^C D^{\alpha_i}_{0+} y_i)(\cdot) - g_i(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in L^p([0,T], \mathbb{R}^r),$$

dla $i = 1, \dots, n$, gdzie

$$\mathbb{I}^{\alpha}_{0+}(L^p) := I^{\alpha_1}_{0+}(L^p([0,T], \mathbb{R}^r)) \times \dots \times I^{\alpha_n}_{0+}(L^p([0,T], \mathbb{R}^r)),$$

$$\mathbb{L}^p([0,T], \mathbb{R}^{nr}) := L^p([0,T], \mathbb{R}^r) \times \dots \times L^p([0,T], \mathbb{R}^r).$$

Następnie, zostało sprawdzone, że powyższe odwzorowania spełniają wszystkie założenia gładko-wypukłej zasady ekstremum (w szczególności, założenie "wypukłości" jest spełnione dzięki [**H4** Lemma 2][18]). W konsekwencji, wspomniana zasada gwarantuje tezę [**H4** Theorem 4], która jest sformułowana w postaci liniowego równania sprzężonego [**H4** (A.9)] (opisanego przy pomocy prawostronnej pochodnej Riemanna-Liouville'a rzędu α) oraz punktowego warunku minimum [**H4** (A.10)].

[17]Niezbędne fakty dotyczącej gładko-wypukłej zasady ekstremum zostały zamieszczone w [**H4** sekcja A.1].
[18]Warto tutaj zauważyć, że w dowodzie Lematu 2 wykorzystuje się twierdzenie o funkcji uwikłanej dla odwzorowań wieloznacznych (zob. [40, Rozdział II, Thm. 3.12]), które wymusza założenie zwartości zbioru M.

RK

Przypadek z niezerowym warunkiem początkowym badany był analogicznie jak we wcześniej omawianych pracach (zadanie (24)–(25) sprowadzone zostało do zadania z zerowym warunkiem początkowym poprzez zastosowanie odpowiedniego podstawienia, a następnie zastosowane zostało udowodnione wcześniej [**H4** Theorem 4]). Główny wynik tej części to [**H4** Theorem 1].
Chciałbym nadmienić, że warunki konieczne uzyskane zostały przy słabszych założeniach niż w pracy [35] (ogólniejsze warunki wzrostu oraz zastąpienie warunku Lipschitza ze względu na zmienną stanu odpowiednim warunkiem wzrostu dla prawej strony równania różniczkowego w układzie sterowania (25)). Otrzymany wynik został wykorzystany do zbadania konsensusu w modelu Cuckera-Smale'a (więcej szczegółów na ten temat zostanie podanych w sekcji 4.5). Ponadto, nawiązując do [**H4** Remark 4], nie udało mi się do tej pory uzyskać zasady maksimum przy bardziej ogólnych założeniach (ew. bardziej ogólnym problemie).
Liniowy układ (25) po raz pierwszy został wykorzystany w pracy [33] do zbadania liniowych obwodów elektrycznych złożonych z rezystorów, superkondensatorów, cewek i źródeł napięcia. W pracy [68] natomiast zbadana została sterowalność oraz obserwowalność takiego układu w przypadku $n = 2$.

Na koniec tej części autoreferatu chciałbym podkreślić, że wszystkie teoretyczne przykłady ilustrujące otrzymane wyniki w pracach [**H2**], [**H3**^{a}] oraz [**H5**] zostały m.in. tak dobrane, aby można było podać rozwiązanie w sposób jawny. Kluczowe okazały się tu wzory na rozwiązanie liniowych układów równań różniczkowych niecałkowitego rzędu oraz, w przypadku przykładu z pracy [**H5**], gdzie rozważany był jednowymiarowy operator Dirichleta-Laplace'a, wzory na wartości i wektory własne.

