

# Autoreferat

## 1 Imię i nazwisko

**Justyna Szpond**

## 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- Doktor nauk matematycznych, w zakresie matematyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, czerwiec 2006,

Temat rozprawy: *Idealy wielomianowe w pierścieniu funkcji holomorficznych*

Promotor: Tadeusz Winiarski

- Magister nauk matematycznych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, czerwiec 2002,

Temat pracy magisterskiej: *Twierdzenie chińskie o resztach*

Promotor: Tadeusz Winiarski

## 3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, październik 2020 – wrzesień 2021  
adiunkt, okresowe stanowisko badawcze
- Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, październik 2014 – nadal  
adiunkt
- Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, październik 2002 – wrzesień 2014  
asystent

## 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

Pogrubione liczby na końcu każdej pozycji są aktualną liczbą cytowań według Web of Science. Numery zapisane kursywą są aktualną liczbą cytowań według Google Scholar. Podanie również tych wskaźników wydaje się uzasadnione, z uwagi na to, że wyniki zamieszczone w tych pracach są stosunkowo nowe, a tym samym niewiele z cytujących je prac zdążyło się już ukazać.

## Artykuły wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego

- [Hab1] **Szpond, J.:** Unexpected hypersurfaces with multiple fat points, *Journal of Symbolic Computation*, DOI: 10.1016/j.jsc.2020.07.018, (**WOS: 0**, *GS: 8*)
- [Hab2] Bauer, T., Malara, G., Szemberg, T., **Szpond, J.:** Quartic unexpected curves and surfaces, *manuscripta math.* 161 (2020), 283 – 292 , (**WOS: 6**, *GS: 25*)
- [Hab3] **Szpond, J.:** Unexpected curves and Togliatti-type surfaces, *Math. Nachr.* 293 (2020), 158 – 168, (**WOS: 2**, *GS: 10*)
- [Hab4] **Szpond, J.:** Fermat-type arrangements, In: Stamate D., Szemberg T. (eds) *Combinatorial Structures in Algebra and Geometry. NSA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol 331. p. 161 – 182, Springer, Cham, 2020, (**WOS: 0**, *GS: 14*)
- [Hab5] Malara, G., **Szpond, J.:** Fermat-type configurations of lines in  $\mathbb{P}^3$  and the containment problem, *J. Pure Appl. Algebra*, **222** (2018), 2323 – 2329, (**WOS: 4**, *GS: 11*)
- [Hab6] Malara, G., **Szpond, J.:** On codimension two flats in Fermat-type arrangements, *Multigraded algebra and applications*, 95 – 109, Springer Proc. Math. Stat., 238, Springer, Cham, 2018, (**WOS: 3**, *GS: 13*)
- [Hab7] Lampa-Baczyńska, M., **Szpond, J.:** From Pappus Theorem to parameter spaces of some extremal line point configurations and applications, *Geom. Dedicata*, 188 (2017), 103 – 121, (**WOS: 5**, *GS: 9*)

### 4.1 Wprowadzenie: konfiguracje typu Fermata

Konfiguracje hiperpłaszczyzn są klasycznym obiektem badań w matematyce. Pojawiają się one w różnych działach matematyki: kombinatoryce (np. Peter Orlik i Louis Solomon [36]), algebrze przemiennej (np. Isabella Novik, Alexander Postnikov i Bernd Sturmfels [35]), teorii reprezentacji (np. Gustav Lehrer [29]), geometrii algebraicznej (np. Xavier Roulleau i Giancarlo Urzúa [38]), geometrii przestrzeni analitycznych (np. Pierre Deligne [13]).

Konfiguracje pochodzące od grup odbić, ze względu na symetrie, posiadają szczególnie ciekawe własności. Przypomnijmy, że liniowy automorfizm  $g \in \text{GL}(V)$  skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej  $V$  nazywamy odbiciem, jeśli  $g^n = \text{id}$  dla pewnego  $n$ , oraz dokładnie  $\dim(V) - 1$  wartości własnych  $g$  jest równe 1. Skończona grupa  $G \subset \text{GL}(V)$  jest grupą odbić, jeśli jest generowana przez odbicia. Słynny wynik Shepharda i Todda [39] klasyfikuje wszystkie skończone grupy odbić. Konfiguracją pochodzącą od grupy odbić  $G$  nazywamy skończony układ hiperpłaszczyzn w  $V$  wyznaczonych przez wszystkie odbicia w tej grupie. Tego typu konfiguracje przyciągnęły ostatnio sporo uwagi w pewnych nowych obszarach algebry przemiennej (problem zawierania) i geometrii algebraicznej (hipoteza o ograniczonej ujemności, czy specjalne systemy liniowe), gdzie pomogły w konstrukcji interesujących przykładów i kontrprzykładów.

Wśród grup odbić jest nieskończona seria grup oznaczanych przez  $G(n, n, N + 1)$ . Grupa  $G(n, n, N + 1) \subseteq \text{GL}(\mathbb{C}^{N+1})$  składa się z jednomianowych macierzy, których elementami są  $n$ -te pierwiastki z jedynki z zastrzeżeniem warunku, że ich iloczyn jest równy 1. Przypomnijmy, że macierz nazywamy jednomianową, jeśli w każdej kolumnie i w każdym wierszu tylko jeden element jest niezerowy.

Hiperpłaszczyzny odbić zadane przez elementy z  $G(n, n, N + 1)$  są dane równaniami

$$x_i - \varepsilon^\alpha x_j = 0,$$

gdzie  $\varepsilon$  jest  $n$ -tym pierwiastkiem z jedynki, natomiast  $\alpha \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Są to dokładnie czynniki liniowe wielomianu typu Fermata

$$F_{N,n}(x_0 : \dots : x_N) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (x_i^n - x_j^n).$$

Numeracja zmiennych użyta powyżej sugeruje, że te hiperpłaszczyzny rozważamy w przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}^N(V)$ . Wprowadźmy rozszerzone wielomiany zdefiniowane następująco:

$$F_{N,n,N}(x_0 : \dots : x_N) = x_0 \cdot \dots \cdot x_N \cdot F_{N,n}(x_0 : \dots : x_N),$$

oraz ich pośrednie odpowiedniki:

$$F_{N,n,k}(x_0 : \dots : x_N) = x_0 \cdot \dots \cdot x_k \cdot F_{N,n}(x_0 : \dots : x_N).$$

**Definicja 1** Konfiguracją typu Fermata (rozszerzoną, pośrednią, odpowiednio)  $\mathcal{F}_N^n$  ( $\mathcal{F}_{N,N}^n$ ,  $\mathcal{F}_{N,k}^n$ , odpowiednio) nazywamy zbiór hiperpłaszczyzn w  $\mathbb{P}^N$  opisanych przez liniowe czynniki wielomianu  $F_{N,n}$  ( $F_{N,n,N}$ ,  $F_{N,n,k}$ , odpowiednio).

**Uwaga 2** Tradycyjnie nazwa konfiguracja Fermata jest kojarzona z konfiguracją prostych w  $\mathbb{P}^2$  definiowaną przez

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n) = 0.$$

Motywacja dla tej nazwy pochodzi z faktu, że konfiguracja ta to dokładnie miejsca zerowe elementów osobliwych w pęku krzywych

$$C_{\lambda:\mu} : \lambda(x^n - y^n) + \mu(y^n - z^n) = 0,$$

w którym wszystkie nieosobliwe elementy są izomorficzne z krzywą Fermata

$$x^n + y^n + z^n = 0.$$

W przypadku  $n = 3$  otrzymujemy dobrze znaną dualną konfigurację Hessego wyznaczoną przez proste dualne do 3-torsyjnych punktów na krzywej eliptycznej

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Konstrukcja wyżej wymiarowych konfiguracji typu Fermata z konfiguracji w niższym wymiarze, jest prostym przykładem metody którą nazywam ustozkowieniem.

Dla  $N = 1$ , hiperpłaszczyznami są dokładnie punkty w  $\mathbb{P}^1$  dane przez równanie

$$x_0^n - x_1^n = 0.$$

A zatem, są one wyznaczone przez  $n$ -te pierwiastki z jedynki

$$(1 : 1), (1 : \varepsilon), (1 : \varepsilon^2), \dots, (1 : \varepsilon^{n-1}), \quad (1)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest prymitywnym  $n$ -tym pierwiastkiem z jedynki. Dla  $n = 5$  punkty te są przedstawione na Rysunku 1a.

Następnie, wprowadzamy nową zmienną  $x_2$ , oraz zamurzamy powyższe punkty w  $\mathbb{P}^2$ , na przykład w następujący sposób

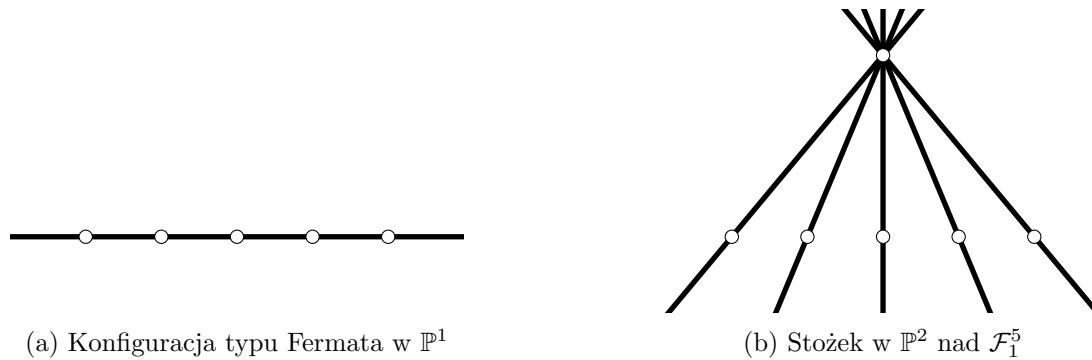
$$(1 : 1 : 0), (1 : \varepsilon : 0), (1 : \varepsilon^2 : 0), \dots, (1 : \varepsilon^{n-1} : 0).$$

Łącząc je z wierzchołkiem o współrzędnych  $(0 : 0 : 1)$  otrzymujemy  $n$  prostych, które są zbiorem zer tego samego wielomianu

$$x_0^n - x_1^n = 0,$$

rozważanego teraz jako wielomian zmiennych  $x_0$ ,  $x_1$  oraz  $x_2$ . Dla  $n = 5$  ilustruje to Rysunek 1b. Można oczywiście powtórzyć to rozumowanie rozszerzając współrzędne punktów z (1) przez dodanie zera na początku lub w środku. Suma stożków, otrzymanych w tej procedurze, to dokładnie zbiór zer wielomianu

$$(x_0^n - x_1^n)(x_1^n - x_2^n)(x_2^n - x_0^n) = 0,$$



Rysunek 1: Ustożkowanie konfiguracji typu Fermata dla  $n = 5$

czyli  $F_{2,n}$ .

Przechodząc od  $\mathbb{P}^2$  do  $\mathbb{P}^3$ , rozważamy cztery stożki o wierzchołkach w punktach fundamentalnych (tj.  $(1 : 0 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1 : 0)$  i  $(0 : 0 : 0 : 1)$ ) w  $\mathbb{P}^3$  nad konfiguracją Fermata prostych w uzupełniającej płaszczyźnie. Każdy stożek składa się z  $n$  płaszczyzn. Każda z tych płaszczyzn jest generowana przez wierzchołek stożka i proste w uzupełniającej płaszczyźnie. Postępując analogicznie można skonstruować konfigurację typu Fermata w dowolnej przestrzeni  $\mathbb{P}^N$ .

Warto wspomnieć, że w szczególnym przypadku  $n = 1$  wielomian  $F_{N,1}$  jest wyznacznikiem Vandermonde'a

$$F_{N,1}(x_0 : \dots : x_N) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \dots & x_N^N \end{pmatrix}.$$

Odpowiadająca mu (bardzo prosta) konfiguracja jest znana jako konfiguracja warkocza. Odgrywa ona ważną rolę w algebraicznej kombinatoryce.

Przechodząc do osiągnięcia, moje badania w ostatnich latach były motywowane dwoma głównymi nurtami, które przyciągnęły sporo uwagi w geometrii algebraicznej i algebrze przemiennej:

- problem zawierania i
- istnienie niespodziewanych hiperpowierzchni.

Studiowanie konfiguracji hiperpłaszczyzn w przestrzeniach rzutowych, w przypadku powyższych obszarów badań, odrywa znaczącą rolę. Moim wkładem w tematykę oraz jednocześnie koncepcją łączącą oba kierunki badawcze jest systematyczne studiowanie konfiguracji Fermata hiperpłaszczyzn oraz pochodzących od nich obiektów. Dokładniej, interesują nas podprzestrzenie rzutowe, tzn. zbiory punktów, prostych, płaszczyzn itd., wyznaczone przez konfiguracje Fermata, ich ideały, pewne modyfikacje tych ideałów i układy punktów dualne do hiperpłaszczyzn. Obiekty te są obecne, w tej lub innej formie, we wszystkich pracach wchodzących w skład opisywanego osiągnięcia, a pomysł ich studiowania doprowadził do istotnych postępów w obu obszarach badawczych.

Poniżej podam wprowadzenie do teorii stojącej za tymi badaniami, oraz przedstawię swoje wyniki w perspektywie rozwoju dyscypliny. Najpierw jednak przedstawię krótko główne wyniki pochodzące z prac wchodzących w skład osiągnięcia.

Artykuły [Hab5] oraz [Hab6] wykorzystują podprzestrzenie rzutowe zdefiniowane przez konfiguracje typu Fermata w  $\mathbb{P}^3$  oraz, odpowiednio, w  $\mathbb{P}^N$  dla  $N \geq 3$  do zilustrowania faktu, że zawieranie  $I^{(3)} \subseteq I^2$  nie zachodzi dla konfiguracji podprzestrzeni rzutowych kowymiaru 2 w przestrzeniach rzutowych. Wynik ten uogólnia wcześniejsze rezultaty tego typu dla punktów w  $\mathbb{P}^2$ .

Artykuł [Hab7] również dotyczy problemu zawierania. Podczas gdy większość konfiguracji typu Fermata nie może być zrealizowana nad ciałem liczb rzeczywistych, w pracy pokazujemy, że konfiguracje prostych rzeczywistych wprowadzone przez Böröczkyego posiadają 1-wymiarową przestrzeń deformacji. Studiując konfigurację Böröczkyego 12 prostych, mieliśmy szczęście, gdyż, wydaje się, że jest to jedyny przypadek, który dopuszcza deformację zdefiniowaną nad  $\mathbb{Q}$ . Dzięki temu [Hab7] zawiera pierwszy kontrprzykład na zawieranie  $I^{(3)}$  w  $I^2$  dla ideału punktów o wymiernych współrzędnych.

W pracy [Hab4] rozważam konfiguracje typu Fermata z punktu widzenia problemu zawierania, jak również istnienia niespodziewanych hiperpowierzchni. W szczególności zawiera ona pierwszy przykład nieskończonej serii niespodziewanych krzywych z punktem ogólnym krotności 4, podczas gdy stopień krzywej rośnie do nieskończoności. Przykład ten jest ściśle związany z konfiguracją Fermata prostych. [Hab4] systematyzuje i uzupełnia wyniki dotyczące konfiguracji typu Fermata rozsiane po literaturze.

W pracy [Hab2] przedstawiamy pierwszy przykład niespodziewanej powierzchni w  $\mathbb{P}^3$ . Wcześniej problem ten był rozważany tylko dla krzywych w  $\mathbb{P}^2$ . Podajemy również, zaskakująco proste, równania pewnych niespodziewanych krzywych i powierzchni oraz inicjujemy badania nad zależnością, która obecnie nazywana jest BMSS-dualnością.

