



Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Karol Ławniczak

Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych

Funkcja Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie

ROZPRAWA DOKTORSKA

przygotowana pod kierunkiem prof. dr. hab. Krzysztofa Kowalskiego
w Katedrze Fizyki Teoretycznej WFiIS Uniwersytetu Łódzkiego

2023

Podziękowania

Chciałbym najmocniej podziękować Panu Profesorowi Krzysztofowi Kowalskiemu za zaangażowanie mnie w arcydziełny temat badawczy, opiekę naukową w toku badań i przygotowania rozprawy doktorskiej oraz za osobistą życzliwość.

Obliczenia numeryczne w niniejszej pracy zostały wykonane z wykorzystaniem Infrastruktury PL-Grid.

Spis treści

I	Wstęp.....	9
1.1	Wprowadzenie.....	9
1.1.1	Rozkład kwaziprawdopodobieństwa Wignera.....	9
1.1.2	Mechanika kwantowa sformułowana w przestrzeni fazowej.....	9
1.1.3	Mechanika kwantowa na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie.....	10
1.2	Cele pracy i wyniki dodatkowe.....	10
1.3	Zakres i organizacja opracowania.....	11
II	Mechanika kwantowa w przestrzeni fazowej topologicznie trywialnej.....	13
2.1	Przestrzeń konfiguracyjna i fazowa w przypadku standardowym.....	13
2.2	Standardowe stany koherentne.....	14
2.2.1	Generowanie stanów koherentnych w \mathbb{R}^n ze stanu podstawowego.....	15
2.3	Funkcja kwaziprawdopodobieństwa Wignera.....	16
2.4	Transformacje Weyla i Wignera.....	17
2.5	Transformacja Segala-Bargmanna, funkcja falowa na przestrzeni fazowej.....	18
2.6	Funkcja Husimiego.....	20
III	Uogólnienia przedstawionych narzędzi na przypadki topologicznie nietrywialne.....	23
3.1	Uogólnienia stanów koherentnych.....	23
3.2	Uogólnienia funkcji Wignera.....	24
IV	Okrąg.....	25
4.1	Przestrzeń konfiguracyjna, fazowa i przestrzeń Hilberta dla okręgu.....	25
4.1.1	Parametryzacja przestrzeni konfiguracyjnej dla cząstki na okręgu.....	25
4.1.2	Parametryzacja przestrzeni fazowej dla cząstki na okręgu.....	26
4.1.3	Algebra operatorów położenia i momentu pędu dla okręgu.....	27
4.1.4	Reprezentacja położeniowa przestrzeni Hilberta dla okręgu.....	27
4.1.5	Reprezentacja pędowa przestrzeni Hilberta dla okręgu.....	27
4.2	Statystyka na okręgu.....	28
4.2.1	Motywacja.....	28
4.2.2	Statystyka na rozmaitości o topologii okręgu.....	29
4.2.3	Funkcja Fréchet'a.....	30
4.2.4	Średnia wewnętrzna na okręgu.....	31
4.2.5	Wariancja.....	32
4.2.6	Odpowiednik rozkładu normalnego.....	34