4.5 Strategia optymalna w modelach wieloagentowych

W ostatnich latach coraz częściej badane są modele matematyczne opisujące oddziaływanie między tzw. agentami w grupie (układy wieloagentowe). Modele te są inspirowane zjawiskami obserwowanymi w otaczającym nas świecie, np. zachowaniem grupy zwierząt czy ludzi, a opisują zjawiska związane z koordynacją zachowań agentów w oparciu o dynamikę zachowania ich sąsiadów. Do modeli tego typu należy zaliczyć m.in. model Hegselmanna–Krausego (w skrócie HK opisujący kształtowanie się opinii, na określony temat, w grupie agentów - zob. [23]) oraz model Cuckera–Smale'a (w skrócie CS - opisujący zjawisko samoorganizacji, formowania się grup, np. stad ptaków - zob. [19]). Centralnym zagadnieniem związanym z układami wieloagentowymi jest badanie ewolucji układu od stanu początkowego do stanu końcowego, w którym oczekiwany jest tak zwany konsensus. W przypadku modelu HK jest to stan, w którym wszyscy agenci mają wspólną opinię, a w przypadku modelu CS - stan, w którym agenci uformowali się w zwartą grupę poprzez skoordynowanie własnych zachowań. Aby ułatwić osiągnięcie konsensusu, do danego modelu wprowadza się zewnętrzny parametr sterujący oraz rozważa się pewien całkowy funkcjonał kosztu. W ten sposób otrzymujemy problem sterowania optymalnego typu Lagrange'a, w którym minimalizowany jest funkcjonał kosztu przy ograniczeniach opisanych przy pomocy układu różniczkowych równań stanu. Uzyskana, przy pomocy warunków koniecznych i dostatecznych, trajektoria optymalna okazuje się być pożądanym stanem konsensusu. Takie podejście badania konsensusu w układach wieloagentowych nazywane jest strategią sterowania optymalnego.

4.5.1 Model Hegselmanna-Krausego ze sterowaniem

Celem pracy [**H3**^{b}] było zbadanie konsensusu w układzie HK, który opisano przy pomocy pochodnej niecałkowitego rzędu w sensie Caputo. Dokładniej, rozważany jest układ:

$$\begin{cases} \left({}^C D^{\alpha}_{0+} x_0\right)(t) = u(t) \\ \left({}^C D^{\alpha}_{0+} x_i\right)(t) = \sum\limits_{j \neq 0, i}^{N} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)) + c_i(x_0(t) - x_i(t)), & t \in [0, T] \text{ p.w.} \\ (x_0(0), x_i(0)) = (x_{00}, x_{i0}), \qquad i = 1, \dots, N \\ u(t) \in M \subset \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{28}$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{(N+1)d}$, $M := \left\{z \in \mathbb{R}^d : \|z\|_{l_2^d} \leqslant K\right\}$[19] dla pewnego $K > 0$, wraz z całkowym funkcjonałem kosztu

$$J(x, u) = \int\limits_0^T \left(\frac{1}{2N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \|x_i(t) - x_j(t)\|^2_{l_2^d} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \|x_0(t) - x_i(t)\|^2_{l_2^d} + \frac{\nu}{2} \|u(t)\|^2_{l_2^d} \right) dt \to \min. \tag{29}$$

Aby ułatwić osiągnięcie konsensusu, do oryginalnego modelu[20] wprowadza się dodatkowego agenta, zwanego liderem, posiadającego opinię (na dany temat) x_0 oraz parametr sterujący u oddziałujący tylko na lidera (tzw. sterowanie nieinwazyjne). Stan x, oprócz opinii lidera, reprezentuje opinie agentów x_i, a współczynniki a_{ij}, c_i $(i, j = 1, \dots, N)$ postaci

$$a_{ij} = a\left(\|x_i - x_j\|^2_{l_2^d}\right), \qquad c_i = \gamma \phi\left(\|x_i - x_0\|^2_{l_2^d}\right),$$

gdzie $\gamma > 0$ (funkcja a jest określona wzorem [**H3**^{b} (10)], natomiast $\phi : [0, \infty) \to (0, 1]$ jest funkcją gładką, nierosnącą, spełniającą warunki: $\phi(0) = 1$ oraz $\lim\limits_{r \to \infty} \phi(r) = 0$), opisują odpowiednio: interakcje między agentami oraz wpływ opinii lidera na opinię i-tego agenta. Warto zauważyć, że na opinie agentów, oprócz wzajemnych opinii, może wpływać opinia lidera (odpowiada za to drugi składnik drugiego równania w układzie (28)), ale nie odwrotnie (na opinie lidera mogą wpływać jedynie opinie zewnętrzne). Funkcjonał J zawiera składniki opisujące: średnie odchylenie między stanami agentów (pierwszy składnik), odchylenie opinii agentów w stosunku do opinii lidera (drugi składnik) oraz koszt sterowania (trzeci składnik). Problem (28)–(29), w przypadku $\alpha = 1$, badany był w pracy [67]. Zastosowanie pochodnej Caputo w równaniach (28), jak wspomniałem w sekcji 4.2.1, z uwagi na jej nielokalność, powoduje, że otrzymujemy układ, w którym uwzględniana jest pamięć, co oznacza, że na opinie agentów i lidera wpływają również opinie wcześniejsze. Uzyskane w pracy [**H3**^{a}] warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań optymalnych pozwoliły zastosować strategię sterowania optymalnego do realizacji zadania zbadania konsensusu w powyższym problemie. Dokładniej, udowodnione zostało twierdzenie o istnieniu rozwiązań optymalnych ([**H3**^{b} Theorem 17]) oraz wyprowadzona została zasada maksimum ([**H3**^{b} Theorem 14]) dla problemu (28)–(29) w oparciu o [**H3**^{a} Theorems 6 and 7][21] w przypadku $\beta = 1$ (przypomnę, że wtedy pochodna Hilfera sprowadza się do pochodnej Caputo). Następnie otrzymane wyniki zilustrowane zostały dwoma przykładami, które

[19] Symbol $\|\cdot\|_{l_2^d}$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^d$.