Idea ta została znacząco rozszerzona w pracy [Hab3], która ukazuje bezpośrednie powiązanie teorii niespodziewanych hiperpowierzchni, własności typu Lefschetza i wyżej wymiarowych przestrzeni oskulujących rozmaitości zanurzonych. Artykuł zawiera szczegółowe opisy wszystkich tych obiektów dla konfiguracji prostych pochodzącej od systemu pierwiastkowego  $B3$ , która jest szczególnym przypadkiem rozszerzonej konfiguracji Fermata.

Wreszcie, artykuł [Hab1] łączy konfiguracje typu Fermata i metodę ustożkowania w celu przedstawienia pierwszego (i jak do tej pory jedynego) przykładu niespodziewanej hiperpowierzchni z kilkoma ogólnymi punktami wielokrotnymi. Dokładniej, praca zawiera czysto teoretyczny dowód istnienia nieoczekiwanej hiperpowierzchni o tej własności w  $\mathbb{P}^5$ , dowód komputerowy dla  $\mathbb{P}^7$  i  $\mathbb{P}^9$  oraz hipotezę o istnieniu niespodziewanej hiperpłaszczyzny z  $k$  ogólnymi punktami wielokrotnymi w  $\mathbb{P}^{2k+1}$  dla  $k \geq 5$ .

## 4.2 Problem zawierania

W pierwszej części przedstawię podstawy teorii. Wspólna praca z Tomaszem Szembergim [42] zawiera znacznie dokładniejsze wprowadzenie w problem.

Niech  $\mathbb{K}$  będzie ciałem,  $I$  ideałem jednorodnym w pierścieniu  $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ . Rozważmy dwie rodziny ideałów związane z ideałem  $I$ . Pierwsza dana jest przez potęgi zwykle, zwane także potęgami algebraicznymi ideału  $I$

$$R \supseteq I \supset I^2 \supset I^3 \supset I^4 \supset \dots \quad (2)$$

Druga rodzina jest zdefiniowana przez potęgi symboliczne ideału  $I$

$$R \supseteq I \supset I^{(2)} \supset I^{(3)} \supset I^{(4)} \supset \dots \quad (3)$$

Przypomnijmy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $m$ , definiujemy  $m$ -tą potęgę symboliczną  $I^{(m)}$  ideału  $I$  następująco

$$I^{(m)} = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I)} (R \cap (I^m)_P),$$

gdzie przecięcie brane jest w ciele ułamków  $R$ , natomiast  $\text{Ass}(I)$  oznacza zbiór ideałów pierwszych stwarzyszonych z ideałem  $I$ . Fundamentalnym pytaniem, jakie pojawia się w tym kontekście, jest pytanie o istnienie jakiegokolwiek regularności w zawieraniu pomiędzy elementami obu rodzin niezależnie od wyboru ideału  $I$ .

Podczas gdy łatwo zauważyć, że zawieranie  $I^r \subseteq I^{(m)}$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $r \geq m$  to pytanie o odwrotne zawieranie jest dużo bardziej skomplikowane.

**Problem 3 (Problem zawierania)** Dla ustalonego pierścienia  $R$ , określić dla jakich  $m$  i  $r$  zachodzi zawieranie

$$I^{(m)} \subseteq I^r$$

dla dowolnego ideału właściwego  $I \subset R$ .

Sugestia, że taka regularność zachodzi, pojawiła się w pracy Swanson [41]. Na początku tego tysiąclecia dwie niezależne grupy naukowców przedstawiły następujący wynik.

**Twierdzenie 4 (Ein-Lazarsfeld-Smith oraz Hochster-Huneke)** Niech  $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$  będzie dowolnym ideałem jednorodnym. Wtedy

$$I^{(m)} \subseteq I^r \tag{4}$$

zachodzi dla wszystkich  $m \geq N \cdot r$ .

Ein, Lazarsfeld i Smith w [19] udowodnili Twierdzenie 4 w charakterystyce 0 używając ideałów mnożników, natomiast Hochster i Huneke w [27] pracowali w skończonej charakterystyce używając ścisłych domknięć. Ostatnio, Twierdzenie 4 zostało uogólnione do mieszanej charakterystyki przez Ma i Schwede w [30]. Co ciekawe, nie jest znany ani jeden przykład pokazujący, że ograniczenia na  $m$  i  $r$  w (4) są ostre. Zwykle zawieranie zachodzi dla wartości  $m$  mniejszych niż by to wynikało z ograniczenia w (4). Tak zwane konfiguracje gwiazdziste, zob. [22], dają serię przykładów, dla których założenie  $m \geq Nr - (N - 1)$  jest konieczne. Ta obserwacja popchnęła Hunekego do zadania pytania czy dla dowolnego ideału radykalnego  $I$  punktów w  $\mathbb{P}^2$  zachodzi zawieranie  $I^{(3)} \subseteq I^2$ . Równoległe Ein zapytał o prosty (nieodwołujący się do ideałów mnożników i twierdzeń typu Skody) dowód dla zawierania  $I^{(4)} \subseteq I^2$ . Pytanie Hunekego zostało rozszerzone przez Harbourne'a. Jego prace w tej tematyce, najpierw z Boccim [9], [10], a następnie z Huneke doprowadziły do sformułowania następującego problemu.

**Problem 5 (zob. [24, Conjecture 4.1.1])** Niech  $I$  będzie ideałem jednorodnym w pierścieniu wielomianów. Załóżmy, że zbiór zer ideału  $I$  składa się z skończonej liczby punktów w przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}^N$ . Czy zawieranie

$$I^{(m)} \subseteq I^r$$

zachodzi dla wszystkich  $m \geq Nr - (N - 1)$ ?

Pierwszy, nietrywialny przypadek pojawia się dla  $N = r = 2$ , co jest dokładnie pytaniem o zawieranie  $I^{(3)} \subseteq I^2$ . Zatem tak postawiony problem jest uogólnieniem pytania Hunekego.

W 2013 roku Dumnicki, Szemberg i Tutaj-Gasińska przedstawili w [18] pierwszy kontrprzykład. Niech  $I$  będzie ideałem 12 punktów przecięcia konfiguracji dualnej Hessego. Wtedy

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Ideal ten jest niemal zupełnym przecięciem  $i$ , w odpowiednich współrzędnych, jest generowany przez następujące wielomiany

$$I = \langle x(y^3 - z^3), y(z^3 - x^3), z(x^3 - y^3) \rangle.$$

Punkty ideału  $I$  są dokładnie punktami przecięcia konfiguracji prostych zdefiniowanych przez liniowe czynniki wielomianu

$$F_{2,3}(x, y, z) = (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3). \tag{5}$$

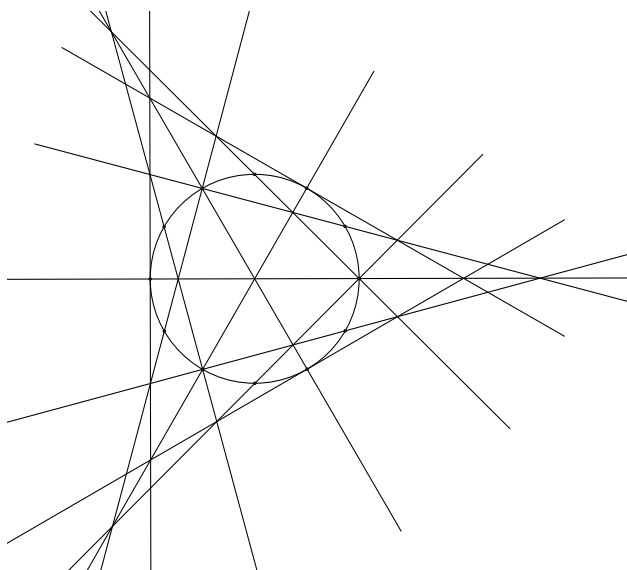
To właśnie w tym momencie konfiguracje wkraczają na scenę. Przykład ten spowodował pojawienie się nowych problemów i rozwój badań w wielu nowych kierunkach.

Po pierwsze, konfiguracja zdefiniowana przez czynniki wielomianu (5) nie jest zdefiniowana nad ciałem liczb rzeczywistych, więc pojawiło się pytanie, czy istnieją tego typu przykłady nad ciałem liczb rzeczywistych lub wymiernych. Harbourne i Seceleanu przedstawili listę kontrprzykładów w skończonej charakterystyce w pracy [26].

Pierwszy kontrprzykład nad ciałem liczb rzeczywistych został przedstawiony przez grupę matematyków z Uniwersytetu Jagiellońskiego i Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, zob. [12]. Natomiast pierwszy kontrprzykład nad ciałem liczb wymiernych został dokładnie opisany w mojej wspólnej pracy z Magdaleną Lampą-Baczyńską [Hab7]. Wszystkie kontrprzykłady, wspomniane do tej pory, są oparte na ideałach punktów, które są punktami przecięcia zadziwiająco symetrycznych konfiguracji prostych.

Konfiguracja zdefiniowana przez (5) nazywana jest dualną konfiguracją Hessego. Składa się z 9 prostych, które przecinają się po trzy w 12 punktach, i są to jedyne punkty przecięcia tych prostych. Na podstawie słynnego Twierdzenia Sylwestera-Gallaiego wiemy, że konfiguracja ta nie może być zrealizowana nad ciałem liczb rzeczywistych. Również wiadomo, że wszystkie konfiguracje 9 zespolonych prostych z 12 potrójnymi punktami osobliwymi są rzutowo równoważne z konfiguracją zdefiniowaną przez (5).

Pierwszy przykład na niezawieranie  $I^{(3)} \not\subseteq I^2$  nad ciałem liczb rzeczywistych opiera się na wprowadzonej przez Böröczykego konfiguracji 12 prostych, zob. Rysunek 2. Rola okręgu na tym rysunku, jest wyjaśniona w podanej poniżej konstrukcji.



Rysunek 2: Konfiguracja Böröczykego 12 prostych

Konfiguracja ta nie jest zdefiniowana nad ciałem liczb wymiernych. Dokładniej, konfiguracja Böröczykego w rzeczywistej płaszczyźnie afinicznej jest konstruowana w następujący sposób.

Niech  $\mathcal{C}$  będzie okręgiem jednostkowym o środku w zerze, tzn.  $\mathcal{C}$  jest zbiorem zer wielomianu  $\mathcal{C}(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Niech  $P(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  oznacza punkt na okręgu  $\mathcal{C}$  i niech  $L(\alpha)$  będzie prostą łączącą punkty  $P(\alpha)$  oraz  $P(\pi - 2\alpha)$ . Jeśli  $P(\alpha) = P(\pi - 2\alpha)$ , to  $L(\alpha)$  definiujemy jako prostą styczną do  $\mathcal{C}$  w punkcie  $P(\alpha)$ .

**Definicja 6** Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą całkowitą. Konfiguracją Böröczykego  $B_n$  nazywamy konfigurację składającą się z prostych

$$B_n = \left\{ L(0), L\left(\frac{1}{n}2\pi\right), \dots, L\left(\frac{n-1}{n}2\pi\right) \right\}.$$

Przykłady Böröczykego pojawiły się w kontekście Hipotezy Diraca-Motzkina, która przewiduje, że jeśli  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_s\}$  jest konfiguracją  $s$  prostych w rzeczywistej, afinicznej (lub rzutowej) płaszczyźnie, nietworzącą pęku, to istnieje co najmniej  $\frac{s}{2}$  punktów, w których dokładnie 2 proste z konfiguracji się przecinają (tzn. punkty podwójne). Przykłady Böröczykego mają liczbę punktów podwójnych bliską temu ograniczeniu. Hipoteza ta została ostatnio rozwiązana dla dużych  $s$  przez Greena and Tao [23].

### 4.2.1 Nowa konstrukcja pewnych deformacji konfiguracji $B_{12}$

We wspólnej pracy z Magdaleną Lampą-Baczyńską [Hab7] zaobserwowałyśmy, że konfiguracje Böröczkyego nie są sztywne, to znaczy dopuszczają pewne deformacje, które są parametryzowane przez krzywą algebraiczną. Konstrukcja przestrzeni parametrów dla konfiguracji  $B_{12}$  przedstawiona poniżej jest delikatną modyfikacją tej przedstawionej w pracy [Hab7] i dlatego też przedstawię ją w szczególach. Z drugiej strony, dla ułatwienia, utrzymam oznaczenia z pracy [Hab7]. Stąd punkty nie pojawiają się w kolejności alfabetycznej. Rysunek 3 pochodzi dokładnie z [Hab7]. Konstrukcje przestrzeni parametrów dla konfiguracji Böröczkyego z większą liczbą prostych są podobne, więc ograniczę się tylko do 12 prostych, natomiast wyniki są zebrane w Propozycji 9.

Ponieważ każde dwie proste w rzutowej płaszczyźnie są rzutowo równoważne, możemy założyć, zob. Rysunek 3, że punkty  $F$ ,  $D$ ,  $L$  oraz  $E$  mają następujące współrzędne

$$F = (1 : 0 : 0), \quad D = (0 : 1 : 0), \quad L = (0 : 0 : 1), \quad E = (1 : 1 : 1).$$

Punkty te wyznaczają następujące proste

$$EF : y - z = 0, \quad DE : x - z = 0, \quad EL : x - y = 0.$$

Dane te (to znaczy 4 punkty i 3 proste) są danymi wejściowymi konstrukcji. Natomiast nie wystarczają do jej dokończenia. Koniecznym jest wybranie dodatkowego punktu

$$A = (a : a : b)$$

na prostej  $EL$ , różnego od punktu  $E$  i  $L$ , tzn. przy założeniu  $a \neq b$  i  $a \neq 0$ . Wybór  $(a : b)$  pozwala na dokończenie konstrukcji. Kluczową własnością tej konfiguracji jest fakt, że dziedziczy ona wszystkie własności kombinatoryczne  $B_{12}$  dla dowolnych wartości  $(a : b) \in \mathbb{P}^1 \setminus \{(0 : 1), (1 : 1), (1 : 0)\}$ . Konstrukcja polega teraz na wyznaczaniu prostych przez dane punkty i punktów przecięć danych prostych. Postępując w ten sposób możemy dokończyć konstrukcję.

Na przykład, w pierwszym kroku procedury otrzymamy proste

$$\begin{aligned} AF & : by - az = 0, \\ AD & : bx - az = 0. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy punkty przecięcia

$$\begin{aligned} J = AF \cap ED & = (b : a : b), \\ K = AD \cap EF & = (a : b : b), \end{aligned}$$

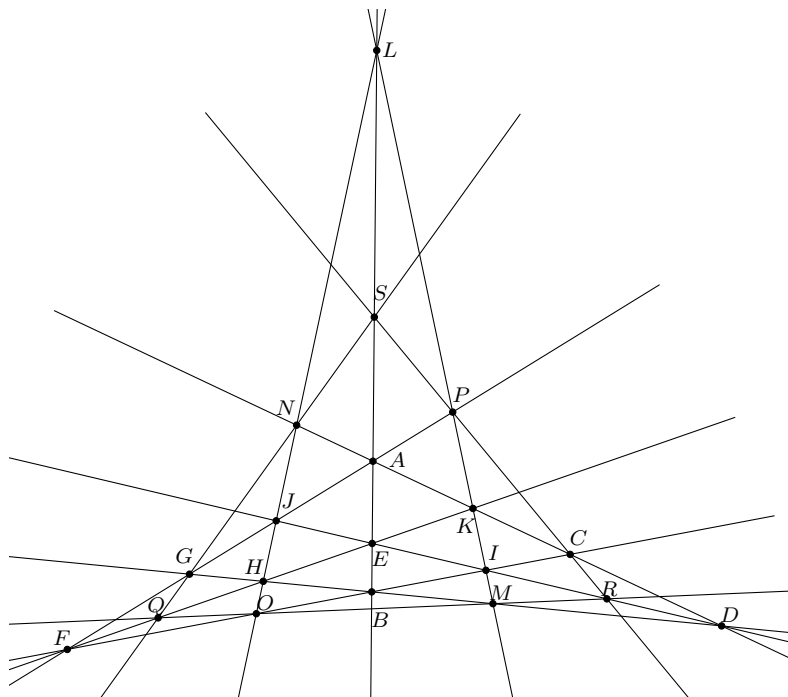
które, w szczególności narzucają warunek  $b \neq 0$ .