4.2.7	Zewnętrzne miary położenia i rozrzutu.....	35
4.3	Stany koherentne na okręgu.....	36
4.3.1	Sumowanie okresowe	37
4.3.2	Generowanie stanów koherentnych na okręgu przez sumowanie okresowe.....	38
4.3.3	Przemienność sumowania okresowego i przesuwania stanu	40
4.3.4	Uogólniona okresowość.....	41
4.3.5	Stany koherentne typu jądro cieplne na okręgu.....	43
4.3.6	Równoważność przedstawionych konstrukcji stanów koherentnych na okręgu.....	45
4.3.7	Alternatywne propozycje stanów koherentnych na okręgu	45
4.3.8	Podstawowe właściwości stanów koherentnych na okręgu.....	46
4.3.9	Własności statystyczne stanów koherentnych na okręgu.....	50
4.3.10	Ewolucja swobodna stanów koherentnych na okręgu.....	57
4.4	Funkcja Wignera na okręgu.....	67
4.4.1	Funkcja Wignera na okręgu poprzez transformację Weyla.....	67
4.4.2	Podstawowe właściwości funkcji Wignera na okręgu.....	69
4.4.3	Własności statystyczne funkcji Wignera	74
V	Sfera	77
5.1	Przestrzeń konfiguracyjna, fazowa i przestrzeń Hilberta dla sfery.....	77
5.1.1	Parametryzacja przestrzeni konfiguracyjnej dla cząstki na sferze	77
5.1.2	Parametryzacja przestrzeni fazowej dla cząstki na sferze.....	78
5.1.3	Algebra operatorów położenia i momentu pędu dla sfery.....	79
5.1.4	Baza j, m przestrzeni Hilberta dla sfery	79
5.1.5	Reprezentacja położeniowa przestrzeni Hilberta dla sfery	80
5.2	Statystyka na sferze.....	80
5.3	Stany koherentne na sferze.....	81
5.3.1	Pierwsza konstrukcja stanów koherentnych na sferze.....	81
5.3.2	Stan koherentny na sferze w reprezentacji położeniowej	82
5.3.3	Stany koherentne typu jądro cieplne na sferze.....	82
5.3.4	Porównanie obydwu konstrukcji stanów koherentnych na sferze.....	83
5.3.5	Właściwości stanów koherentnych na sferze	84
5.4	Funkcja Wignera na sferze	94
5.4.1	Konstrukcja funkcji Wignera na sferze	94
5.4.2	Właściwości funkcji Wignera na sferze.....	96
5.4.3	Funkcja Wignera w stanach koherentnych na sferze	97
5.4.4	Funkcja Wignera w stanach j, m	101
5.4.5	Alternatywne podejścia do konstrukcji funkcji Wignera dla sfery	106
VI	Uogólniona konstrukcja funkcji Wignera dla nietrywialnych rozmaitości	107

6.1	Ogólny zarys metody	107
6.2	Szczegółowa droga obliczeń	107
6.3	Realizacja zaproponowanej metody dla okręgu	109
6.3.1	Miary związane z jądrem cieplnym na przestrzeni konfiguracyjnej	109
6.3.2	Miary związane z jądrem cieplnym na przestrzeni fazowej	110
6.3.3	Wyniki na przykładzie stanu koherentnego	110
6.3.4	Wyniki na przykładzie stanu własnego operatora momentu pędu	111
VII	Inne przestrzenie konfiguracyjne	113
7.1	Walec i hiperboloida	113
7.2	Hipersfera	114
VIII	Podsumowanie	115
8.1	Uzyskane wyniki	115
8.2	Komentarze	115
8.2.1	Perspektywiczne kierunki badań	115
IX	Uzupełnienia	117
9.1	Konwencje i oznaczenia	117
9.2	Charakteryzacja okręgu i jego wiązki stycznej	119
9.2.1	Okrąg i jego wiązka styczna jako rozmaitość riemannowska	119
9.2.2	Okrąg i jego wiązka styczna jako grupa Liego	120
9.2.3	Kompleksyfikacja okręgu	121
9.3	Wyprowadzenia wzorów dotyczących stanu koherentnego na sferze	122
9.4	Faktoryzacja operatora gęstości	124
	Literatura	127

I Wstęp

1.1 Wprowadzenie

1.1.1 Rozkład kwaziprawdopodobieństwa Wignera

Centralnym obiektem niniejszej pracy jest rozkład kwaziprawdopodobieństwa Wignera. Jest to funkcja określona na przestrzeni fazowej układu będąca w fizyce kwantowej odpowiednikiem funkcji Liouville'a gęstości prawdopodobieństwa znanej z klasycznej mechaniki statystycznej. W fizyce klasycznej cząstka ma równocześnie dobrze określone położenie i pęd, toteż jej stan jest reprezentowany przez punkt w przestrzeni fazowej. Dla zespołu statystycznego takich cząstek, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danym obszarze przestrzeni fazowej opisane jest łącznym rozkładem prawdopodobieństwa. W mechanice kwantowej zasada nieoznaczoności Heisenberga wyklucza jednoczesne dokładne określenie położenia i pędu cząstki. Nie jest zatem możliwe sformułowanie rozkładu prawdopodobieństwa na przestrzeni fazowej. Funkcja Wignera jest najbliższym analogiem takiego rozkładu. Nie spełnia jednak pierwszego aksjomatu Kolmogorowa, gdyż może przyjmować wartości ujemne. Mimo tego rozkłady brzegowe otrzymane przez całkowanie po jednej ze zmiennych są nieujemne i wyrażają odpowiednie gęstości prawdopodobieństwa. Funkcja Wignera pozwala też obliczać wartości oczekiwane operatorów. Obszary przestrzeni fazowej o ujemnej wartości funkcji Wignera mają rozmiary rzędu stałej Plancka, więc, za sprawą zasady nieoznaczoności, nie są obserwowane jako „ujemne prawdopodobieństwa” zarejestrowana układu w danym stanie. Znikają też w granicy klasycznej. Właściwości standardowej funkcji Wignera omówiono w dalszej części pracy.