[20] Oryginalny model HK zawiera tylko drugie równanie.

[21] W pracy [**H3**^{b}] na stronie 5 w sformułowaniu Twierdzeń 6 i 7 podana została błędna numeracja twierdzeń z pracy [**H3**^{a}].

ŁK

zostały rozwiązane w sposób numeryczny. Badane w nich układy sterowania opisują dynamikę opinii czterech agentów oraz lidera, przy czym w przykładzie 18 początkowa opinia lidera umiejscowiona jest między początkowymi opiniami pozostałych agentów, natomiast w przykładzie 19 znacznie różniła się od pozostałych. W pierwszym przypadku niezależnie od siły oddziaływania zewnętrznego na lidera (w pracy zaprezentowane zostały tylko wykresy z niewielkim sterowaniem - Fig. 2 i 4, gdyż w przypadku silniejszego oddziaływania wyniki były podobne) w miarę szybko otrzymaliśmy stan konsensusu na poziomie opinii lidera (zdecydowanie szybciej dla $\alpha = 0.9$ niż dla $\alpha = 0.2$). W drugim przypadku natomiast, w wynikach zauważalny już był wpływ siły oddziaływania sterowania na lidera. Przy stosunkowo niewielkim sterowaniu (mała wartość stałej K) opinie agentów podążały w kierunku opinii lidera (Fig. 6,7,8). Gdy jednak sterowanie było silniejsze (zwiększała się presja na lidera ze strony otoczenia), to wówczas lider, po pewnym czasie, zgadzał się z opiniami pozostałych agentów (dokładniej, z opinią, będącą średnią z opinii pozostałych agentów) - Fig. 9.

4.5.2 Model Cuckera-Smale'a ze sterowaniem

W pracy **[H4]** badany jest model CS postaci:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = v_i(t), \\ {}^C D^{\mu}_{0+} v_i(t) = \frac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} \eta\left(\|z_j(t) - z_i(t)\|^2_{l_2^d}\right)(v_j(t) - v_i(t)) + u_i(t), \quad t \in [0,T] \ p.w., \\ (z_i(0), v_i(0)) = (z_{i0}, v_{i0}), \qquad i = 1, \dots, N, \\ u(t) \in M \subset \mathbb{R}^{Nd}, \quad t \in [0,T] \ p.w., \end{cases} \tag{30}$$

gdzie N oznacza ilość agentów w grupie, $z = (z_1, \dots, z_N) : [0,T] \to \mathbb{R}^{Nd}$ reprezentuje pozycję agentów, $v = (v_1, \dots, v_N) : [0,T] \to \mathbb{R}^{Nd}$ jest parametrem konsensusu, $u = (u_1, \dots, u_N) : [0,T] \to \mathbb{R}^{Nd}$ oznacza parametr sterujący, $\eta \in C^1([0,\infty), (0,\infty))$ jest funkcją nierosnącą (tzw. wagą komunikacyjną),

$$M := \left\{ w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^{Nd} : \quad \|w\|_{l_1^N - l_2^d} \leqslant K \right\},$$

dla pewnej stałej $K > 0$, przy czym

$$\|w\|_{l_1^N - l_2^d} := \sum_{i=1}^{N} \|w_i\|_{l_2^d}.$$

W powyższym układzie pierwsze równanie opisuje ewolucję położenia i-tego agenta, natomiast drugie - dynamikę jego parametru konsensusu z uwzględnieniem wartości z przeszłości tego parametru (z tego powodu użyta została pochodna w sensie Caputo w drugim równaniu). Wprowadzona w ten sposób pamięć do układu jest dość naturalnym zabiegiem, gdyż w praktyce zachowanie agenta w danej chwili uzależnione jest od jego obserwacji zachowań innych agentów w przeszłości. Może się zdarzyć, że "niesprzyjająca" konfiguracja warunków początkowych lub niedostateczna siła interakcji między agentami (odpowiada za to funkcja η) spowoduje, że agenci nie będą w stanie sami osiągnąć konsensusu. Wówczas potrzebna jest interwencja z zewnątrz, która pojawia się w postaci sterowania w drugim równaniu oraz, wprowadzonym dodatkowo, całkowym funkcjonale kosztu H postaci

$$H((z,v),u) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| v_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} v_j(t) \right\|^2_{l_2^d} + \gamma \sum_{i=1}^{N} \|u_i(t)\|_{l_2^d} \right) dt, \tag{31}$$