Kontynuując, wyznaczamy proste  $JL$ ,  $KL$ , punkty  $H$ ,  $I$ ,  $P$ ,  $N$ , proste  $FI$ ,  $DH$ , punkty  $C$ ,  $G$ ,  $B$ ,  $O$ ,  $M$ , proste  $GN$ ,  $CP$ , oraz punkty  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ . W ten sposób otrzymujemy wszystkie punkty konfiguracji  $B_{12}$ . Dodając prostą  $MO$ , mamy również wszystkie proste. W ten sposób otrzymujemy pełną konfigurację, ale musimy pokazać, że wszystkie wymagane incydencje zachodzą. Dokładniej, ponieważ punkty są definiowane jako punkty przecięcia dwóch prostych, należy udowodnić, że leżą one na odpowiedniej, dodatkowej prostej. Zatem musimy pokazać, że:

$$B \in EL, \quad S \in EL, \quad Q \in MO, \quad R \in MO.$$

W pracy [Hab7] pokazałyśmy, używając Twierdzenia Pappusa, że powyższe incydencje zachodzą bez dodatkowych ograniczeń na wartości  $a$  oraz  $b$ .





Rysunek 3: Deformacja konfiguracji  $B_{12}$

Współrzędne pozostałych punktów w konfiguracji podajemy celem przedstawienia pełnego obrazu:

$$\begin{array}{ll}
 H = (b : a : a), & I = (a : b : a), \\
 P = (a^2 : ab : b^2), & N = (ab : a^2 : b^2), \\
 C = (a^2 : b^2 : ab), & G = (b^2 : a^2 : ab), \\
 B = (b : b : a), & O = (b^2 : ab : a^2), \\
 M = (ab : b^2 : a^2), & Q = (b^2 + ab - a^2 : a^2 : a^2), \\
 R = (a^2 : b^2 + ab - a^2 : a^2), & S = (a^2 : a^2 : b^2 + ab - a^2).
 \end{array}$$

**Wniosek 7 (zob. [Hab7, Theorem A])** *Deformacje konfiguracji  $B_{12}$  są parametryzowane przez prostą rzutową  $\mathbb{P}^1$ . Punkty  $(1 : 1)$ ,  $(0 : 1)$  i  $(1 : 0)$  odpowiadają konfiguracjom zdegenerowanym, w których proste lub punkty pokrywają się.*

Jako konsekwencję otrzymujemy następujące Twierdzenie.

**Twierdzenie 8 (zob. [Hab7, Theorem A])** *Istnieje konfiguracja 12 prostych zdefiniowana nad  $\mathbb{Q}$  z 19 punktami potrójnymi i 9 punktami podwójnymi (analogicznie jak w konfiguracji Böröczykego).*

Istotnie, wystarczy wziąć wymierne wartości parametrów  $(a : b)$ , różne od przypadków wymienionych we Wniosku 7. Ideał  $I$ , 19 punktów potrójnych, spełnia następującą własność

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Analogicznie, jak w większości przykładów niezawierania, elementem zawartym w  $I^{(3)}$  i nienależącym do  $I^2$  jest iloczyn równań wszystkich prostych należących do konfiguracji.

Wynik przedstawiony w [Hab7] był motywacją do dalszych badań (tzn. badań nad konfiguracjami Böröczykego z większą liczbą prostych), zob. [20, 21]. Dokładne równania przestrzeni parametrów zostały wyznaczone dla konfiguracji Böröczykego 13, 14, 15, 16, 18 i 24 prostych.

**Propozycja 9** *Niech  $C_n$  będzie przestrzenią parametrów konfiguracji  $B_n$ . Wtedy  $C_{12} \cong \mathbb{P}^1$ . Dla  $n \in \{13, 14, 15, 16, 18, 24\}$  przestrzeniami parametrów są krzywe w  $\mathbb{P}^1(a : b) \times \mathbb{P}^1(c : d)$  dane następującymi równaniami*

$n$	równanie	genus
13	$a^4d^2 - a^3bcd + a^2b^2cd - a^2b^2d^2 + b^4c^2 - 2ab^3cd + 2ab^3d^2 - b^4cd = 0$	2
14	$2ab^2d^2 - 3a^2bd^2 + a^3d^2 + ab^3cd - b^3c^2 = 0$	1
15	$a^4cd - a^2b^2c^2 - a^3bd^2 + a^2b^2cd - ab^3c^2 + b^4c^2 = 0$	1
16	$a^4c^2d - 2a^3bcd^2 - 2a^2b^2c^2d + a^2b^2cd^2 + 2ab^3c^2d - b^4c^3 + a^2b^2d^3 + 2b^4c^2d - 2b^4cd^3 = 0$	2
18	$a^3b^3c^5 - a^5bc^2d^3 + a^4b^2c^3d^2 - 6a^3b^3c^4d + a^2b^4c^5 + a^6d^5 + a^4b^2c^2d^3 + 12a^3b^3c^3d^2 - 4a^2b^4c^4d - 5a^5bd^5 + 7a^4b^2cd^4 - 22a^5b^3c^2d^3 + 11a^2b^4c^3d^2 - ab^5c^4d + 6a^4b^2d^5 - a^3b^3cd^4 + 3a^2b^4c^2d^3 - 4ab^5c^3d^2 + b^6c^4d - 4a^3b^3d^5 + 4a^2b^4cd^4 - ab^5c^2d^3 = 0$	2
24	$a^8c^3d + a^7bc^3d + a^6b^2c^4 - 6a^7bc^2d^2 + 3a^6b^2c^3d - 6a^6b^2c^2d^2 - 2a^5b^3c^3d + 10a^6b^2cd^3 - 6a^5b^3c^2d^2 - 2a^4b^4c^3d - a^6b^2d^4 + 12a^5b^3cd^3 + 3a^4b^4c^2d^2 - 2a^3b^5c^3d - 6a^5b^3d^4 + 3a^4b^4cd^3 + 6a^3b^5c^2d^2 - a^2b^6c^3d - 3a^4b^4d^4 - 13a^3b^5cd^3 + 9a^2b^6c^2d^2 - ab^7c^3d + 4a^3b^5d^4 - 12a^2b^6cd^3 + 6ab^7c^2d^2 - b^8c^3d + 5a^2b^6d^4 - 3ab^7cd^3 + 2ab^7d^4 - b^8cd^3 = 0$	5

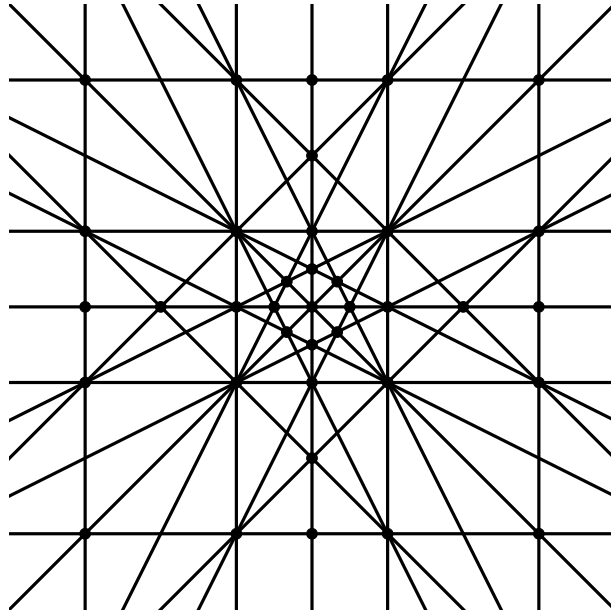
Tabela 1: Równania przestrzeni parametrów dla konfiguracji  $B_n$ .

*Genus w Tabeli 1 oznacza geometryczny genus normalizacji.*

Wszystkie krzywe przedstawione w Propozycji 9 mają skończoną liczbę punktów wymiernych, które odpowiadają degeneracjom, gdzie proste lub punkty się pokrywają. Zdziwiającym wnioskiem jest fakt, że  $B_{12}$  wydaje się być jedynym przypadkiem konfiguracji Böröczkyego, który ma wymierną realizację.

Jakub Kabat w swojej rozprawie doktorskiej, obronionej w 2020 roku, sprawdził, że konfiguracje Böröczkyego z liczbą prostych mniejszą niż 12 nie prowadzą do kontrprzykładu na zawieranie.

Warto wspomnieć, że pierwszy rzeczywisty symplecjalny kontrprzykład na zawieranie, pochodzący od konfiguracji 25 prostych, opisaliśmy wspólnie z Grzegorzem Malarą w pracy [31]. Rysunek 4 przedstawia tę konfigurację. Inny przykład tego typu został opisany ostatnio przez Janasza, Lampę-Baczyńską i Malare w [28].



Rysunek 4: Symplecjalna konfiguracja 25 prostych (prosta w nieskończoności jest niewidoczna)

## 4.2.2 Problem zawierania dla liniowych podprzestrzeni

Twierdzenie 4 może być sformułowane w sposób bardziej precyzyjny. Przypomnijmy, że  $\text{bight}(I)$  oznacza maksimum z wysokości ideałów pierwszych stowarzyszonych z ideałem  $I$ , tzn. geometrycznie jest to maksymalny kowymiar składowych zanurzonych ideału  $I$ .

**Twierdzenie 10** *Niech  $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$  będzie dowolnym ideałem jednorodnych. Wtedy*

$$I^{(m)} \subseteq I^r$$

*zachodzi dla wszystkich  $m \geq h \cdot r$ , gdzie  $h = \text{bight}(I)$ .*

Zatem, na przykład dla ideałów krzywych w  $\mathbb{P}^3$  numerologia jest taka sama jak dla ideałów punktów w  $\mathbb{P}^2$ . W pracy [Hab5] wspólnie z Malarą skonstruowaliśmy taką konfigurację prostych w  $\mathbb{P}^3$ , że dla jej ideału  $I$  nie zachodzi zawieranie  $I^{(3)} \subseteq I^2$ . Konfiguracja ta jest pewnym uogólnieniem konfiguracji Fermata prostych w  $\mathbb{P}^2$ .

**Definicja 11 (Konfiguracja Fermata prostych)** *Konfiguracją Fermata prostych  $\mathcal{F}_2^n$  w  $\mathbb{P}^2$  nazywamy konfigurację prostych zdefiniowanych przez liniowe czynniki wielomianu:*

$$F_{2,n}(x, y, z) = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n).$$

Zauważmy, że konfiguracja  $\mathcal{F}_2^n$  jest nazywana również  $\mathcal{A}_3^0(n)$  przez Orlika-Terao [37, Example 6.29 i strona 247].

Konfiguracje Fermata prostych są bardzo ważnymi przykładami rozważanymi w kontekście problemu zawierania. Zauważmy, że dla  $n = 3$ , otrzymujemy dokładnie konfigurację (5) studiowaną przez Dumnickego, Szemberga i Tutaj-Gasińską. Harbourne i Seceleanu w pracy [26, Proposition 2.1] udowodnili, że dla dowolnego  $n \geq 3$  ideał  $I$  punktów osobliwych konfiguracji  $\mathcal{F}_2^n$  nie spełnia zawierania  $I^{(3)} \subseteq I^2$ .

Podczas warsztatów Ordinary and Symbolic Powers of Ideals, które odbywały się w Międzynarodowym Centrum Badawczym w Oaxaca w 2017 roku, zaproponowałam pracę nad następującym uogólnieniem: rozważmy konfigurację płaszczyzn w  $\mathbb{P}^3$  zdefiniowanych przez znikanie wielomianu

$$F_{3,n}(x, y, z, w) = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(x^n - w^n)(y^n - z^n)(y^n - w^n)(z^n - w^n).$$

Konfiguracja ta zawiera  $6n$  płaszczyzn, które przecinają się wzdłuż  $3n^2$  prostych podwójnych,  $4n^2$  prostych potrójnych i 6 dodatkowych prostych (krawędzi czworościanu), które mają krotność  $n$ . Ponieważ interesuje nas trzecia potęga symboliczna ideału, bierzemy pod uwagę tylko te proste, które mają krotność co najmniej 3.

**Definicja 12 (Zawężona konfiguracja Fermata prostych [Hab5, Definition 3.1])** *Zawężoną konfiguracją Fermata  $\mathcal{RF}_3^n(1)$  prostych w  $\mathbb{P}^3$  nazywamy zbiór wszystkich prostych, zdefiniowanych przez konfigurację Fermata płaszczyzn, których krotność jest równa co najmniej 3.*

Uogólnienie to doprowadziło do pierwszej (i jak do tej pory jedynej) serii kontrprzykładów dla krzywych w  $\mathbb{P}^3$ . Dokładniej, naszym głównym wynikiem z pracy [Hab5] jest

**Twierdzenie 13 (Proste w  $\mathbb{P}^3$ , [Hab5, Theorem 4.3])** *Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą naturalną oraz  $I = I(\mathcal{RF}_3^n(1))$  ideałem prostych z zawężonej konfiguracji Fermata  $\mathcal{RF}_3^n(1)$  prostych w  $\mathbb{P}^3$ . Wtedy nie zachodzi zawieranie*

$$I^{(3)} \subseteq I^2.$$

Główna idea dowodu jest następująca. Po pierwsze zauważmy, że wielomian  $F_{3,n}(x, y, z, w)$  należy do  $I^{(3)}$ , ponieważ znika do rzędu  $\geq 3$  wzdłuż wszystkich prostych konfiguracji. Większym problemem jest pokazanie, że wielomian ten nie należy do drugiej potęgi zwykłej ideału  $I$ . Wynika to w znacznej mierze z tego, że

konfiguracja ta jest symetryczna, co widoczne jest również w symetrii generatorów ideału  $I$ , które można wybrać następująco

$$\begin{aligned} g_1 &= (x^n - y^n)(z^n - w^n)xy, & g_2 &= (x^n - y^n)(z^n - w^n)zw, \\ g_3 &= (x^n - z^n)(y^n - w^n)xz, & g_4 &= (x^n - z^n)(y^n - w^n)yw, \\ g_5 &= (x^n - w^n)(y^n - z^n)xw, & g_6 &= (x^n - w^n)(y^n - z^n)yz. \end{aligned}$$

Wtedy  $I^2$  jest generowany przez jednomiany stopnia 2 od wielomianów  $g_i$ . Załóżmy dla dowodu nie wprost, że

$$F_{3,n} = \sum_{1 \leq i < j \leq 6} h_{i,j} g_i g_j. \quad (6)$$

Biorąc równość (6) modulo  $(x)$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} -y^n z^n w^n (y^n - z^n)(y^n - w^n)(z^n - w^n) &= y^{2n} z^2 w^2 (z^n - w^n)^2 \tilde{h}_{2,2} \\ &+ z^{2n} y^2 w^2 (y^n - w^n)^2 \tilde{h}_{4,4} \\ &+ w^{2n} y^2 z^2 (y^n - z^n)^2 \tilde{h}_{6,6} \\ &+ y^{n+1} z^{n+1} w^2 (y^n - w^n)(z^n - w^n) \tilde{h}_{2,4} \\ &+ y^{n+1} w^{n+1} z^2 (y^n - z^n)(z^n - w^n) \tilde{h}_{2,6} \\ &+ z^{n+1} w^{n+1} y^2 (y^n - z^n)(y^n - w^n) \tilde{h}_{4,6}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie przez  $\tilde{f}$  oznaczamy klasę wielomianu  $f \in \mathbb{K}[x, y, z, w]$  modulo  $(x)$ .