Rozkład kwaziprawdopodobieństwa zwany dziś funkcją Wignera został przedstawiony przez Wignera w 1932 r. [1]. Istotny wkład do zagadnienia wniósł już jednak wcześniej Weyl [2]. Oryginalną koncepcję Wignera istotnie rozwinął Moyal [3] w latach czterdziestych XX w.

1.1.2 Mechanika kwantowa sformułowana w przestrzeni fazowej

Funkcja Wignera jest jednym z narzędzi mechaniki kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej. Formalizm ten różni się istotnie od standardowego formalizmu Schrödingera, w którym stan układu opisywany jest funkcją falową w reprezentacji albo położeniowej, albo pędowej (albo jeszcze innej), nigdy jednak jej argumentami nie są punkty przestrzeni fazowej. Tymczasem w mechanice klasycznej to właśnie przestrzeń fazowa jest przestrzenią stanów układu.

W pracach przeglądowych i wykładach mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej na wstępie podnoszone są motywacje dwojakiego rodzaju. Po pierwsze sformułowanie mechaniki kwantowej w przestrzeni fazowej postrzegane jest przez niektórych autorów jako sposób na „uwolnienie” jej od „bagażu” przestrzeni Hilberta. Po drugie, pozwala ono na przedstawienie mechaniki kwantowej w sposób możliwie najbardziej przypominający strukturę matematyczną mechaniki klasycznej.

Pierwszy z tych argumentów można uznać za mający zastosowanie tylko tam, gdzie wykonujemy obliczenia być może dla nowych układów, ale należących do dobrze rozpoznanych teoretycznie klas.

Drugi argument jest jednak poważny. Sformułowanie zagadnień mechaniki kwantowej w sposób zbliżony do struktury matematycznej mechaniki klasycznej pozwala m.in.:

- dostrzec które z właściwości mechaniki kwantowej różniących ją od klasycznej są istotnymi fizycznie właściwościami tej teorii, a które są artefaktami odmiennego formalizmu matematycznego;
- dogodnie badać zachowanie układów kwantowych przy przechodzeniu do granicy klasycznej;
- nie rezygnować z pewnych intuicji ukształtowanych w wyniku obcowania z fizyką klasyczną.

W miarę kompletna teoria mechaniki kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej (przynajmniej w przypadkach przestrzeni euklidesowych) znana jest od czasu prac Gronewolda (1946) [4] i Moyala (1949) [3]. Oczywiście w późniejszych latach była ona rozwijana i udoskonalana. Interesującą notę historyczną na ten temat przedstawiono w artykule [5].

Przez lata funkcja Wignera i inne konstrukcje mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej znajdowały zastosowanie w tak różnych dziedzinach fizyki jak optyka kwantowa, fizyka atomowa i cząsteczkowa, fizyka fazy skondensowanej, kwantowa grawitacja, kwantowa teoria informacji i klasyczna analiza sygnałów. Teorii tej brakuje jednak satysfakcjonującego uogólnienia na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n .

1.1.3 Mechanika kwantowa na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie

Standardowa definicja funkcji Wignera, jak i definicje szeregu innych obiektów i narzędzi mechaniki kwantowej zbudowano przy założeniu, że przestrzeń konfiguracyjna układu jest topologicznie równoważna przestrzeni euklidesowej. W takiej sytuacji także przestrzeń fazowa jest równoważna przestrzeni euklidesowej (dwukrotnie większego wymiaru). Przestrzeń taką będziemy określać topologicznie trywialną. Uogólnienie tych zagadnień na rozmaitości o innej topologii jest dalekie od oczywistego. Dowodem niech będzie fakt, że mimo upływu czasu i mimo wagi tego zagadnienia, wciąż nie istnieje satysfakcjonująca teoria rozkładów kwaziprawdopodobieństwa w przypadku, gdy przestrzeń fazowa układu jest nietrywialna.