ŁK

gdzie $\gamma > 0$. Pierwszy składnik funkcjonału H (flocking term) mierzy odchylenie między uśrednionym parametrem konsensusu, a parametrami tego typu dla poszczególnych agentów, natomiast drugi (sparsity term) reprezentuje koszt sterowania. W ten sposób otrzymaliśmy zadanie sterowania optymalnego, w którym celem jest minimalizacja funkcjonału (31) przy ograniczeniach (30). Główny wynik to zasada maksimum dla tego zadania (zob. [**H4** Theorem 2]), która została wyprowadzona w oparciu o uzyskane w tej pracy [**H4** Theorem 1] i pozwoliła otrzymać (dzięki [38, Theorem 2]) rozwiązanie optymalne $((z^*, v^*), u^*)$. Należy tutaj dodać, że uzyskane sterowanie optymalne, dzięki zastosowaniu normy $\|\cdot\|_{l_1^N - l_2^d}$ w funkcjonale H, okazało się być rzadkie (sparse control)[22], co potwierdziły przykłady ilustrujące (zob. [**H4** Examples 1 and 2]). Problem (30)–(31), w przypadku $\mu = 1$, badany był w pracy [15].

4.6 Wkład habilitanta w powstanie prac wieloautorskich zgłoszonych do osiągnięcia

Poniżej opiszę mój wkład w powstanie prac [**H1**], [**H2**], [**H3**^{b}], [**H4**] oraz [**P2**].

- Praca [**H1**]:
  - współpomysłodawca badań,
  - współudział w przygotowaniu koncepcji pracy (autor korespondencyjny),
  - opracowanie wraz z pozostałymi współautorami sekcji 1 i 2,
  - opracowanie sekcji 3 i 4.
- Praca [**H2**]:
  - współpomysłodawca badań,
  - współudział w przygotowaniu koncepcji pracy (autor korespondencyjny),
  - opracowanie sekcji 3.2,
  - opracowanie wspólnie z prof. D. Idczakiem sekcji 2 oraz przykładu ilustrującego otrzymane wyniki.
- Praca [**H3**^{b}]:
  - współpomysłodawca badań,
  - współudział w przygotowaniu koncepcji pracy,
  - opracowanie sekcji 2 (Preliminaria),
  - sformułowanie i udowodnienie głównych twierdzeń pracy: [**H3**^{b} Theorems 12, 14 and 17],
  - opracowanie wraz z pozostałymi współautorami przykładów ilustrujących otrzymane wyniki: [**H3**^{b} Examples 18 and 19].
- Praca [**H4**]:
  - współpomysłodawca badań,
  - współudział w przygotowaniu koncepcji pracy,

[22]Oznacza to, że w danej chwili sterowanie działa na namniejszą możliwą ilość agentów.

ek

- opracowanie sekcji 2 (Preliminaria),
- opracowanie sekcji Appendix A, w szczególności wyprowadzenie zasady maksimum (sformułowanie i udowodnienie twierdzeń [**H4** Theorems 1 and 4]) dla zadań Lagrange'a zawierających układ sterowania różnych rzędów (zadania: [**H4** (A.7)–(A.8)] oraz [**H4** (2)–(3)]),
- wyprowadzenie zasady maksimum (sformułowanie i udowodnienie twierdzenia [**H4** Theorem 2]) dla problemu sterowania optymalnego zawierającego model Cuckera-Smale'a ze sterowaniem (zadanie [**H4** (10)–(11)]),
- opracowanie wraz z pozostałymi współautorami przykładów ilustrujących otrzymane wyniki: [**H4** Examples 1 and 2].

- Praca [**P2**]:
  - współpomysłodawca badań,
  - współudział w przygotowaniu koncepcji pracy,
  - opracowanie sekcji 4,
  - opracowanie wraz z pozostałymi współautorami pozostałych sekcji pracy.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

W tej części przedstawię informacje o mojej aktywności naukowej realizowanej, zarówno na uczelniach polskich, jak i zagranicznych.

- **Uczelnie polskie:**

2019 Pobyt badawczy na Wydziale Budownictwa, Mechaniki i Petrochemii Politechniki Warszawskiej (Filia w Płocku) w dniach 16.09–23.09.2019 r.

W trakcie pobytu, wspólnie z dr. Cezarym Obczyńskim badaliśmy pochodne cząstkowe niecałkowitego rzędu w sensie Caputo funkcji dwóch zmiennych. Sformułowaliśmy i udowodniliśmy twierdzenia o całkowej reprezentacji funkcji posiadających takie pochodne. Otrzymane wyniki zostały zawarte w pracy:

Kamocki, R., Obczyński, C. *On the single partial Caputo derivatives for functions of two variables*, Periodica Mathematica Hungarica (2023), https://doi.org/10.1007/s10998-023-00520-x (wersja online).