Porównując współczynniki przy jednomianie  $y^{3n} z^{2n} w^n$  po obu stronach (7) otrzymujemy, że współczynnik przy tym jednomianie występującym w wielomianie  $\tilde{h}_{4,4}$  jest równy  $-1$ .

Biorąc teraz równość (6) modulo  $(z)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} -x^n y^n w^n (x^n - y^n)(x^n - w^n)(y^n - w^n) &= w^{2n} x^2 y^2 (x^n - y^n)^2 \hat{h}_{1,1} \\ &+ x^{2n} y^2 w^2 (y^n - w^n)^2 \hat{h}_{4,4} \\ &+ y^{2n} x^2 w^2 (x^n - w^n)^2 \hat{h}_{5,5} \\ &- x^{n+1} w^{n+1} y^2 (x^n - y^n)(y^n - w^n) \hat{h}_{1,4} \\ &- y^{n+1} w^{n+1} x^2 (x^n - y^n)(x^n - w^n) \hat{h}_{1,5} \\ &+ x^{n+1} y^{n+1} w^2 (x^n - w^n)(y^n - w^n) \hat{h}_{4,5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Przez  $\hat{f}$  oznaczamy klasę wielomianu  $f \in \mathbb{K}[x, y, z, w]$  modulo  $(z)$ .

Porównując współczynnik w (8) przy tym samym jednomianie, otrzymujemy, że w wielomianie  $\hat{h}_{4,4}$  jest on równy 1, co jest sprzeczne z wcześniejszym rachunkiem.

Naturalnym wydaje się rozważanie tego problemu dla dowolnego  $N$ . Niech

$$F_{N,n}(x_0, \dots, x_N) = \prod_{0 \leq i < j \leq N} (x_i^n - x_j^n)$$

oraz niech  $\mathcal{F}_N^n$  będzie konfiguracją hiperpłaszczyzn w  $\mathbb{P}^N$  zdefiniowanych przez liniowe czynniki  $F_{N,n}$ . Rozważmy szkielet  $\mathcal{F}_N^n(N-2)$  kowymiaru 2 tej konfiguracji, tzn. zbiór liniowych podprzestrzeni  $\mathbb{P}^N$  kowymiaru 2 wyciętych przez hiperpłaszczyzny konfiguracji  $\mathcal{F}_N^n$ . Weźmy teraz te liniowe podprzestrzenie kowymiaru 2, gdzie przecinają się przynajmniej 3 spośród hiperpłaszczyzn. Podobnie jak w Definicji 12 oznaczamy przez  $\mathcal{R}\mathcal{F}_N^n(N-2)$ , zawężoną konfigurację liniowych podprzestrzeni kowymiaru 2 (zob. [Hab6], section 3). Następnym wynikiem otrzymanym wspólnie z Grzegorzem Malarą, uogólnia wynik Harbourne'a-Seceleanu i nasze Twierdzenie 13.

**Twierdzenie 14 (Podprzestrzenie kowymiary 2, [Hab6, Theorem 1])** *Niech  $I$  będzie ideałem zdefiniowanym przez  $\mathcal{RF}_N^n(N-2)$ . Wtedy*

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Podobnie jak poprzednio, elementem należącym do  $I^{(3)}$ , który nie należy do  $I^2$ , jest wielomian  $F_{N,n}$ . Dowód w tym przypadku jest bardziej skomplikowany niż w przypadku  $N=3$ . Kluczową obserwacją jest to, że konfigurację  $\mathcal{RF}_N^n(N-2)$  można podzielić na  $(N+1)$  stożków, których wierzchołki są w punktach fundamentalnych  $\mathbb{P}^N$ . Zatem ideał  $I$  jest przecięciem  $(N+1)$  ideałów, których struktura jest znacznie prostsza. Z drugiej strony wprowadzamy w pracy specjalny nawias, ułatwiający zapis, który posiada szereg użytecznych własności:

$$[x_{i_1} \dots x_{i_k}] := \prod_{p < q} (x_{i_p}^n - x_{i_q}^n).$$

Stąd, w szczególności,

$$F_{N,n} = [x_0 \dots x_N].$$

Przyjmijmy, że zapis  $[x_{i_0} \dots \widehat{x_{i_j}} \dots x_{i_k}]$  oznacza  $[x_{i_0} \dots x_{i_{j-1}} x_{i_{j+1}} \dots x_{i_k}]$ . Następny Lemat przedstawia własności nawiasu udowodnione w [Hab6].

**Lemat 15 ([Hab6, Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3, Lemma 4])** *Niech  $2 \leq k \leq N$  będzie liczbą naturalną. Wtedy*

- $[x_{i_0} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_k}] = [x_{i_0} \dots x_{i_{k-1}}] \prod_{j=0}^{k-1} [x_{i_j} x_{i_k}]$ ,
- $[x_{i_0} \dots x_{i_k}] = \sum_{j=0}^k (-1)^{j+k} x_{i_0}^n \dots \widehat{x_{i_j}^n} \dots x_{i_k}^n [x_{i_0} \dots \widehat{x_{i_j}} \dots x_{i_k}]$ ,
- dla każdego  $u \in \{0, \dots, N\}$  zachodzi równość

$$[x_{i_0} \dots x_{i_k}] = \sum_{j=0}^k [x_{i_0} \dots x_{i_{j-1}} x_u x_{i_{j+1}} \dots x_{i_k}],$$

- dla dowolnych zmiennych pomocniczych  $y_1, \dots, y_k$  mamy

$$[x_0 \dots x_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [x_0 \dots \widehat{x_j} \dots x_k] [x_j y_1] \dots [x_j y_k].$$

Lemat 15 ułatwia zapis i pozwala na obliczenia związane z generatorami ideału  $I$ .

**Propozycja 16 ([Hab6, Proposition 1])** *Przyjmijmy oznaczenia jak w Twierdzeniu 14 dla liczb naturalnych  $N \geq 2$  i  $n \geq 3$ .*

a) *Jeśli  $N = 2M$  jest liczbą parzystą oraz  $A = \{i_1, \dots, i_M\}$  jest podzbiorem  $M$  elementów ze zbioru  $\{0, 1, \dots, N\}$ , natomiast  $B = \{j_0, \dots, j_M\}$  zbiorem dopełniającym, to ideał  $I$  jest generowany przez wszystkie wielomiany postaci*

$$g_A = x_{i_1} \dots x_{i_M} [x_{i_1} \dots x_{i_M}] [x_{j_0} \dots x_{j_M}].$$

b) *Jeśli  $N = 2M + 1$  jest liczbą nieparzystą oraz  $A = \{i_0, \dots, i_M\}$  jest podzbiorem  $M + 1$  elementów zbioru  $\{0, 1, \dots, N\}$ , natomiast  $B = \{j_0, \dots, j_M\}$  zbiorem dopełniającym, to ideał  $I$  jest generowany przez wszystkie wielomiany postaci*

$$g_A = x_{i_0} \dots x_{i_M} [x_{i_0} \dots x_{i_M}] [x_{j_0} \dots x_{j_M}].$$

Propozycja 16 pozwala, po żmudnych rachunkach z wykorzystaniem własności z Lematu 15, na przeprowadzenie dowodu Twierdzenia 14. Szczegóły są przedstawione w pracy [Hab6].

### 4.3 Istnienie niespodziewanych hiperpowierzchni

Fundamentalnym obiektem badań geometrii algebraicznej są systemy liniowe dywizorów. Podstawowym pytaniem związanym z systemami liniowymi jest określenie ich wymiarów. Zauważmy rozważania do systemów liniowych hiperpłaszczyzn ze skończonym zbiorem punktów bazowych ustalonej krotności. Zazwyczaj interesują nas warunki zadawane przez punkty ogólne na systemy liniowe, które mogą być definiowane przez symetryczne układy punktów. Pytanie, jakie się nasuwa, możemy sformułować następująco.

**Problem 17** *Dla danego systemu liniowego  $W$  hiperpowierzchni w przestrzeni rzutowej i skończonej liczby punktów ogólnych z ustalonymi krotnościami, wyznaczyć wymiar podsystemu  $W$  złożonego z tych elementów  $W$ , które przez ustalone punkty przechodzą co najmniej z ustaloną krotnością.*

Ten, elementarny w swojej wypowiedzi, problem był rozważany, w tej lub innej formie od wielu lat. Możemy go znaleźć w pracach Étienne Bézouta z XVII wieku. W XIX wieku pojawiał się w pracach Juliusa Plückera, Luigiiego Cremony, Maxa Noethera, Eugenio Bertiniego, Corrado Segre i innych. Ważny wkład w badania nad tym problemem w XX wieku mieli Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, Francesco Severi, Alessandro Terracini, Benjamin Segre, Andre Hirschowitz, Brian Harbourne, Robert Lazarsfeld, Ciro Ciliberto i mnóstwo innych matematyków. Motywacja do badań w tym zakresie pochodzi z różnych działów matematyki, zob. np. [34], a odpowiedź może znaleźć zastosowanie w jeszcze innych działach, zob. np. [32].

Problem 17 jest, w takim ogólnym sformułowaniu, jak do tej pory, nierozwiązany. Oczywiście jest mnóstwo bardziej szczegółowych pytań i hipotez, które pozostają nierozwiązane od wielu lat. Przypomnijmy jedną z nich, za Nagatą [34].

**Hipoteza 18 (Nagata, 1959)** *Niech  $P_1, \dots, P_s$  będzie zbiorem  $s \geq 10$  punktów ogólnych w  $\mathbb{P}^2$ . Niech  $C$  będzie krzywą stopnia  $d$  przechodzącą przez wszystkie punkty z krotnością co najmniej  $m$ . Wtedy*

$$d > m\sqrt{s}.$$

Hipoteza Nagaty zakłada w szczególności, że system liniowy krzywych płaskich stopnia  $d$  znikających do rzędu co najmniej  $m$  w  $s$  ogólnych punktach w  $\mathbb{P}^2$  jest pusty dla  $d \leq m\sqrt{s}$ . Jeśli  $s$  nie jest kwadratem liczby naturalnej, to nie wiadomo, czy tak rzeczywiście jest.

Jeśli krotności punktów są małe, wtedy możemy powiedzieć więcej o zadanym przez nie systemie. Na przykład, niech  $Z = \{P_1, \dots, P_s\}$  będzie zbiorem punktów ogólnych w  $\mathbb{P}^N$ . Wtedy

$$h^0\left(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z)\right) = \max\left\{0, \binom{d+N}{N} - s\right\}.$$

Innymi słowy, punkty ogólne z krotnością 1 zawsze zadają niezależne warunki na formy dowolnego stopnia  $d$  w przestrzeni rzutowej dowolnego wymiaru  $N$ .

Podobny wynik, dla punktów krotności 2 został wykazany przez Alexandra i Hirschowitza. Ich rezultat, nawiasem mówiąc, poprzedzony był dwudziestoletnią pracą.

**Twierdzenie 19 (Alexander, Hirschowitz)** *Niech  $Z$  będzie zbiorem  $s$  punktów  $\mathbb{P}^N$ . Wtedy*

$$h^0\left(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z)^{(2)}\right) = \max\left\{0, \binom{N+d}{N} - s(N+1)\right\},$$

poza następującymi przypadkami

- $d = 2, 2 \leq s \leq N$ ;
- $N = 2, d = 4, s = 5$ ;
- $N = 3, d = 4, s = 9$ ;
- $N = 4, d = 4, s = 14$ ;
- $N = 4, d = 3, s = 7$ .

Jeżeli chodzi o punkty z krotnością 3 i więcej, to nie ma nawet sformułowanej hipotezy. Idąc w trochę innym kierunku, zauważmy, że pojedynczy ogólny punkt zadaje niezależne warunki bez względu na krotność:

$$h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(P)^{(m)}) = \max \left\{ 0, \binom{N+d}{N} - \binom{N+m-1}{N} \right\}.$$

Okolo 2013 roku Di Gennaro, Ilardi i Vallès [14] odkryli zadziwiający fakt, że powyższe stwierdzenie może nie zachodzić dla *niezupelnego* systemu liniowego. Niech  $W \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)|$  będzie podsystemem liniowym hiperpowierzchni stopnia  $d$ . Wtedy może się zdarzyć, że

$$\dim |W \otimes I(P)^m| > \max \left\{ \dim W - \binom{N+m-1}{N}, -1 \right\}. \quad (9)$$

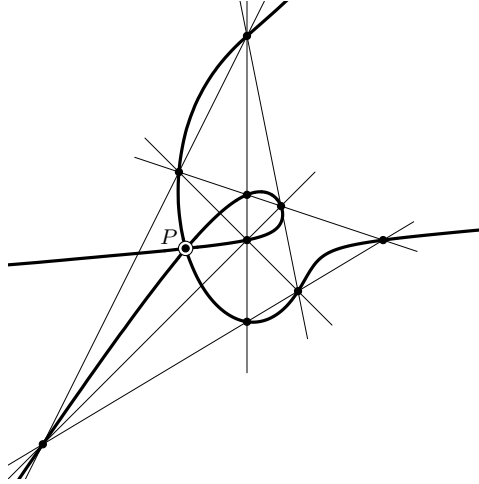
Pierwszy przykład tego typu został skonstruowany następująco. Niech  $Z$  będzie zbiorem punktów:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 : 0 : 0), & P_2 &= (0 : 1 : 0), & P_3 &= (0 : 0 : 1), \\ P_4 &= (1 : 1 : 0), & P_5 &= (1 : -1 : 0), & P_6 &= (1 : 0 : 1), \\ P_7 &= (1 : 0 : -1), & P_8 &= (0 : 1 : 1), & P_9 &= (0 : 1 : -1) \end{aligned} \quad (10)$$

w  $\mathbb{P}^2$  i niech  $W = |H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4) \otimes I(Z))|$ . Łatwo sprawdzić, że  $\dim W = 5$ . Zatem, jeśli  $N = 2$  i  $m = 3$  prawa strona (9) jest równa  $-1$ , czyli nie spodziewamy się, że istnieje krzywa stopnia 4 znikająca w  $Z$  i znikająca do rzędu 3 w punkcie ogólnym  $P = (a : b : c)$ . Okazuje się jednak, że taka krzywa istnieje! Jej istnienie zostało udowodnione w [14]. Natomiast w pracy [Hab2] podaliśmy jej dokładne równanie

$$\begin{aligned} f_P(x : y : z) &= 3a(b^2 - c^2) \cdot x^2yz + 3b(c^2 - a^2) \cdot xy^2z + 3c(a^2 - b^2) \cdot xyz^2 \\ &+ a^3 \cdot y^3z - a^3 \cdot yz^3 + b^3 \cdot xz^3 - b^3 \cdot x^3z + c^3 \cdot x^3y - c^3 \cdot xy^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Rysunek 5 przedstawia tą krzywą. Punkty oznaczone kropkami są dokładnie punktami z (10).



Rysunek 5: Wizualizacja niespodziewanej krzywej stopnia 4

Cook II, Harbourne, Migliore i Nagel odkryli w [11], że powyższy przykład jest tylko manifestacją znacznie ogólniejszego zjawiska. Ich przełomowa praca [11] otworzyła drzwi do intrygującej nowej teorii. W tej części przedstawię swój wkład w jej rozwój.

Autorzy pracy [11] wprowadzili określenie *niespodziewanej hiperpowierzchni*, zacznę więc od przypomnienia jej definicji.