Tymczasem tak naturalne i istotne zagadnienie jak badanie rotacyjnych stopni swobody układów kwantowych, np. w fizyce atomowej i cząsteczkowej, wymaga zaangażowania rozmaitości nietrywialnych topologicznie, gdyż kąty orientacji na płaszczyźnie i w przestrzeni należą odpowiednio do okręgu i sfery – rozmaitości nietrywialnych i to różne sposoby.

1.2 Cele pracy i wyniki dodatkowe

Celem pracy było zbadanie możliwości konstruowania funkcji Wignera dla rozmaitości nietrywialnych topologicznie oraz zbadanie właściwości otrzymanych funkcji.

Przedmiotem zainteresowania były w szczególności dwie przestrzenie konfiguracyjne: okrąg i sfera. Są to różnice o oczywistym znaczeniu fizycznym, przede wszystkim jako różnice indeksujące kąty orientacji odpowiednio na płaszczyźnie i w przestrzeni. Są to też różnice o istotnie różniącej się topologii. Główna różnica nie dotyczy jednak ich samych, lecz ich wiązek stycznych, pełniących rolę przestrzeni fazowych. Wiązka styczna do okręgu jest wiązką trywialną, podczas gdy wiązka styczna do sfery – nie, co ma poważne następstwa.

Badanie funkcji Wignera wiąże się z wykorzystaniem narzędzi mechaniki kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej, jak stany koherentne, transformacja Segala-Bargmanna i funkcja Husimiego, dlatego wymienione obiekty również były przedmiotem zainteresowania w tej pracy.

Na realizację celu pracy składają się następujące zagadnienia szczegółowe:

1. Analiza i porównanie znanych konstrukcji stanów koherentnych na okręgu
2. Analiza i porównanie znanych konstrukcji funkcji Wignera w przypadku okręgu
3. Zbadanie właściwości funkcji Wignera w stanach koherentnych na okręgu.
4. Zbadanie pewnych aspektów ewolucji stanów koherentnych na okręgu
5. Analiza i porównanie wybranych konstrukcji stanów koherentnych na sferze
6. Przedstawienie konstrukcji funkcji Wignera w przypadku sfery.
7. Zbadanie podstawowych właściwości funkcji Wignera w stanach koherentnych na sferze.
8. Zaproponowanie ogólnej metody znajdowania funkcji Wignera na nietrywialnych różnicach poprzez transformację Segala-Bargmanna, funkcję Husimiego i odwrotną (uogólnioną) transformację Gaussa-Weierstrassa. Przetestowanie jej w przypadkach trywialnych i na okręgu.

Wyniki dotyczące zagadnień 3 i 6 zostały opublikowane w artykułach [6] i [7]. Istotne wyniki nieopublikowane obejmują propozycję 8 oraz zastosowanie metod statystyki kierunkowej do opisu stanów kwantowych na okręgu i sferze. W szczególności:

- a. Zbadano nieoznaczoności położenia i pędu w stanach koherentnych na okręgu przy zastosowaniu definicji wariancji obowiązującej w statystyce kierunkowej.
- b. Zbadano lokalizację średniej wewnętrznej położenia kąowego w stanach koherentnych na okręgu ewoluujących swobodnie i porównano ją z lokalizacją średniej zewnętrznej. Porównano przebieg przeskoków tych średnich.

1.3 Zakres i organizacja opracowania

W pracy omówiono funkcję Wignera zdefiniowaną na nietrywialnych topologicznie przestrzeniach fazowych. Nietrywialna topologia przestrzeni fazowej może wynikać z dwóch istotnie różnych przyczyn. Po pierwsze już sama przestrzeń konfiguracyjna może być topologicznie nietrywialna. Ponadto przestrzeń fazowa może być, jako wiązka włóknista nad przestrzenią konfiguracyjną, wiązką trywialną lub nietrywialną. Zbadano przypadki przestrzeni fazowych, z których jedna jest wiązką trywialną nad przestrzenią konfiguracyjną nietrywialną topologicznie – okręgiem; a druga jest wiązką nietrywialną nad również nietrywialną topologicznie przestrzenią konfiguracyjną – sferą – gdyż takie właściwości ma wiązka styczna do sfery.