W latach 2010 - 2018 brałem udział w cyklicznych konferencjach naukowych pt. *"Rachunek niecałkowitego rzędu i jego zastosowania"* (w skrócie RRNR - konferencja organizowana przez różne ośrodki krajowe) oraz *"The International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics"* (w skrócie MMAR - konferencja organizowana przez Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie):

RK

2010 II Konferencja Naukowa RRNR, Politechnika Częstochowska – wygłoszenie referatu pt. *"Zasada maksimum dla zwyczajnego ułamkowego problemu sterowania optymalnego "*.

2011 III Konferencja Naukowa RRNR, Politechnika Białostocka – wygłoszenie referatu pt. *"Istnienie rozwiązań optymalnych pewnego problemu sterowania optymalnego niecałkowitego rzędu"*.

2012 IV Konferencja Naukowa RRNR, Politechnika Warszawska.

2013 V Konferencja Naukowa RRNR, AGH Kraków – wygłoszenie referatu pt. *"Liniowe układy niecałkowitego rzędu zawierające pochodną Caputo i ich optymalizacja"*.

2014 VI Konferencja Naukowa RRNR, Politechnika Opolska – wygłoszenie referatu pt. *"On fractional differential inclusions with modified Riemann-Liouville derivative"*.

2015 VII Konferencja Naukowa RRNR, Politechnika Szczecińska – wygłoszenie referatu pt. *"Some remarks on the Hilfer derivative"*.

2014 XIX Konferencja MMAR, Międzyzdroje – wygłoszenie referatu pt. *"On a fractional optimal control problem with Jumaries modified Riemann-Liouville derivative"*.

2015 XX Konferencja MMAR, Międzyzdroje – wygłoszenie referatu pt. *"Existence and continuous dependence of solutions on controls for fractional linear control systems with the Hilfer derivative"*.

2017 XXII Konferencja MMAR, Międzyzdroje – wygłoszenie referatu pt. *"Existence and continuous dependence of solutions on controls for linear control systems with different fractional orders"*.

2018 XXIII Konferencja MMAR, Międzyzdroje – sesja plakatowa (wspólnie z Kamilem Pajkiem): *"On the existence of optimal solutions for optimal control problems involving the Caputo fractional derivatives with nonsingular kernels"*.

W trakcie pobytu na konferencjach RRNR miałem okazję spotkać wielu wybitnych naukowców z Polski, jak i zagranicznych, którzy zajmują się rachunkiem całkowo-różniczkowym niecałkowitego rzędu. Podczas spotkań miałem okazję wysłuchać wielu odczytów oraz odbyć wiele rozmów, które pozwoliły mi poszerzyć wiedzę z tej tematyki oraz zapoznać się z nowymi trendami. Podczas jednej z takich rozmów w 2015 roku (m.in. z dr hab. Agnieszką B. Malinowską z Politechniki Białostockiej oraz dr Tatianą Odzijewicz z SGH w Warszawie) pierwszy raz usłyszałem o modelach wieloagentowych, które stały się inspiracją do podjęcia badań w tym zakresie. Na konferencjach MMAR uczestniczyłem w sesjach poświęconych rachunkowi niecałkowitego rzędu i także tam miałem możliwość kontaktu z naukowcami zajmującymi się tą dziedziną. W szczególności, na konferencji MMAR w 2018 roku odbyłem konsultacje z dr hab. Agnieszką B. Malinowską oraz dr Tatianą Odzijewicz, które dotyczyły zastosowania narzędzi teorii sterowania optymalnego do zbadania konsensusu w modelach wieloagentowych (powstały wtedy pierwsze hipotezy). W ten sposób zawiązała się Nasza współpraca naukowa (trwająca do dziś), która zaowocowała opublikowaniem trzech prac (wspólnie z dr. Ricardo Almeidą z Uniwersytetu w Aveiro (Portugalia), który dołączył do Naszego zespołu w 2019 roku). Dwie z nich ([**H3**^{b}] i [**H4**]) zostały zgłoszone do osiągnięcia habilitacyjnego, a trzecia to artykuł

RK

[3].

Oprócz udziału w konferencjach RRNR oraz MMAR wygłosiłem referaty także na Uniwersytecie im. Adama Mickiewicza w Poznaniu oraz Uniwersytecie Jagiellońskim w ramach następujących konferencji:

2014 DMV PTM 2014, Joint Meeting of the German Mathematical Society (DMV) and the Polish Mathematical Society (PTM), Poznań – wygłoszenie referatu pt. *"Existence of optimal solutions to a fractional nonlinear optimal control problem with the Riemann-Liouville derivative"*.