**Definicja 20 (Niespodziewana hiperpowierzchnia)** Niech  $W \subseteq |H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))|$  będzie systemem liniowym i niech  $P \in \mathbb{P}^N$  będzie punktem ogólnym. Mówimy, że dla liczby naturalnej  $m \geq 1$  system  $W$  zawiera niespodziewaną hiperpowierzchnię, jeśli

$$\dim(W \otimes I(P)^m) > \max \left\{ \dim W - \binom{N+m-1}{N}, -1 \right\}.$$

Warto zauważyć, że jeśli  $m = 1$ , to wtedy nie istnieją niespodziewane hiperpowierzchnie.

W dalszej części skoncentrujemy się na systemach liniowych z punktami bazowymi,  $W = |H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z))|$ , analogicznie jak w pierwszym przykładzie opisanym powyżej. Zatem istnienie niespodziewanych hiperpowierzchni może być postrzegane jako własność zbioru  $Z$ .

**Definicja 21 (Zbiory punktów dopuszczające niespodziewane hiperpowierzchnie)** Niech  $Z \subseteq \mathbb{P}^N$  będzie niepustym, skończonym zbiorem punktów w  $\mathbb{P}^N$ . Mówimy, że  $Z$  dopuszcza niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia  $d$  z krotnością  $m$ , jeśli dla ogólnego punktu  $P \in \mathbb{P}^N$  mamy

$$h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z) \otimes I(P)^m) > \max \left\{ 0, h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z)) - \binom{N+m-1}{N} \right\}. \quad (12)$$

Warto tutaj podkreślić, że nie ma znaczenia, czy sam zbiór  $Z$  zadaje niezależne warunki na formy stopnia  $d$ , czy nie. Łatwo zauważyć, że zawsze istnieje podzbiór  $Z' \subseteq Z$ , który składa się z punktów, które zadają niezależne warunki. Zazwyczaj taki podzbiór nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Istnieje wiele naturalnych uogólnień Definicji 21. Po pierwsze, nie musimy ograniczać się tylko do punktów bazowych. Można założyć, że  $Z$  jest dowolnym podschematem  $\mathbb{P}^N$  i przeformułować warunek (12) dla  $Z$  będącego schematem. Pewne wyniki w tym kierunku pojawiły się w przypadku, gdy  $Z$  jest zbiorem ogólnych prostych, zob. [8], [17].

Inny kierunek, przedstawiony w mojej pracy [Hab1], dopuszcza większą liczbę ogólnych punktów z ustalonymi krotnościami.

**Definicja 21'** Niech  $Z \subseteq \mathbb{P}^N$  będzie niepustym, skończonym zbiorem punktów w  $\mathbb{P}^N$ . Mówimy, że  $Z$  dopuszcza niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia  $d$  z krotnościami  $m_1, \dots, m_r$ , jeśli dla ogólnych punktów  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}^N$  mamy

$$\begin{aligned} & h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z) \otimes I(P_1)^{m_1} \dots \otimes I(P_r)^{m_r}) \\ & > \max \left\{ 0, h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes I(Z)) - \binom{N+m_1-1}{N} - \dots - \binom{N+m_r-1}{N} \right\}. \end{aligned}$$

**Uwaga 22** Od tej pory zawężamy się do przypadków, gdzie prawa strona nierówności w Definicjach 21 i 21' jest równa 0. W tych przypadkach będziemy nazywać niespodziewanymi wszystkie hiperpowierzchnie zdefiniowane przez sekcje globalne snopów z lewych stron nierówności w tych Definicjach. Zazwyczaj jest tylko jedna taka hiperpowierzchnia.

### 4.3.1 Punkty dualne do prostych konfiguracji Fermata

W pracy [Hab4] zauważyłam, że punkty w (10) są dualne do prostych z konfiguracji w  $\mathbb{P}^2$  określonej przez liniowe czynniki wielomianu

$$F_{2,2,2} = xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2),$$

gdzie oznaczenie jest zaczerpnięte z [Hab4, Example 3.5]. Sekcja 4 w [Hab4] uogólnia ten przykład w następujący sposób.



**Twierdzenie 23** ([Hab4, Theorem 4.4, Theorem 4.5, Theorem 4.6]) *Niech  $Z$  będzie zbiorem punktów dualnych do konfiguracji zdefiniowanych przez wielomiany*

- $F_{2,3,1} = xy(x^3 - y^3)(x^3 - z^3)(y^3 - z^3)$ ,  $n = 3$ ,
- $F_{2,4,0} = x(x^4 - y^4)(x^4 - z^4)(y^4 - z^4)$ ,  $n = 4$ ,
- $F_{2,n} = (x^n - y^n)(x^n - z^n)(y^n - z^n)$ ,  $n \geq 5$ .

Wtedy  $Z$  dopuszcza niespodziewaną krzywą stopnia  $n + 2$  z krotnością  $m = n + 1$ .

Dla  $n \geq 5$  teza została udowodniona w [11, Theorem 6.12]. Natomiast przypadki  $n = 3$  i  $n = 4$  są nowe. W pracy [Hab4] (zob. dowód Twierdzenia 4.6) podałam również równania tych niespodziewanych krzywych, które uogólniają równanie (11):

$$\begin{aligned} f_{P,n}(x : y : z) = & xyz \left[ (n+1) \left( a(b^n + (-1)^{n+1}c^n)x^{n-1} \right. \right. \\ & + b(a^n + (-1)^{n+1}c^n)y^{n-1} + c(a^n + (-1)^{n+1}b^n)z^{n-1} \Big) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i+1} \left( a^{n-i}b^{i+1}x^i y^{n-i-1} + a^{n-i}c^{i+1}x^i z^{n-i-1} + b^{n-i}c^{i+1}y^i z^{n-i-1} \right) \Big] \\ & + a^{n+1}G_x + b^{n+1}G_y + c^{n+1}G_z, \end{aligned}$$

gdzie

$$G_x = yz(y^n - (-z)^n), \quad G_y = zx(z^n - (-x)^n), \quad G_z = xy(x^n - (-y)^n).$$

#### 4.3.2 Punkty osobliwe konfiguracji Fermata hiperpłaszczyzn

Jak już było wspomniane, ideał  $I = I(Z)$  zbioru punktów przecięcia prostych zdefiniowanych w (5) dostarczył pierwszego kontrprzykładu, dla którego zachodzi  $I^{(3)} \not\subset I^2$ . Zbiór  $Z$  dopuszcza również niespodziewaną krzywą stopnia 5 z krotnością 4. Obserwacja ta uogólnia się (zob. [Hab1, Theorem 5]) na wszystkie  $n \geq 3$ . W pracy [Hab1] podałam również równania niespodziewanych krzywych dla każdego  $n \geq 3$ .

**Twierdzenie 24** (Niespodziewane krzywe z punktem krotności 4, [Hab1, Theorem 5]) *Niech  $Z$  będzie układem punktów w  $\mathbb{P}^2$ , które są punktami przecięcia prostych zdefiniowanych przez liniowe czynniki wielomianu  $F_{2,n}$  dla  $n \geq 3$ . Niech  $P = (a : b : c)$  będzie punktem ogólnym w  $\mathbb{P}^2$ . Zdefiniujmy następujące liczby:*

$$u = \binom{n}{2} - 1, \quad v = \binom{n-1}{2}, \quad w = \binom{n+1}{2}.$$

Wtedy wielomian

$$\begin{aligned} Q_P(x : y : z) = & -cxy((ub^n + vc^n)(z^n - x^n) + (ua^n + vc^n)(y^n - z^n)) \\ & -bxz((ua^n + vb^n)(y^n - z^n) + (uc^n + vb^n)(x^n - y^n)) \\ & -ayz((ub^n + va^n)(z^n - x^n) + (uc^n + va^n)(x^n - y^n)) \\ & + wa^{n-1}bcx^2(y^n - z^n) + wab^{n-1}cy^2(z^n - x^n) \\ & + wabc^{n-1}z^2(x^n - y^n) \end{aligned}$$

definiuje niespodziewaną krzywą stopnia  $n + 2$  z krotnością 4 w punkcie  $P$ .

Twierdzenie 24 uwypukla zadziwiającą własność tych przykładów. Mianowicie krotność punktu ogólnego pozostaje cały czas stała, podczas gdy stopień niespodziewanej krzywej rośnie wraz ze wzrostem  $n$ . Warto wspomnieć, że w pracy [11] autorzy zajmowali się tylko niespodziewanymi krzywymi stopnia o jeden większego niż krotność punktu, jak to miało miejsce w pierwszym przykładzie w [14].

W pracy [11] autorzy rozpatrywali tylko niespodziewane krzywe w  $\mathbb{P}^2$ . Natomiast pierwszy przykład niespodziewanej hiperpowierzchni wyższego wymiaru pochodzi z pracy [Hab2]. Konstrukcja ta jest oparta na punktach przecięcia płaszczyzn zdefiniowanych przez liniowe czynniki wielomianu  $F_{3,3}$ . Dokładniej, rozważmy zbiór  $Z$  punktów, które leżą na co najmniej 6 płaszczyznach z konfiguracji. Tych punktów jest dokładnie 31, 4 punkty fundamentalne i 27, które tworzą zupełne przecięcie

$$I(Z) = (x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - w^3) \cap (x, y, z) \cap (x, y, w) \cap (x, z, w) \cap (y, z, w).$$

Ideal  $I(Z)$  jest ideałem dwumianowym, a jego generatory są, w pewien sposób, symetryczne ze względu na występujące w nich zmienne.

**Lemat 25 ([Hab2, Lemma 1])** *Ideal  $I(Z)$  jest generowany przez 8 dwumianów stopnia 4:*

$$\begin{aligned} & x(y^3 - z^3), x(z^3 - w^3), y(x^3 - z^3), y(z^3 - w^3), \\ & z(x^3 - y^3), z(y^3 - w^3), w(x^3 - y^3), w(y^3 - z^3). \end{aligned}$$

Forma tych generatorów ma istotny wpływ na dowód głównego wyniku z pracy [Hab2].

**Twierdzenie 26 (Niespodziewana powierzchnia stopnia 4 w  $\mathbb{P}^3$ , [Hab2, Theorem 1])** *Zbiór  $Z$  zdefiniowany powyżej dopuszcza niespodziewaną powierzchnię  $S_P$  stopnia 4 z osobliwością krotności 3 w punkcie ogólnym  $P = (a : b : c : d)$ . Powierzchnia  $S_P$  jest zbiorem zer wielomianu*

$$\begin{aligned} f = f((x : y : z : w), (a : b : c : d)) = & b^2(c^3 - d^3) \cdot x^3y + a^2(d^3 - c^3) \cdot xy^3 + c^2(d^3 - b^3) \cdot x^3z \\ & + c^2(a^3 - d^3) \cdot y^3z + a^2(b^3 - d^3) \cdot xz^3 + b^2(d^3 - a^3) \cdot yz^3 \\ & + d^2(b^3 - c^3) \cdot x^3w + d^2(c^3 - a^3) \cdot y^3w + d^2(a^3 - b^3) \cdot z^3w \\ & + a^2(c^3 - b^3) \cdot xw^3 + b^2(a^3 - c^3) \cdot yw^3 + c^2(b^3 - a^3) \cdot zw^3. \end{aligned}$$

Zauważmy (potrzebne nam to będzie do dalszych rozważań), że  $f$  może być zapisane w następującej formie

$$\begin{aligned} f = & -a^2(b^3 - d^3) \cdot x(y^3 - z^3) + a^2(b^3 - c^3) \cdot x(y^3 - w^3) \\ & + b^2(c^3 - a^3) \cdot y(z^3 - w^3) - b^2(c^3 - d^3) \cdot y(z^3 - x^3) \\ & - c^2(d^3 - b^3) \cdot z(w^3 - x^3) + c^2(d^3 - a^3) \cdot z(w^3 - y^3) \\ & + d^2(a^3 - c^3) \cdot w(x^3 - y^3) - d^2(a^3 - b^3) \cdot w(x^3 - z^3). \end{aligned} \tag{13}$$

Dowód tego Twierdzenia można znaleźć również w pracy [Hab1, Theorem 7].

### 4.3.3 Niespodziewane hiperpowierzchnie z kilkoma ogólnymi punktami wielokrotnymi

W pracy [Hab1] rozważam wyżej wymiarowe uogólnienie konstrukcji opisanej w sekcji 4.3.2. Badania te były zainspirowane pytaniem, czy istnieją zbiory  $Z$  jak w Definicji 21' dla  $r \geq 2$ . Głównym wynikiem pracy [Hab1] jest pozytywna odpowiedź na to pytanie.

Przechodząc do szczegółów, niech  $Z_N$  będzie zbiorem punktów w  $\mathbb{P}^N$ , który jest sumą zupełnego przecięcia zdefiniowanego przez ideal

$$(x_0^3 - x_1^3, x_0^3 - x_2^3, \dots, x_0^3 - x_N^3)$$

oraz  $(N + 1)$  punktów fundamentalnych.

Następny Lemat jest uogólnieniem Lematu 25.

**Lemat 27 ([Hab1, Lemma 6])** *Ideal  $I(Z_N)$  jest generowany w stopniu 4 przez wielomiany*

$$x_i(x_{i+1}^3 - x_j^3)$$

dla  $i \in \{0, \dots, N\}$  oraz  $j \in \{0, \dots, N\} \setminus \{i, i + 1\}$ .

Narzucenie warunków znikania na elementach  $[I(Z_N)]_4$  prowadzi do pierwszego przykładu niespodziewanej hiperpowierzchni z dwoma ogólnymi punktami wielokrotnymi.

**Twierdzenie 28 ([Hab1, Theorem 10])** *Zbiór  $Z_N$ , zdefiniowany powyżej dla  $N = 5$ , dopuszcza w  $\mathbb{P}^5$  niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia 4 z krotnością 3 w punkcie ogólnym  $P_1 = (a_0 : \dots : a_5)$  i z krotnością 2 w punkcie ogólnym  $P_2 = (b_0 : \dots : b_5)$ .*

Dowód Twierdzenia 28 jest w pewnym stopniu geometryczny i opiera się na metodzie ustożkowania, wprowadzonej przeze mnie i używanej również w dowodach faktów dotyczących problemu zawierania. Pomysł polega na rozważaniu stożków  $\Omega_{ij}$  w  $\mathbb{P}^5$  (z wierzchołkami, które są 1-wymiarowymi podprzestrzeniami liniowymi, a dokładniej prostymi  $L_{ij}$  łączącymi dwa punkty fundamentalne  $E_i, E_j$ , gdzie  $E_k = V(x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_5)$ ) nad niespodziewanymi powierzchniami stopnia 4 w  $\mathbb{P}^3$ , których istnienie zostało pokazane w Twierdzeniu 26. Te powierzchnie stopnia 4 są brane względem odpowiedniego rzutowania punktu  $P_1$ . Otrzymane stożki generują liniowy system kwartyk w  $\mathbb{P}^5$ , znikających w punkcie  $P_1$  do rzędu co najmniej 3. Okazuje się, że wystarczają tylko stożki o wierzchołkach w prostych  $L_{01}, L_{02}, L_{03}, L_{12}, L_{13}$  oraz  $L_{23}$ .