W przypadkach tych omówiono nie tylko funkcję Wignera, ale także stany koherentne. Pełnią one wyróżnioną rolę w mechanice kwantowej jako te stany, których zachowanie najbardziej przypomina zachowanie cząstki klasycznej. W mechanice kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej ta ich cecha ma szczególne znaczenie, gdyż pozwala porównywać zachowanie układów kwantowych zbliżonych do klasycznych z układami klasycznymi we wspólnym formalizmie. Co więcej, stany koherentne pełnią ważną rolę w reprezentacji Bargmanna jako stany bazowe przestrzeni Hilberta parametryzowane punktami przestrzeni fazowej. Wreszcie, z tego samego powodu, odgrywają kluczową rolę w zaproponowanej przez autora uogólnionej metodzie znajdowania funkcji Wignera na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie.

Omówiono szerszy kontekst mechaniki kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej w przypadkach nietrywialnych topologicznie oraz przedstawiono oryginalne wyniki otrzymane przez autora. Podstawowe wyniki dotyczące funkcji Wignera dla okręgu [6] i sfery [7], otrzymane we wspólnej pracy z prof. Krzysztofem Kowalskim zostały już opublikowane. Inne są tu przedstawiane po raz pierwszy i mogą stanowić początek dalszych badań.

W rozdziale II przedstawiono zasadnicze koncepcje mechaniki kwantowej sformułowanej na przestrzeni fazowej w przypadku topologicznie trywialnym, tj. gdy przestrzeń konfiguracyjna ma topologię \mathbb{R}^n .

W rozdziale III ogólnie omówiono drogi prowadzące do rozszerzenia konstrukcji wymienionych w rozdziale II na przypadki, gdy przestrzeń konfiguracyjna różni się topologicznie od \mathbb{R}^n .

Rozdział IV traktuje o mechanice kwantowej sformułowanej w przestrzeni fazowej, w szczególności o stanach koherentnych i funkcji Wignera, w przypadku, gdy przestrzenią konfiguracyjną jest okrąg. Jest on rozmaitością nietrywialną topologicznie. Wiązka styczna do okręgu jest, jako wiązka włóknista, wiązką trywialną w tym sensie, że jest iloczynem rozmaitości podstawowej i (modelowego) włókna. Pozostaje jednak nietrywialna topologicznie, ze względu na nietrywialność rozmaitości podstawowej – okręgu.

Rozdział V traktuje o mechanice kwantowej sformułowanej w przestrzeni fazowej, w szczególności o stanach koherentnych i funkcji Wignera, w przypadku, gdy przestrzenią konfiguracyjną jest sfera S^2 . Jest ona rozmaitością nietrywialną topologicznie, choć istotnie różną od okręgu. Wiązka styczna do sfery jest już, jako wiązka włóknista, wiązką nietrywialną w tym sensie, że nie jest iloczynem rozmaitości podstawowej i (modelowego) włókna. Fakt ten ma poważne następstwa. Oczywiście rozmaitość ta jest nietrywialna topologicznie, zarówno ze względu na nietrywialność rozmaitości podstawowej – sfery, jak i na skręcenie wiązki.

W rozdziale I przedstawiono propozycję uogólnienia konstrukcji funkcji Wignera na przestrzenie symetryczne. Metoda ta obejmuje transformację Segala-Bargmanna funkcji falowej, wyznaczenie funkcji Husimiego i odwrotną (uogólnioną) transformację Gaussa-Weierstrassa. Przetestowano ją dla przestrzeni euklidesowej i dla okręgu.

W rozdziale VII krótko omówiono perspektywę sformułowania mechaniki kwantowej, a w szczególności zdefiniowania stanów koherentnych i funkcji Wignera, na innych nietrywialnych przestrzeniach fazowych.