2018 ETAMM 2018 – International Conference "Emerging Trends in Applied Mathematics and Mechanics 2018", Kraków – wygłoszenie referatu pt. *"Ordinary control systems involving a fractional Dirichlet–Laplace operator and their optimization"*.

- Uczelnie zagraniczne:

2012 Udział w konferencji *9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Orlando, USA, zorganizowanej przez AIMS oraz University of North Carolina Wilmington – wygłoszenie referatu (na zaproszenie) pt. *"Fractional Sobolev spaces on an interval via Riemann – Liouville derivatives and some imbeddings"*.

2013 Udział w konferencji nDS'13 – *8th International Workshop on Multidimensional Systems*, Erlangen, Germany, zorganizowanej przez Friedrich-Alexander-Universität Erlangen–Nürnberg – wygłoszenie referatu pt. *"Fractional continuous Roesser model with Riemann-Liouville derivative"*.

2023 Udział w konferencji *13th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, May 31 – June 4, 2023, Wilmington, USA, zorganizowanej przez AIMS oraz University of North Carolina Wilmington – wygłoszenie referatu (na zaproszenie) pt. *"Necessary optimality conditions for a fractional integro–differential optimal control problem"*.

2023 Pobyt badawczy na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Aveiro, Portugalia w dniach 17.07–27.07.2023 r.

Jak wpomniałem wcześniej, z dr. Ricardo Almeidą z Uniwersytetu w Aveiro współpracuję naukowo od 2019 roku. Wyjazd badawczy do Aveiro planowałem już w 2020 roku, ale niestety nie doszedł on do skutku z powodu pandemii Covid–19. W konsekwencji, zmuszeni byliśmy prowadzić badania (wspólnie z A. B. Malinowską i T. Odzijewicz) w sposób zdalny, czego efektem są wymienione wcześniej trzy prace.

W trakcie zakończonego niedawno pobytu w Portugalii zajmowaliśmy się z dr. Almeidą głównie opracowaniem nowych algorytmów (dr R. Almeida specjalizuje się w obliczeniach numerycznych), które umożliwią rozwiązywanie równań różniczkowych niecałkowitego rzędu z pochodną w sensie ψ-Caputo w sposób numeryczny. To pozwoli w przyszłości zastosować owe algorytmy do rozwiązania zadań sterowania optymalnego, w których układ sterowania zawiera tę pochodną. Badania w kontekście istnienia rozwiązań optymalnych oraz warunków koniecznych optymalności dla problemów sterowania optymalnego z pochodną ψ-Caputo planowane są w 2024 roku.

RK

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

- **Osiągnięcia dydaktyczne**
  - Prowadzenie zajęć dydaktycznych (wykłady, konwersatoria, laboratoria informatyczne) na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ na kierunkach: matematyka, informatyka oraz analiza danych z następujących przedmioów:
    * Teoria grafów i sieci,
    * Badania operacyjne,
    * Optymalizacja dyskretna w analizie danych,
    * Matematyczne aspekty w analizie danych,
    * Internet i publikowanie w sieci,
    * Projekt dyplomowy,
    * Programowanie liniowe,
    * Podstawy programowania,
    * Podstawy teorii sterowania optymalnego,
    * Matematyczne podstawy logistyki,
    * Technologie internetowe,
    * Modele różnicowe i różniczkowe w logistyce,
    * Analiza matematyczna dla informatyków.
  - Promotor prac magisterskich z matematyki (4 prace).
  - Promotor prac licencjackich z informatyki (44 prace).
  - Recenzent prac magisterskich i licencjackich z matematyki oraz informatyki (14 prac).
- **Osiągnięcia organizacyjne**
  - Udział w komisjach rekrutacyjnych.
  - Udział w organizacji konkursu Matematyka Moja Pasja przeprowadzonego przez Wydział Matematyki i Informatyki UŁ.
  - Członek Wydziałowej Komisji Oceniającej,
  - Członek Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ,
  - Członek zespołu ds. kierunku studiów Analiza Danych I i II stopnia.
- **Popularyzacja nauki**
  - Wykłady gościnne o tematyce popularno-naukowej w szkołach średnich promujące matematykę i informatykę.

7 Inne informacje dotyczące kariery naukowej

- Indywidualne nagrody (I stopnia) Rektora Uniwersytetu Łódzkiego za osiągnięcia naukowe uzyskane w latach: 2015, 2016, 2018, 2021.
- Nagrody Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego za osiągnięcia naukowe uzyskane w latach: 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022.

RK

Literatura

[1] O. P. Agrawal, *A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems*, Nonlinear Dynamics 38(1), (2004), 323–337.