Niech  $\omega_{ij}(x_0 : \dots : x_5)$  będzie równaniem  $\Omega_{ij}$ . Stąd  $\omega_{ij}$  zależy tylko od zmiennych o indeksach  $\{0, \dots, 5\} \setminus \{i, j\}$  i współrzędnych punktu  $P_1$  z tymi samymi indeksami. Na przykład

$$\omega_{01}(x_0 : \dots : x_5) = f((x_2 : x_3 : x_4 : x_5), (a_2 : a_3 : a_4 : a_5)),$$

gdzie  $f$  jest wielomianem zdefiniowanym w Twierdzeniu 26. Wtedy jednoznacznie wyznaczona niespodziewana hiperpowierzchnia stopnia 4 z Twierdzenia 28 dana jest równaniem

$$\begin{aligned} & \omega_{2,3}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{0,1}(x_0 : \dots : x_5) - \omega_{1,3}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{0,2}(x_0 : \dots : x_5) \\ & + \omega_{0,3}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{1,2}(x_0 : \dots : x_5) + \omega_{1,2}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{0,3}(x_0 : \dots : x_5) \\ & - \omega_{0,2}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{1,3}(x_0 : \dots : x_5) + \omega_{0,1}(b_0 : \dots : b_5) \cdot \omega_{2,3}(x_0 : \dots : x_5). \end{aligned}$$

Zauważmy, że współrzędne punktu  $P_1$  są ukryte w wielomianach  $\omega_{i,j}$ , czyli powyższy wielomian zależy od nich w istotny sposób.

Przypuszczam, że konstrukcja opisana w Twierdzeniu 28 w przypadku  $\mathbb{P}^5$  rozszerza się do przestrzeni rzutowej dowolnego nieparzystego wymiaru.

**Hipoteza 29 (see [Hab1, Section 5])** *Dla  $k \geq 1$  niech  $N = 2k + 1$ . Zbiór  $Z_N \subseteq \mathbb{P}^N$  dopuszcza niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia 4 znikającą do rzędu 3 w punkcie ogólnym  $P_1 = (a_0 : \dots : a_N)$  i do rzędu 2 w punktach ogólnych  $P_i = (b_0^i : \dots : b_N^i)$  dla  $i = 2, \dots, k$ .*

Hipoteza ta została udowodniona dla  $k = 1$  w pracy [Hab2],  $k = 2$  w [Hab1] oraz zweryfikowana komputerowo dla  $k = 3$  i  $k = 4$ . Ponadto, podałam hipotetyczne równanie rekurencyjne  $\omega_N$  dla niespodziewanych hiperpowierzchni stopnia 4 w  $\mathbb{P}^N$ , które opiera się na metodzie ustożkowania

$$\omega_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i^2 \sum_{j=i+2}^{N+i} K(i, j) \cdot \omega_{N-2}^{i,j}(b_0^k : \dots : b_N^k) \cdot x_i \left( x_{(i+1) \bmod (N+1)}^3 - x_{(j \bmod (N+1))}^3 \right),$$

gdzie  $K(i, j) = \text{sgn}(j - i) \cdot (-1)^{j+i}$  jest funkcją znaku oraz  $\omega_{N-2}^{i,j}$  jest niespodziewaną hiperpowierzchnią stopnia 4 w zmiennych  $x_0, \dots, x_N$ , gdzie  $x_i, x_{(j \bmod (N+1))}$  są pominięte.

#### 4.3.4 BMSS dualność

W pracy Di Gennaro, Ilardi i Vallès [14] istnienie niespodziewanej krzywej wynika z nieznikania pewnej grupy kohomologii. Autorzy nie podjęli próby wypisania jej równania. Podobnie, badania Cooka II,

Harbourne'a, Migliore'a oraz Nagela w [11] są czysto teoretyczne. W pracy [Hab2] podaliśmy równanie niespodziewanej krzywej (11), którą dopuszcza system pierwiastkowy  $B_3$  oraz niespodziewanej powierzchni (13), którą dopuszcza zbiór punktów osobliwych konfiguracji typu Fermata w  $\mathbb{P}^3$ . Wyniki te rzuciły dodatkowe światło na problem i otworzyły nowe możliwości badań. Pomysł jest bardzo prosty, równanie niespodziewanej hiperpowierzchni, np. niespodziewanej krzywej stopnia 4 w (11) albo powierzchni w (13), może być zapisane jako wielomian zmiennych, które odpowiadają współrzędnym ogólnego punktu. Na przykład (11) może być rozpatrywane jako wielomian zmiennych  $(a : b : c)$ . W ogólności, otrzymujemy wielomian dwujednorodny

$$f((a_0 : \dots : a_N), (x_0 : \dots : x_N)), \quad (14)$$

gdzie  $P = (a_0 : \dots : a_N)$  jest punktem ogólnym.

Ta prosta obserwacja z pracy [Hab2] ma znacznie bardziej ogólne konsekwencje. Po pierwsze zauważmy, że jeśli  $f$  definiuje niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia  $d$  z krotnością  $m$  w punkcie  $P$ , to  $f$  ma stopień  $d$  ze względu na drugi zbiór zmiennych i stopień większy lub równy  $m$  ze względu na pierwszy zbiór zmiennych. Znaczna część pracy Harbourne'a, Migliore'a, Nagela i Teitlera [25], która jest naturalną kontynuacją pracy [11], jest inspirowana tą obserwacją. W szczególności autorzy wprowadzili nazwę BMSS dualność (inspirowaną inicjałami autorów pracy [Hab2]). Badania w tym kierunku podsumowuje następujące twierdzenie (por. [25, Theorem 4.4]).

**Twierdzenie 30** *Niech  $f(a, x) = f((a_0 : a_1 : a_2), (x_0 : x_1 : x_2))$  będzie dwujednorodnym wielomianem dwustopnia  $(m, m + 1)$  takim, że*

- dla punktu ogólnego  $P = (a_0 : a_1 : a_2)$ , wielomian  $f(P, (x_0 : x_1 : x_2))$  jest zredukowany i nierozkładalny oraz;
- dla ustalonego punktu  $P = (a_0 : a_1 : a_2)$ ,  $f$  znika do rzędu  $m$  w punkcie  $P$  (jako wielomian zmiennych  $(x_0 : x_1 : x_2)$ ), a także;
- dla ustalonego punktu  $Q = (x_0 : x_1 : x_2)$ ,  $f$  znika do rzędu  $m$  w punkcie  $Q$  (jako wielomian zmiennych  $(a_0 : a_1 : a_2)$ ).

Wtedy  $f(a, x)$  opisuje stożek styczny do krzywej  $\{f(P, x) = 0\}$  w punkcie  $x = P$ .

Nasza ostatnia praca [16] kontynuuje badania nad BMSS dualnością z innego punktu widzenia, to znaczy łączy dualność z pewnymi własnościami odpowiedniej macierzy interpolacji.

**Przykład 31** (see [Hab2, Section 2]) *W konkretnej sytuacji niespodziewanej krzywej (11) Twierdzenie 30 pozwala utożsamić zbiór*

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 : 3x(y^2 - z^2) \cdot a^2bc + 3y(z^2 - x^2) \cdot ab^2c + 3z(x^2 - y^2) \cdot abc^2 + x^3 \cdot b^3c - x^3 \cdot bc^3 + y^3 \cdot ac^3 - y^3 \cdot a^3c + z^3 \cdot a^3b - z^3 \cdot ab^3 = 0\}$$

ze stożkiem stycznym do krzywej

$$\{3a(b^2 - c^2) \cdot x^2yz + 3b(c^2 - a^2) \cdot xy^2z + 3c(a^2 - b^2) \cdot xyz^2 + a^3 \cdot y^3z - a^3 \cdot yz^3 + b^3 \cdot xz^3 - b^3 \cdot x^3z + c^3 \cdot x^3y - c^3 \cdot xy^3 = 0\}$$

w punkcie  $P = (a : b : c)$ .

Warto zauważyć, że Twierdzenie 30 nie jest do końca satysfakcjonujące, ponieważ po pierwsze działa tylko dla krzywych, a po drugie mamy założenie, że stopień krzywej i krotność punktu ogólnego różnią się o 1. Można przypuszczać, że BMSS dualność wyjaśnia geometrię stożków stycznych do niespodziewanych hiperpowierzchni w punkcie ogólnym przy mniej restrykcyjnych założeniach. Pewne kroki w tym kierunku zostały podjęte w pracy [16]. Dalszą dyskusję na ten temat można znaleźć również w naszej pracy [15]. Niemniej jednak, do pełnego rozwiązania problemu jest jeszcze daleko i wymaga to dalszych badań.

### 4.3.5 Przestrzenie oskułujące i rozmaitości stowarzyszone

Niespodziewane hiperpowierzchnie są związane z pewnymi własnościami geometrii różniczkowej odwzorowań typu Veronese na przestrzeniach rzutowych. Zaczniemy od przypomnienia klasycznej konstrukcji.

Niech  $X$  będzie gładką, zupełną rozmaitością zespoloną wymiaru  $n$  i niech  $L$  będzie wiązką liniową na  $X$ . Niech  $V = H^0(X, L)$ . Wiązką  $m$ -dżetów wiązki  $L$  nazywamy snop koherentny

$$\mathcal{J}_m(L) = (p_1)_*(p_2^*L \otimes \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{I}(\Delta)^{m+1}),$$

gdzie  $\Delta \subseteq X \times X$  jest przekątną, natomiast  $p_1, p_2$  są odpowiednimi rzutowaniami

$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X & & X \end{array} .$$

Snop ten jest lokalnie wolny rzędu  $\binom{n+m}{n}$ , a jego włókno w punkcie  $P$  może być utożsamiane z

$$\mathcal{J}_m(L)_P \simeq H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(P)^{m+1}),$$

gdzie  $\mathcal{I}(P)$  jest ideałem snopów w  $P \in X$ .

**Definicja 32 ( $m$ -ta przestrzeń oskułująca)**  $m$ -tą przestrzenią oskułującą  $\text{Osc}_P^{(m)}(X)$  w punkcie  $P \in X$  nazywamy urzutowienie  $\mathbb{P}(j_{k,P}(V)) \subseteq \mathbb{P}(V)$  obrazu odwzorowania

$$j_{k,P} : V \longrightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(P)^{m+1}).$$

Oczekiwany wymiar (rzutowy) przestrzeni  $\text{Osc}_P^{(m)}(X)$  w punkcie ogólnym  $P \in X$  jest równy  $\binom{n+m}{n} - 1$ . Jeśli wymiar ten, w każdym punkcie, jest mniejszy niż  $\binom{n+m}{n} - 1$ , to za Shifrinem [40] rozmaitość  $X$  nazywamy *hypo-oskułującą rzędu  $m$* . Dokładniej, różnica ta dla przestrzeni oskułującej  $X$  jest mierzona liczbą równań Laplace'a, spełnianych przez  $X$ .

**Definicja 33 (Równania Laplace'a)** Mówimy, że rzutowa rozmaitość  $X \subset \mathbb{P}^N$  wymiaru  $n$  spełnia  $\delta$  niezależnych równań Laplace'a rzędu  $m$ , jeśli dla ogólnego punktu  $P \in X$  zachodzi nierówność  $\dim \text{Osc}_P^{(m)} X < \min \left\{ \binom{n+m}{n} - 1, N \right\}$  oraz istnieje

$$\delta = \min \left\{ \binom{n+m}{n} - 1, N \right\} - \dim \text{Osc}_P^{(m)} X.$$

Istnienie niespodziewanej hiperpowierzchni stopnia  $d$  dopuszczanej przez zbiór  $Z$  w  $\mathbb{P}^N$  jest związane z istnieniem przestrzeni oskułującej wymiaru mniejszego niż oczekiwany wymiar obrazu  $\mathbb{P}^N$  poprzez wymierne odwzorowane zdefiniowane przez system liniowy wielomianów jednorodnych stopnia  $d$  w  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$  znikających we wszystkich punktach  $Z$ .

Dokładniej, niech  $Z \subseteq \mathbb{P}^N$  będzie zbiorem punktów, które dopuszczają niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia  $d$  z krotnością  $m$  w punkcie ogólnym. Niech  $V \subseteq H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))$  będzie podprzestrzenią sekcji znikających na  $Z$ , tzn.  $V = H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes \mathcal{I}(Z))$ . Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy elementami z  $V$  a jednorodną częścią  $(I(Z))_d$  stopnia  $d$  ideału  $I(Z)$  zbioru  $Z$ . Elementy  $V$  zadają odwzorowanie wymierne

$$\varphi_V : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^M,$$

gdzie  $M = \dim(V) - 1$ . Problem ze zbiorem  $Z$ , gdzie odwzorowanie  $\varphi_V$  nie jest określone, może być łatwo rozwiązany przez przejście do rozdmuchania  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{P}^N$  w punktach  $Z$ . Otrzymany morfizm oznaczamy przez  $\tilde{\varphi}_V$

$$\begin{array}{ccc}
Y & & \\
\pi \downarrow & \searrow \tilde{\varphi}_V & \\
\mathbb{P}^N & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathbb{P}^M.
\end{array}$$

**Lemat 34** *Niech  $X = \tilde{\varphi}_V(Y)$  będzie domknięciem obrazu  $\varphi_V$ . Wtedy  $X$  spełnia co najmniej jedno równanie Laplace'a rzędu  $(m - 1)$ .*

Można to łatwo uzasadnić następująco. Istnienie niespodziewanej hiperpowierzchni  $H_P$  stopnia  $d$  z krotnością  $m$  w punkcie ogólnym  $P$  jest równoważne z tym, że wymiar oczekiwany  $\text{Osc}_{\tilde{\varphi}_V(P)}^{(m)} X$  jest  $\geq M$ . Z drugiej strony niespodziewana hiperpowierzchnia  $H_P$  odpowiada elementowi w systemie  $V$ , a zatem również w  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)$ , wycinającym na  $X$  dywizor  $D_P$  z krotnością  $\text{mult}_{\tilde{\varphi}_V(P)} D_P \geq m$ , co pokazuje, że  $\dim \text{Osc}_{\tilde{\varphi}_V(P)}^{(m)} X < M$ .

Powyższe rozumowanie w zestawieniu z BSMM dualnością pozwala zdefiniować pojęcie *rozmaitości stowarzyszonej*, które wprowadziłam w pracy [Hab3]. Sama idea jest bardzo prosta. Niech  $Z$  będzie zbiorem punktów w  $\mathbb{P}^N$ , który dopuszcza niespodziewaną hiperpowierzchnię stopnia  $d$  z krotnością  $m$  w punkcie ogólnym  $P = (a_0 : \dots : a_N)$ . Niech  $g_0, \dots, g_M$  będą generatorami ideału  $[I(Z)]_d$ . Równanie niespodziewanej hiperpowierzchni (14) może być zapisane w postaci

$$F((a_0 : \dots : a_N), (x_0 : \dots : x_N)) = \sum_{i=0}^M h_i(a_0 : \dots : a_N) g_i(x_0 : \dots : x_N).$$

**Definicja 35 (Rozmaitość stowarzyszona, zob. [Hab3, Subsection 4.4])** *Przy powyższych założeniach, niech  $X$  będzie obrazem odwzorowania wymiernego określonego przez  $g_0, \dots, g_M$ . Rozmaitością stowarzyszoną  $X'$  do  $X$  nazywamy obraz odwzorowania wymiernego określonego przez  $h_0, \dots, h_M$ .*

Warto się tutaj zastanowić, jakie własności geometryczne wyróżniają rozmaitości stowarzyszone wśród wszystkich wymiernych rozmaitości lub, bardziej precyzyjnie, rzutowań rozmaitości Veronese. W pracy [Hab3] udowodniłam następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 36 (zob [Hab3], Proposition 4.12)** *Niech  $Z$  będzie zbiorem punktów w  $\mathbb{P}^2$  wyznaczonych przez system pierwiastkowy  $B_3$ . Wtedy rozmaitość stowarzyszona  $X'$  określona przez niespodziewaną krzywą stopnia 4, którą dopuszcza zbiór  $Z$ , jest gładką powierzchnią stopnia 9 w  $\mathbb{P}^5$  spełniającą jedno równanie Laplace'a rzędu 2.*

W pracy [Hab3] pokazałam również, że w przypadku systemu  $B_3$  algebra  $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle g_0, g_1, \dots, g_5 \rangle$  jest artinowska. Zatem, w szczególności, odwzorowanie wymierne określone przez  $g_0, \dots, g_5$  jest morfizmem.