II Mechanika kwantowa w przestrzeni fazowej topologicznie trywialnej

2.1 Przestrzeń konfiguracyjna i fazowa w przypadku standardowym

Z najprostszą geometrią mamy do czynienia, gdy przestrzenią konfiguracyjną układu jest przestrzeń euklidesowa wymiaru n . Na geometrię składają się właściwości topologiczne i metryczne. W omawianym przypadku mamy do czynienia z przestrzenią wyposażoną w metrykę euklidesową. Jej topologia jest indukowana przez tę metrykę i nazywamy ją topologią euklidesową. Jest ona topologią produktową n kopii prostej rzeczywistej z topologią standardową (której bazą są przedziały otwarte¹).

Przestrzenie zakrzywione, które można otrzymać przez „ciągłą deformację” (obustronnie ciągłą bijekcję, homeomorfizm) przestrzeni euklidesowej są topologicznie równoważne przestrzeni euklidesowej, choć ich właściwości metryczne się różnią. Mają one topologię euklidesową, toteż nazywamy je euklidesowymi w sensie topologicznym, choć już nie w sensie metrycznym.

Jakkolwiek własności metryczne przestrzeni konfiguracyjnej mają określone znaczenie fizyczne, jeśli tylko przestrzeń jest topologicznie euklidesowa, co do zasady istnieje możliwość sprowadzenia jej analizy do analizy przestrzeni metrycznie euklidesowej przez uwzględnienie odpowiednich gęstości miary. Tutaj przedstawiono przestrzeń metrycznie euklidesową jako reprezentanta rodziny przestrzeni euklidesowych w sensie topologicznym.

Przestrzeń konfiguracyjna X jest tu przestrzenią euklidesową wymiaru n i w tym sensie jest „trywialna”². Przestrzeń fazowa zaś jest wiązką kostyczną T^*X nad przestrzenią euklidesową jako jej rozmaitością podstawową. Przestrzeń kostyczna jest izomorficzna z przestrzenią styczną $T^*\mathbb{R}^n \simeq T\mathbb{R}^n$. Przestrzeń styczna do \mathbb{R}^n w punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ sama jest postaci \mathbb{R}^n .

$$T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \quad (2.1.1)$$

Gdy rozmaitością podstawową wiązki jest \mathbb{R}^n , nie występuje żadne jej skręcenie i wiązka globalnie ma strukturę produktową $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Wiazkę włóknistą, która globalnie jest przestrzenią produktową rozmaitości podstawowej i (modelowego) włókna nazywamy wiązką trywialną.

Zatem przestrzeń konfiguracyjna jest tu euklidesowa, a przestrzeń fazowa jest wiązką trywialną.

2.1.1.1 Jednostki

Sprowadźmy zmienne położeniowe i pędowe do jednakowych jednostek tak że $X = \sqrt{m\omega}x$, $P = \sqrt{1/m\omega}p$, gdzie m, ω są parametrami oscylatora harmonicznego. To samo dotyczy operatorów $\hat{X} = \sqrt{m\omega}\hat{x}$ i $\hat{P} = \sqrt{1/m\omega}\hat{p}$. Odpowiednie operatory anihilacji i kreacji zdefiniowane są następująco $\hat{a} = (\hat{X} + i\hat{P})/\sqrt{2}$ a $\hat{a}^\dagger = (\hat{X} - i\hat{P})/\sqrt{2}$. Konsekwentnie, wektor

1 A właściwie bazą topologii jest tu rodzina ograniczonych przedziałów otwartych. Podbazą zaś jest rodzina przedziałów nieograniczonych $\{(a, +\infty): a \in \mathbb{R}\}$ lub $\{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$.

2 Nie należy mylić tego określenia z pojęciem topologii trywialnej, które nie ma tu zastosowania.

parametryzujący stany koherentne jest wektorem zespolonym łączącym zmienne położeniowe i pędowe $\alpha = (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$.

2.2 Standardowe stany koherentne

Standardowy stan koherentny, jest to stan własny operatora anihilacji³

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.2.1)$$

Stany takie znane są także jako stany Glaubera lub stany gaussowskie.

Ich koncepcja wywodzi się z badania kwantowego oscylatora harmonicznego, ale znajduje szerokie zastosowanie w różnorodnych obszarach mechaniki kwantowej i kwantowej teorii pola. Nazwa zaś pochodzi z optyki kwantowej. Istotnie, stany te opisują światło spójne, inaczej koherentne.