[2] M. Allen, L, Caffarelli, A. Vasseur, *Porous medium flow with both a fractional potential pressure and fractional time derivative*, Chinese Annals of Mathematics 38(1), (2017), 45–82.

[3] R. Almeida, R. Kamocki, A.B. Malinowska, T. Odzijewicz, *On the existence of optimal consensus control for the fractional Cucker–Smale model*, Archives of Control Sciences 30(4), (2020), 625–651.

[4] D. Applebaum, *Lévy processes - from probability to finance and quantum groups*, Notices of the American Mathematical Society 51, (2004), 1336–1347.

[5] H. Attouch, G. Butazzo, G. Michaille, Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces, Siam-Mps, Philadelphia, 2006.

[6] R. L. Bagley, P. J. Torvik, *On the fractional calculus model of Viscoelastic behaviour*, Journal of Rheology 30(1), (1986), 133–155.

[7] L.D. Berkovitz, Optimal Control Theory. Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.

[8] A. Bermudez, C. Saguez, *Optimal control of a Signorini problem*, SIAM Journal on Control and Optimization 25, (1987), 576–582.

[9] K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, Z. Vondracek, Potential Theory of Stable Processes and its Extensions, Lecture Notes in Mathematics 1980, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.

[10] L. Bourdin, D. Idczak, *Fractional fundamental lemma and fractional integration by parts formula - Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems*, Advances in Differential Equations 20, (2015), 213–232.

[11] A. Bressan, B. Piccoli, Introduction to the Mathematical Theory of Control, vol. 2 of AIMS Series on Applied Mathematics, American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO. 2007.

[12] A. E. Bryson, Jr., Y. C. Ho, Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control, Hemisphere Publishing Corp. Washington, D. C., 1975.

[13] L. A. Caffarelli, S. Salsa, L. Silvestre, *Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian*, Inventiones Mathematicae 171, (2008), 425–461.

[14] L. A. Caffarelli, A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi–geostrophic equation*, Annals of Mathematics 171, (2010), 1903–1930.

[15] M. Caponigro, M. Fornasier, B. Piccoli, E. Trélat, *Sparse stabilization and control of the Cucker–Smale model*, Mathematical Control and Related Fields 3(4), (2013), 447–466.

RK

[16] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II*, Geophysical Journal International 13(5), (1967), 529–539.

[17] L. Cesari, Optimization–Theory and Applications. Springer, New York, 1983.

[18] Z.-Q. Chen, R. Song, *Two-sided eigenvalue estimates for subordinate Brownian motion in bounded domains*, Journal of Functional Analysis 226, (2005), 90–113.

[19] F. Cucker, S. Smale, *On the mathematics of emergence*, Japanese Journal of Mathematics 2(1), (2007), 197–227.

[20] A. Dzieliński, D. Sierociuk, G. Sarwas, *Comparision and validation of integer and fractional order ultracapacitor models*, Advances in Difference Equations 11, (2011), 1–15.

[21] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres, *Fractional optimal control in the sense of Caputo and the fractional Noether's theorem*, International Mathematical Forum 3 (2008), 479–493.

[22] T. L. Guo, *The necessary conditions of fractional optimal control in the sense of Caputo*, Journal of Optimization Theory and Applications 156, (2013), 115–126.

[23] R. Hegselmann, U. Krause, *Opinion dynamics and bounded confidence, models, analysis and simulation*, Journal of Artifical Societies and Social Simulation 5(3), (2002), 1–33.

[24] N. Heymans, I. Podlubny, *Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann–Liouville fractional derivatives*, Rheologica Acta 45, (2006), 765–771.

[25] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific: Singapore, 2000.

[26] A. D. Ioffe, V. M. Tikchomirov, Theory of Extremal Problems, Elsevier, North-Holland, 1979.

[27] D. Idczak, *A bipolynomial fractional Dirichlet–Laplace problem*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2019(59), (2019), 1–17.

[28] D. Idczak, M. Majewski, S. Walczak, *Stability analysis of solutions to an optimal control problem associated with a Goursat–Darboux problem*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science 13(1), (2003), 29–44.

[29] D. Idczak, S. Walczak, *On the existence of a solution for some distributed optimal control hyperbolic system*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 23(5), (2000), 297–311.

[30] D. Idczak, S. Walczak, *Lagrange problem for fractional ordinary elliptic system via Dubovitskii–Milyutin method*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control 25(2), (2020), 321–340.

[31] D. Idczak, S. Walczak, *Existence of optimal control for an integro–differential Bolza problem*, Optimal Control Applications and Methods 41(5), (2020), 1604–1615.