Wyniki te są bardzo zaskakujące i zapoczątkowały dalsze badania. W najnowszym preprintcie [15], pokazaliśmy nowe przykłady i pewne ciekawe własności. Sądzę, że można wkrótce oczekiwać większej liczby prac z tej tematyki.

### 4.3.6 Podsumowanie

Sekcja ta przedstawia mój najważniejszy wkład w opisaną gałąź badań.

1. Wprowadzenie i systematyczne badanie konfiguracji hiperpłaszczyzn typu Fermata w przestrzeniach rzutowych ustalonego wymiaru. Pojawiają się one w pracach [Hab1], [Hab2], [Hab4], [Hab5] oraz [Hab6].
2. Połączenie istnienia niespodziewanych hiperpowierzchni z przestrzeniami oskułującymi wyższych rzędów w [Hab3] oraz wprowadzenie rozmaitości stowarzyszonych.

3. Rozpoczęcie systematycznych badań nad przestrzenią parametrów konfiguracji Böröczkyego w [Hab7]. Metoda algebraiczna zastosowana w tym przypadku jest uniwersalna i może być użyta również w badaniu innych typów konfiguracji.
4. Wprowadzenie i systematyczne stosowanie ustożkowania w perspektywie algebraicznej. Prace [Hab1], [Hab5] oraz [Hab6] pokazują, że metoda ta dobrze pracuje przy różnego rodzaju problemach.

### Literatura

- [8] Bauer, T., Di Rocco, S., Schmitz, D., Szemberg, T., **Szpond, J.**: On the postulation of lines and a fat line, *J. Symbolic Comput.* 91 (2019), 3 – 16
- [9] Bocci, C., Harbourne, B.: Comparing Powers and Symbolic Powers of Ideals, *J. Algebraic Geometry* 19 (2010), 399 – 417
- [10] Bocci, C., Harbourne, B.: The resurgence of ideals of points and the containment problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2010), 1175 – 1190
- [11] Cook II, D., Harbourne, B., Migliore, J., Nagel, U.: Line arrangements and configurations of points with an unusual geometric property. *Compos. Math.* 154 (2018), no. 10, 2150 – 2194
- [12] Czapliński, A., Główska, A., Malara, G., Lampa-Baczyńska, M., Łuszcz-Świdecka, P., Pokora, P., **Szpond, J.**: A counterexample to the containment  $I^{(3)} \subset I^2$  over the reals, *Adv. Geom.* 16 (1) (2016), 77 – 82
- [13] Deligne, P.: Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.* 17 (1972), 273 – 302
- [14] Di Gennaro, R., Ilardi, G., Vallès, J.: Singular hypersurfaces characterizing the Lefschetz properties, *J. London Math. Soc. (2)* 89 (2014), no. 1, 194 – 212
- [15] Di Gennaro, R., Ilardi, G., Miró-Roig, R. M., Szemberg, T., **Szpond, J.**: Companion varieties for root systems and Fermat arrangements, arXiv:2101.07346
- [16] Dumnicki, M., Farnik, Ł., Harbourne, B., Malara, G., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: A matrixwise approach to unexpected hypersurfaces, *Lin. Alg. and Appl.* 592 (2020), 113 – 133
- [17] Dumnicki, M., Harbourne, B., Roé, J., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Unexpected surfaces singular on lines in  $\mathbb{P}^3$ , *European Journal of Mathematics* (2020). <https://doi.org/10.1007/s40879-020-00433-w>
- [18] Dumnicki, M., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Counterexamples to the  $I^{(3)} \subset I^2$  containment, *J. Algebra* 393 (2013), 24 – 29
- [19] Ein, L., Lazarsfeld, R., Smith, K.: Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties, *Invent. Math.* 144 (2001), 241 – 252
- [20] Farnik, Ł., Kabat, J., Lampa-Baczyńska, M., Tutaj-Gasińska, H.: Containment problem and combinatorics, *J. Algebraic Combin.* 50 (2019), no. 1, 39 – 47
- [21] Farnik, Ł., Kabat, J., Lampa-Baczyńska, M., Tutaj-Gasińska, H.: On the parameter spaces of some Böröczky configurations, *Internat. J. Algebra Comput.* 28 (2018), no. 7, 1231 – 1246
- [22] Geramita, A.V., Harbourne, B., Migliore, J.: Star configurations in  $\mathbb{P}^n$ , *J. Algebra* 376 (2013), 279 – 299
- [23] Green, B., Tao, T.: On sets defining few ordinary lines, *Discrete Comput. Geom.* 50 (2013), 409 – 468

- [24] Harbourne, B., Huneke, C.: Are symbolic powers highly evolved?, *J. Ramanujan Math. Soc.* 28 (2013), 311 – 330
- [25] Harbourne, B., Migliore, J., Nagel, U., Teitler, Z.: Unexpected hypersurfaces and where to find them, *Michigan Math. J.*, to appear
- [26] Harbourne, B., Seceleanu, A.: Containment counterexamples for ideals of various configurations of points in  $\mathbb{P}^N$ , *J. Pure Appl. Algebra* 219 (2015), 1062 – 1072
- [27] Hochster, M., Huneke, C.: Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals, *Invent. Math.* 147 (2002), 349 – 369
- [28] Janasz, M., Lampa-Baczyńska, M., Malara, G.: New phenomena in the containment problem for simplicial arrangements, *J. Commut. Algebra*, to appear
- [29] Lehrer, G. I.: On the Poincaré series associated with Coxeter group actions on complements of hyperplanes, *J. London Math. Soc. (2)* 36 (1987), no. 2, 275 – 294
- [30] Ma, L., Schwede, K.: Perfectoid multiplier/test ideals in regular rings and bounds on symbolic powers, *Invent. Math.*, 214(2) (2018), 913 – 955
- [31] Malara, G., **Szpond, J.**: The containment problem and a rational simplicial arrangement, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 24 (2017), 123 – 128
- [32] McDuff, D., Polterovich, L.: Symplectic packings and algebraic geometry, *Inventiones Math.* 115 (1994), 405 – 429
- [33] Moreau, J.-C.: Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques, *Séminaire P. Lelong – Henri Skoda (Analyse)*, 1978/79, 174 – 190, *Lecture Notes Math.* 822, Springer-Verlag, 1980
- [34] Nagata, M.: On the 14-th problem of Hilbert, *Amer. J. of Math.* 33 (1959), 766 – 772
- [35] Novik, I.; Postnikov, A., Sturmfels, B.: Syzygies of oriented matroids, *Duke Math. J.* 111 (2002), 287 – 317
- [36] Orlik, P., Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Invent. Math.* 56 (1980), no. 2, 167 – 189
- [37] Orlik, P., Terao, H.: Arrangements of Hyperplanes, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 300 (Springer, Berlin, 1992)
- [38] Roulleau, X., Urzúa, G.: Chern slopes of simply connected complex surfaces of general type are dense in  $[2, 3]$ , *Ann. of Math. (2)* 182 (2015), no. 1, 287 – 306
- [39] Shephard, G. C., Todd, J. A.: Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.* 6 (1954), 274 – 304
- [40] Shifrin, T.: The osculatory behavior of surfaces in  $\mathbf{P}^5$ , *Pacific J. Math.*, 123(1) (1986), 227 – 256
- [41] Swanson, I.: Linear equivalence of ideal topologies, *Math. Z.* 234 (2000), no. 4, 755 – 775
- [42] Szemberg, T., **Szpond, J.**: On the containment problem, *J. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser* 66 (2017), no. 2, 233 – 245



## 4.4 Inne wyniki

W tej części omówię pokrótce wyniki, które nie są częścią zaprezentowanego osiągnięcia habilitacyjnego, a które zostały opublikowane po obronie pracy doktorskiej i nie są z nią związane tematycznie. Są one przedstawione w pewnych grupach, tak aby omówienie to było zwarte i stosunkowo krótkie.

### A. Asymptotyczne niezmienniki ideałów jednorodnych

W ostatnich latach zaobserwowano, że spojrzenie asymptotyczne na pewne problemy w algebrze przemiennej i geometrii algebraicznej często pozwala na osiągnięcie znacznie lepszych rezultatów niż te, otrzymywane dla izolowanych przypadków. W tym właśnie duchu pojawiły się niezmienniki asymptotyczne i ich badanie. Niektóre z nich mają głębokie korzenie w matematyce. Na przykład stopień inicjujący  $\alpha(I)$  ideału jednorodnego  $I$  definiujemy jako najmniejszy stopień niezerowego elementu w  $I$ . Asymptotycznym odpowiednikiem  $\alpha(I)$  jest stała Waldschmidta  $\hat{\alpha}(I)$ , która bierze pod uwagę równocześnie wszystkie potęgi symboliczne ideału  $I$

$$\hat{\alpha}(I) = \inf_{m \geq 1} \frac{\alpha(I^{(m)})}{m}. \quad (15)$$

Okazuje się, że ten niezmiennik zdefiniowany w (15) około 2010 roku, studiowany był już znacznie wcześniej w analizie zespolonej przy wyżej wymiarowych odpowiednikach Lematu Schwarza. Dokładniej, Moreau udowodnił, że zachodzi następująca wersja Lematu Schwarza dla zmiennych zespolonych [33, Theorem 1.1].

**Twierdzenie 37 (Moreau)** *Niech  $Z \subset \mathbb{C}^n$  będzie skończonym zbiorem punktów. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej  $m \in \mathbb{Z}$ , istnieje liczba rzeczywista  $r_m(Z)$  taka, że dla każdego  $R \geq r \geq r_m(Z)$  i dla każdej funkcji holomorficznej  $f$  znikającej co najmniej do rzędu  $m$  w każdym punkcie  $Z$  mamy*

$$|f|_r \leq \left( \frac{2e^{n/2}r}{R} \right)^{\alpha(mZ)} |f|_R, \quad (16)$$

gdzie  $|f|_s = \sup_{|z| \leq s} |f(z)|$ , natomiast  $\alpha(kW)$  jest najmniejszym stopniem wielomianu znikającego we wszystkich punktach skończonego zbioru  $W$  co najmniej do rzędu  $k$ .

W pracach [A1, A2, A3, A4] rozważamy stałe Waldschmidta z rozmaitych punktów widzenia. Praca [A7] ma nieco inny charakter. Studiujemy w niej wartość różnicy stopnia inicjującego drugiej potęgi symbolicznej oraz tego stopnia dla samego ideału. Okazuje się, że mała wartość różnicy ma poważne konsekwencje dla geometrii zbioru punktów opisanych przez ten ideał.

Pomysł łączenia obiektów geometrii zespolonej z wielomianami jest od dawna obecny w geometrii algebraicznej w formie wielościanów Newtona. W przypadku systemów liniowych wielościany Newtona zostały uogólnione w pracach Okounkova około 1995 roku, a następnie były systematycznie stosowane do rozwiązywania ważnych problemów w teorii pozytywności przez Lazarsfelda, Mustatǎ oraz Kaveha, Khovanskiiego około 2006 roku. Ogólną obserwacją stojącą za tą konstrukcją jest to, że obiekty geometryczne kodują różne numerycznie niezmienniki równocześnie, w tym stałą Waldschmidta. W pracy [A8] badamy pewne własności brył Newtona-Okounkova, z kolei w [A5], [A6] rozważamy koncepcję kształtu granicznego związanego z rodziną ideałów z gradacją. Pokazujemy, w szczególności, jak odczytywać ważne własności tych rodzin, stałą Waldschmidta, asymptotyczną regularność i asymptotyczną funkcję Hilberta z odpowiadających im kształtów granicznych.

[A1] Dumnicki, M., Fashami, M. Z., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Lower bounds for Waldschmidt constants of generic lines in  $P^3$  and a Chudnovsky-type theorem, *Mediterr. J. Math.* 16 (2019), Art id: 53

[A2] Szemberg, T., **Szpond, J.**: Waldschmidt constants for Stanley-Reisner ideals of a class of graphs, *Multigraded algebra and applications*, 159 – 167, Springer Proc. Math. Stat., 238, Springer, Cham 2018

- [A3] Malara, G., Szemberg, T., **Szpond, J.**: On a conjecture of Demailly and new bounds on Waldschmidt constants in  $\mathbb{P}^N$ , J. Number Theory, 189 (2018), 211 – 219
- [A4] Farnik, Ł., Gwoździewicz, J., Hejmej, B., Lampa-Baczyńska, M., Malara, G., **Szpond, J.**: Initial sequences and Waldschmidt constants of planar point configurations, Internat. J. Algebra Comput. 27 (2017), no. 6, 717 – 729
- [A5] Dumnicki, M., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Asymptotic Hilbert Polynomial and limiting shapes, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 4446 – 4457
- [A6] Dumnicki, M., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Symbolic generic initial system of star configurations, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), 1073 – 1081
- [A7] Baczyńska, M., Dumnicki, M., Habura, A., Malara, G., Pokora, P., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Points fattening on  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  and symbolic powers of bi-homogeneous ideals, J. Pure Appl. Alg. 218 (2014), 1555 – 1562
- [A8] Blum, H., Malara, G., Merz, G., **Szpond, J.**: Notes on local positivity and Newton-Okounkov bodies, In: Alberich-Carraminana M., Galindo C., Küronya A., Roé J. (eds) Extended Abstracts February 2016. Trends in Mathematics, vol 9. pp. 105 – 111, Birkhäuser, Cham, 2018

## B. Kombinatoryczne aspekty geometrii algebraicznej

Konfiguracje prostych są klasycznym obiektem w geometrii. W pracach przedstawionych w tej części uwaga skoncentrowana jest na pewnych aspektach kombinatorycznych związanych z konfiguracjami. Prace [B2] oraz [B3] stanowią wprowadzenie w zagadnienie. Pomimo, że metody zastosowane tutaj są kombinatoryczne (przede wszystkim w [B1]) rozwiązywane problemy są mocno zakorzenione w algebrze i geometrii algebraicznej.

Jeden z takich problemów jest motywowany hipotezą o ograniczonej negatywności, która przewiduje, że na dowolnej gładkiej zespolonej powierzchni rzutowej istnieje ograniczenie z dołu na samoprzecięcie wszystkich nierozkładalnych krzywych zawartych w tej powierzchni. Hipoteza ta nie została zweryfikowana nawet w przypadku powierzchni wymiernych. Pewne zainteresowanie w tym kontekście zyskały powierzchnie powstające poprzez rozdmuchanie  $\mathbb{P}^2$  w punktach osobliwych konfiguracji prostych. Liniowe stałe Harbourne’a, badane w [B4] oraz [B7] koncentrują się na takich powierzchniach.

Praca [B6] z kolei, jest motywowana zainteresowaniem konfiguracjami prostych z dużą liczbą punktów krotności co najmniej 3 w kontekście konstruowania kontrprzykładów na zawieranie  $I^{(3)} \subseteq I^2$ . Podaliśmy pełną klasyfikację konfiguracji do 11 prostych z maksymalną liczbą punktów potrójnych. Przedyskutowana została również możliwość realizacji tych konfiguracji w zależności od ciała nad którym są rozpatrywane. Wynik ten jest kompletny i poprawia wcześniejsze rezultaty w tym kierunku.

Z kolei praca [B5] nawiązuje do znanego Twierdzenia Sylwestera-Gallaia, które pokazuje, w szczególności, że nie istnieje konfiguracja prostych na *rzeczywistej* płaszczyźnie rzutowej (inna niż pęk prostych), o tej własności, że przez każdy punkt przecięcia dwóch prostych, przechodzi dodatkowa prosta. W pracy [B5] uogólniliśmy ten wynik na konfiguracje stożkowych na rzeczywistej płaszczyźnie rzutowej i zadaliśmy pytanie, czy założenie o ciele liczb rzeczywistych jest konieczne w tym przypadku. Wynik ten został ostatecznie uogólniony na przypadek krzywych stopnia 3 przez Alexa Cohena i Franka de Zeeuwa w pracy ”A Sylvester-Gallai theorem for cubic curves” (arXiv:2010.01513).

- [B1] Dumnicki, M., Gwoździewicz, J., **Szpond, J.**: An elementary, geometric proof of the non-existence of a projective plane of order 6, Contrib. Discrete Math. 15 (2020), 1 – 9
- [B2] **Szpond, J.**: A few introductory remarks on line arrangements, Analytic and Algebraic Geometry 3, Łódź University Press 2019, 201 – 212

- [B3] **Szpond, J.:** On Hirzebruch type inequalities and applications, In: Alberich-Carraminana M., Galindo C., Küronya A., Roé J. (eds) Extended Abstracts February 2016. Trends in Mathematics, vol 9. pp. 89 – 94, Birkhäuser, Cham 2018
- [B4] Dumnicki, M., Harrer, D., **Szpond, J.:** On absolute linear Harbourne constants, Finite Fields Appl. 51 (2018), 371 – 387
- [B5] Czapliński, A., Dumnicki, M., Farnik, Ł., Gwoździejewicz, J., Lampa-Baczyńska, M., Malara, G., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: On the Sylvester-Gallai theorem for conics, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 136 (2016), 191 – 203
- [B6] Dumnicki, M., Farnik, Ł., Głowska, A., Lampa-Baczyńska, M., Malara, G., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Line arrangements with the maximal number of triple points, Geom. Dedicata, 180 (2016), 69 – 83
- [B7] **Szpond, J.:** On linear Harbourne constants, British Journal of Mathematics & Computer Science, 8(4) (2015), 286 – 297

### C. Systemy liniowe i pytania o pozytywność

Wyniki związane z systemami liniowymi są chyba najmniej spójne tematycznie. Z jednej strony, praca [C3] nawiązuje do hipotezy o ograniczonej negatywności i bada krzywe o samoprzecięciu ujemnym na rozdmuchaniach  $\mathbb{P}^2$  w pewnych symetrycznych zbiorach punktów. Głównym wynikiem pracy [C4] jest natomiast twierdzenie, które podaje ostre ograniczenie na możliwe wartości stałych Seshadriego szerokich wiązek liniowych na powierzchniach. Wiadomo, że jeśli  $L$  jest szeroką wiązką liniową na gładkiej powierzchni zespolonej  $X$ , to jej stała Seshadriego  $\varepsilon(L; 1)$  jest albo maksymalna, tzn. jest równa  $\sqrt{L^2}$ , albo jest mniejsza od tej liczby i wymierna. Seria wyników Szemberga łączy możliwe wartości stałych Seshadriego  $\varepsilon(L; 1)$  obliczanych w bardzo ogólnym punkcie  $P$  z rozwiązaniem równania Pella

$$y^2 - dx^2 = 1, \quad (17)$$

gdzie  $d = L^2$ . Nasze Twierdzenie podaje dodatkowe założenia na  $\varepsilon(L; 1)$ , które pośrednio wynikają z prac Küronyi i Lozovanu.

**Twierdzenie 38** *Niech  $X$  będzie gładką powierzchnią rzutową,  $x \in X$ , niech  $L$  będzie szeroką wiązką liniową na  $X$  taką, że  $(L^2) = d$  nie jest kwadratem. Niech  $(p, q)$  będzie dowolnym rozwiązaniem równania Pella (17). Wtedy albo*

$$\varepsilon(L; 1) \geq \frac{p}{q}d,$$

albo

$$\varepsilon(L; 1) \in \{1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{d} \rfloor\} \cup \left\{ \frac{a}{b} \text{ takie, że } 1 \leq \frac{a}{b} < \frac{p}{q}d \text{ oraz } 2 \leq b < q^2 \right\}.$$

Prace [C1] oraz [C2] dotyczą problemu wyznaczenia funkcji Hilberta. W [C2] uogólniamy wynik Hartshorna i Hirschowitza pokazujący, że skończony zbiór  $s$  prostych ogólnych  $\mathbb{P}^n$  ma oczekiwaną funkcję Hilberta, tzn. zadaje on spodziewaną liczbę  $s(d+1)$  warunków na formy stopnia  $d$ . Pokazujemy, że zachodzi to również przy założeniu, że jedna z tych prostych ma niezredukowaną strukturę. W pracy zostały wprowadzony zigzagi, czyli pewne degeneracje ogólnych prostych, które pozwalają zastosować metodę Castelnuovo rozbicia problemu liczenia funkcji Hilberta na podschemat śladowy i rezydualny w połączeniu ze specjalizacją wyjściowego schematu.

W pracy [C1] badamy funkcję Hilberta zbioru punktów, z których jeden ma niezredukowaną strukturę. Jak już wspomniano w sekcji 4.3, w tym przypadku, funkcja Hilberta może się różnić od oczekiwanej. Problem badamy poprzez analizę macierzy interpolacji.

- [C1] Dumnicki, M., Farnik, Ł., Harbourne, B., Malara, G., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: A matrixwise approach to unexpected hypersurfaces, *Lin. Alg. and Appl.* 592 (2020), 113 – 133
- [C2] Bauer, T., Di Rocco, S., Schmitz, D., Szemberg, T., **Szpond, J.**: On the postulation of lines and a fat line, *J. Symbolic Comput.* 91 (2019), 3 – 16
- [C3] Dumnicki, M., Farnik, Ł., Hanumanthu, K., Malara, G., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Negative curves on special rational surfaces, *Analytic and Algebraic Geometry 3*, Łódź University Press 2019, 6 – 78
- [C4] Farnik, Ł., Szemberg, T., **Szpond, J.**, Tutaj-Gasińska, H.: Restrictions on Seshadri Constants on Surfaces, *Taiwanese J. Math.* 21 (2017), 27 – 41

#### D. Potęgi symboliczne i inne, motywowane geometrycznie, operacje na ideałach jednorodnych

Ostatnia grupa prac oscyluje wokół potęg symbolicznych ideałów jednorodnych i ich związków z potęgami algebraicznymi. Praca [D4] zawiera pierwszy kontrprzykład na zawieranie  $I^{(3)} \subset I^2$  nad ciałem liczb zespolonych. Zbudowany jest on na bazie konfiguracji Böröczykego. Wspólna praca [D2] z Malarą przedstawia pierwszy wymierny kontrprzykład symplecjalny. Praca przeglądowa [D3] z Szembergim zawiera zbiór najnowszych (w momencie jej powstania) informacji na temat problemu zawierania, jak i zestaw problemów i sugestii, które wpłynęły na badania w tym kierunku w następnych latach. W szczególności badania Grifo z jej ostatnich prac zostały zainspirowane naszymi wynikami. Artykuł [D1] podsumowujący pracę grupy badawczej z warsztatów w Oberwolfach w 2015 roku poświęcony jest potęgom symbolicznym. Praca nawiązuje do naturalnego pytania, kiedy symboliczne i algebraiczne potęgi są sobie równe. Oczywiście jest to prawda dla ideałów będących zupełnym przecięciem, ale nie tylko. Nasz główny wynik, przytoczony poniżej, przedstawia eleganckie i efektywne kryterium na sprawdzenie, kiedy symboliczne i algebraiczne potęgi są równe dla ideałów Cohena-Macaulaya kowymiaru dwa.

**Twierdzenie 39** *Niech  $I = I_X$  będzie wysaturowanym ideałem jednorodnym definiującym podschemat  $X \subset \mathbb{P}^n$  taki, że  $\text{codim}(X) = 2$ ,  $X$  jest arytmetycznie Cohena-Macaulaya oraz  $X$  jest lokalnie zupełnym przecięciem. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (a)  $I^{(n)} = I^n$ ;
- (b)  $I^{(m)} = I^m$  dla każdego  $m \geq 1$ ;
- (c)  $I$  ma co najwyżej  $n$  generatorów minimalnych.

To stwierdzenie jest interesujące, ponieważ dla schematów  $X$  takich jak w Twierdzeniu zachodzi równość  $I_X^{(m)} = I_X^m$  dla  $m < n$ . Zatem  $n$ -ta potęga jest tą, która decyduje o równości wszystkich potęg. W pracy rozważamy również podschematy kowymiaru 3 przy założeniu że są one arytmetycznie Gorensteina.

- [D1] Cooper, S., Fatabbi, G., Guardo, E., Lorenzini, A., Migliore, J., Nagel, U., Seceleanu, A., **Szpond, J.**, Van Tuyl, A.: Symbolic powers of codimension two Cohen-Macaulay ideals, *Communications in Algebra*, vol. 48 (11) (2020), 4663 – 4680
- [D2] Malara, G., **Szpond, J.**: The containment problem and a rational simplicial arrangement, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 24 (2017), 123 – 128
- [D3] Szemberg, T., **Szpond, J.**: On the containment problem, *J. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser* 66 (2017), no. 2, 233 – 245

- [D4] Czaplinski, A., Głowka, A., Malara, G., Lampa-Baczyńska, M., Łuszcz-Świdecka, P., Pokora, P., **Szpond, J.**: A counterexample to the containment  $I^{(3)} \subseteq I^2$  over the reals, *Adv. Geometry*, 16 (2016), 77 – 82

## 5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej

- Polska, Instytut Matematyczny PAN, specjalne stanowisko badawcze, październik 2020 – wrzesień 2022,
- Niemcy, Oberwolfach Research Fellow, wrzesień, 2020,
- Stany Zjednoczone, University of Nebraska-Lincoln, wrzesień 2019,
- Niemcy, University of Marburg, marzec 2018,
- Szwecja, KTH Stockholm, listopad, 2017,
- Szwecja, KTH Stockholm, listopad, 2016,
- Polska, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, kwiecień – czerwiec, 2016,
- Włochy, University of Catania, listopad, 2015,
- Niemcy, University of Freiburg, czerwiec, 2015.

## 6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

### Osiągnięcia dydaktyczne:

- Prowadzone kursy: geometria, Differential Geometry (w języku angielskim dla studentów programu Erasmus), algebra liniowa, algebra przemienne, topologia, analiza matematyczna, metody numeryczne, matematyka dyskretna, efektywne metody w geometrii algebraicznej, efektywne metody w matematyce dyskretniej (dla studentów studiów doktoranckich).
- Autor skryptu dla studentów:  
J. Szczawińska, **J. Szpond**, *Geometria elementarna. Notatki do wykładu*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków, 3 wydania: 2016, 2017, 2019.
- Promotor: 23 prac licencjackich i 16 prac magisterskich.

### Osiągnięcia organizacyjne:

- Kierownik Katedry Geometrii w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, wrzesień 2017 – wrzesień 2020.
- Współorganizator następujących wydarzeń:
  - Konferencja satelitarna ICM 2022 "Recent Advances in Classical Algebraic Geometry", Kraków, Polska, 28 czerwca – 2 lipca 2022,
  - Konferencja "MEGA 2022", Kraków, Polska, 20 – 24 czerwca, 2022,

- Konferencja "Oblicza Algebry IV", Kraków, Polska, 27 – 30 maja, 2021,
- Konferencja "Lefschetz Properties in Algebra, Geometry and Combinatorics", Oberwolfach, Niemcy, 27 września – 3 października, 2020,
- Konferencja "Oblicza Algebry III", Kraków, Polska, 1 – 4 czerwca, 2019,
- Mini - Warsztaty "Asymptotic Invariants of Homogeneous Ideals", Oberwolfach, Niemcy, 30 września – 6 października, 2018,
- Warsztaty "The Twentieth Andrzej Jankowski Memorial Lecture Introductory Workshop", Kraków, Polska, 20 – 22 kwietnia, 2018,
- Konferencja "Oblicza Algebry II", Kraków, Polska, 1 – 4 czerwca, 2017,
- Warsztaty "The Nineteenth Andrzej Jankowski Memorial Lecture Introductory Workshop", Kraków, Polska, 21 – 23 kwietnia, 2017,
- Koordynator Małopolskiej Nocy Naukowców (MSCA-NIGHT), Kraków, Polska, 2016, 2017,
- Koordynator Young Researchers Seminar – jako poddziałania w Simons Mini-Semester "Polish Algebraic Geometry mini-Semester", IM PAN, Warszawa, Polska, kwiecień – czerwiec, 2016,
- Konferencja "Oblicza Algebry", Kraków, Polska, 29 maja – 1 czerwca, 2015,
- Konferencja IMPANGA 15, Centrum Banacha, Będlewo, Polska, 12 – 18 kwietnia, 2015.
- Członek Komisji Rekrutacyjnej na Studia Doktoranckie w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, 2011 – 2019.

#### **Osiągnięcia popularyzatorskie:**

- Autor dwóch "snapshot of modern mathematics from Oberwolfach":
  - On the containment problem, No. 3/2016, 10.14760/SNAP-2016-003-EN (2016), (z T. Szembergiem),
  - A few shades of interpolation, No. 7/2017, 10.14760/SNAP-2017-007-EN (2017).
- Wykonawca w "Laboratorium Twórczej Matematyki", grantie Narodowego Centrum Badań i Rozwoju nr POWR.03.01.00-00-C008/16, wrzesień 2017 – sierpień 2019.
- Koordynator i wykonawca w "Exploratorium Twórczej Matematyki", grantie Narodowego Centrum Badań i Rozwoju nr POWR.03.01.00-00-U126/17-01, wrzesień 2018 – sierpień 2020.
- Organizator warsztatów: Are lines straight (forward)? podczas EuroMath 2018, Kraków, Polska.

#### **7 Oprócz kwestii wymienionych w pkt. 1-6, wnioskodawca może podać inne informacje, ważne z jego punktu widzenia, dotyczące jego kariery zawodowej**

- Redaktor Naczelny czasopisma Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica, od 1 stycznia 2017.
- Recenzent Zentralblatt MATH.
- Recenzent różnych czasopism (np. Iranian Mathematical Society, Annales Polonici Mathematici, Communications in Algebra, Journal of Pure and Applied Algebra, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, Journal of Number Theory, Comptes Rendus Mathématique, Mathematics, Journal of Algebraic Combinatorics, Collectanea Mathematica).
- Granty naukowe:

- Narodowe Centrum Naukowe, Opus 18 Grant Nr 2019/35/B/ST1/00723, wykonawca, czerwiec 2020 – czerwiec 2023,
  - Narodowe Centrum Naukowe, Harmonia Grant Nr 2018/30/M/ST1/00148, wykonawca, marzec 2019 – marzec 2022,
  - Narodowe Centrum Naukowe, Miniatura 2 Grant nr 2018/02/X/ST1/00519, **kierownik**, grudzień 2018 – grudzień 2019,
  - Narodowe Centrum Naukowe, Opus 8 Grant Nr 2014/15/B/ST1/02197, wykonawca, lipiec 2015 – lipiec 2018,
  - Solidarity travel grant European Mathematical Society, czerwiec 2017.
- Promotor pomocniczy pracy doktorskiej: *The effect of points fattening on del Pezzo surfaces* dr Magdaleny Lampy-Baczyńskiej z Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, 2017.
  - Wyróżnienie w konkursie im. Edyty Szymańskiej na najlepszy wynik naukowy (lub serię takich wyników) z zakresu matematyki i informatyki teoretycznej przez kobietę związaną z polskim środowiskiem matematycznym, 2019, 2021.
  - Nagroda rektora za osiągnięcia naukowe w 2018, 2019.
  - Medal Komisji Edukacji Narodowej za szczególne zasługi dla oświaty i wychowania, 2018.
  - Brązowy medal za długoletnią służbę, 2016.

*Justyna Syronal*  
(Podpis wnioskodawcy)