RK

[32] Z. D. Jelicic, N. Petrovacki, *Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems*, Structural and Multidisciplinary Optimization 38, (2009), 571–581.

[33] T. Kaczorek, *Positive linear systems consisting of n subsystems with different fractional orders*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I 58(6), (2011), 1203–1210.

[34] R. Kamocki, *Fractional Roesser problem and its optimization*, Banach Center Publications 101, (2014), 93–106.

[35] R. Kamocki, *Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 37, (2014), 1668–1686.

[36] R. Kamocki, *On the existence of optimal solutions to fractional optimal control problems*, Applied Mathematics and Computation 235, (2014), 94–104.

[37] R. Kamocki, *Necessary and sufficient optimality conditions for fractional nonhomogeneous Roesser model*, Optimal Control Applications and Methods 37(4), (2016), 574–589.

[38] R. Kamocki, *Existence of optimal control for multi-order fractional optimal control problems*, Archives of Control Sciences 32(LXVIII) No. 2, (2022), 279–303.

[39] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier: Amsterdam, 2006.

[40] M. Kisielewicz, Differential Inclusions and Optimal Control, PWN with Kluwer Academic Puplishers, Warsaw–Dordrecht, 1991.

[41] R. C. Koeller, *Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*, Journal of Applied Mechanics 51(2), (1984), 299–307.

[42] M. Kwaśnicki. *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Fractional Calculus and Applied Analysis 20(1), (2017), 7–51.

[43] E.B. Lee, L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory. Wiley, New York, 1967.

[44] J. Macki, A. Strauss, Introduction to Optimal Control Theory. Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[45] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, Fractional Calculus and Applied Analysis 4(2), (2001), 153–192.

[46] F. Mainardi, A. Mura, G. Pagnini, *The M–Wright Function in Time-Fractional Diffusion Processes: A Tutorial Survey*. International Journal of Differential Equations 2010 (2010).

[47] A. B. Malinowska, D. F. M. Torres, Introduction to the Fractional Calculus of Variations, Imperial College Press, London, 2012.

RK

[48] F. C. Meral, T. J. Royston, R. Magin, *Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 15(4), (2010), 939– 945.

[49] K. S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York, 1993.

[50] D. Mozyrska, D.F.M. Torres, *Modified optimal energy and initial memory of fractional continuous-time linear systems*, Signal Processing 91(3), (2011), 379–385.

[51] K. Nishimoto, Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order. University of New Haven Press, New Haven, 1989.

[52] K. B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[53] Cz. Olech, *A characterization of L^1-weak lower semicontinuity of integral functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 25(2), (1977), 135–142.

[54] D. Pang, W. Jiang, A.U.K Niazi, J. Sheng, *Existence and optimal controls for nonlocal fractional evolution equations of order* $(1, 2)$ *in Banach spaces*, Advances in Difference Equations 2021, 302 (2021).

[55] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, 1999.

[56] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Translated from the Russian by K. N. Trirogoff; edited by L. W. Neustadt, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York–London, 1962.

[57] S. Pooseh, R. Almeida, D. F. M. Torres, *Fractional order optimal control problems with free terminal time*, Journal of Industrial and Management Optimization 10 (2014), 363–381.

[58] R. T. Rockafellar (1976) Integral functionals, normal integrands and measurable selections. In: Gossez J.P., Lami Dozo E.J., Mawhin J., Waelbroeck L. (eds) Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. Lecture Notes in Mathematics, vol 543. Springer, Berlin, Heidelberg (2006).

[59] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives and Some their Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[60] H. Schättler, U. Ledzewicz, Geometric Optimal Control, vol. 38 of Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, New York, 2012

[61] V. Uchaikin, R. Sibatov, D. Uchaikin, *Memory regeneration phenomenon in dielectrics: the fractional derivative approach*, Physica Scripta, vol. 2009, no. T136, 014002, (2009).

[62] J. L. Vázquez, *Recent progress in the theory of nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S 7, (2014), 857–885.

RK

[63] R. Vinter, Optimal control, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

[64] S. Walczak, *Absolutely continuous functions of several variables and their application to differential equations*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 35(11–12), (1987), 732–744.

[65] S. Westerlund, *Dead matter has memory*, Physica Scripta 43(2):174, (1991).

[66] S. Westerlund, L. Ekstam, *Capacitor theory*, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation 1, (1994), 826–839.

[67]] S. Wongkaew, M. Caponigro, A. Borzi, *On the control through leadership of the Hegselmann–Krause opinion formation model*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 25(3), (2015), 565–585.

[68] D. Xu, Y. Li, W. Zhou, *Controllability and observability of fractional linear systems with two different orders*, The Scientific World Journal 2014, (2014), Article ID 618162, 8 pages.

[69] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 328, (2007), 1075–1081.

Rafał Kamocki