Nieformalnie stany koherentne bywają określane najbardziej klasycznymi spośród stanów kwantowych. Wynika to z dwóch faktów. Po pierwsze ewolucja stanu koherentnego kwantowego oscylatora harmonicznego przypomina ewolucję układu klasycznego w tym sensie, że gęstość prawdopodobieństwa utrzymuje niezmienną formę gaussianu skupionego w przestrzeni fazowej wokół parametrów położenia i pędu podlegających ewolucji klasycznej. Po drugie, nierówność $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ (dla prostoty zapisana w jednym wymiarze) jest w stanie koherentnym nasycona, czyli nieoznaczoność położenia i pędu⁴ jest minimalna, a co więcej, jest zbalansowana (w zmiennych \mathbf{x}, \mathbf{p} sprowadzonych do wspólnych jednostek).

$$\sigma_x = \sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} =: \sigma \quad (2.2.2)$$

Warto zauważyć, że nieoznaczoność σ nie zależy od amplitudy drgań, toteż z jednej strony dla dużych wzbudzeń względna nieoznaczoność $\sigma/\sqrt{x^2 + p^2}$ dąży do zera, a z drugiej, w stanie podstawowym (inaczej „próżniowym”), bezwzględna nieoznaczoność σ zachowuje swoją wartość. Można na to patrzeć tak, że w każdym stanie nieoznaczoność jest równa nieoznaczoności próżni i tylko w taki sposób układ ten różni się od układu klasycznego.

Stany koherentne o dowolnym parametrze położenia i pędu $|\bar{x}, \bar{p}\rangle$ mogą być wygenerowane ze stanu podstawowego przez działanie operatora przesunięcia $\hat{D} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ na stan podstawowy

$$|\bar{x}, \bar{p}\rangle = \hat{D}(\bar{x}, \bar{p})|0,0\rangle \quad (2.2.3)$$

Stany koherentne nie są ortogonalne $\langle\alpha|\beta\rangle \neq \delta(\alpha - \beta)$. Tworzą układ nadzupelny przestrzeni Hilberta, więc dowolne stany można arbitralnie dokładnie (względem normy) przedstawić w postaci liniowej kombinacji stanów koherentnych. Rozkład jedności dla takich stanów ma postać $\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{I}$, gdzie $d^2\alpha = d\Re\alpha d\Im\alpha$.

W reprezentacji położeniowej standardowe stany koherentne opisane są funkcją falową

³ Operator \hat{a} nie jest samosprzężony (hermitowski), zatem $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger \neq \langle\alpha|\alpha^*$.

⁴ W optyce odpowiednimi zmiennymi sprzężonymi są rzeczywista i urojona składowa (danego modu) pola elektrycznego. Inne pary zmiennych pojawiają się w przypadku zdefiniowanych dalej stanów koherentnych na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie.

$$f(x) = \langle x | \bar{x}, \bar{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\hbar}} e^{i\frac{\bar{p}x}{\hbar}} e^{-i\frac{\bar{p}\bar{x}}{2\hbar}} \quad (2.2.4)$$

co tłumaczy nazwę „stany gaussowskie”. Czynniki $e^{-i\bar{p}\bar{x}/2\hbar}$ jest globalną stałą fazą i bywa wybierany różnie: od 1 do $e^{-i\bar{p}\bar{x}/\hbar}$.

W bazie stanów własnych hamiltonianu $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)$ (bazie liczby cząstek, bazie Focka) $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n / \sqrt{n!} |n\rangle$, co daje poissonowski rozkład prawdopodobieństwa zaobserwowania n cząstek $p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\bar{n}} \bar{n}^n / n!$ ze średnią $\bar{n} = \langle \hat{N} \rangle = |\alpha|^2$ i taką samą wariancją, a więc z odchyleniem standardowym $\sigma_n = \sqrt{\bar{n}} = |\alpha|$.

Ważną cechą stanów koherentnych jest fakt, że parametryzowane są zmiennymi \bar{x}, \bar{p} należącymi do klasycznej przestrzeni fazowej.

Tak określoną koncepcję stanów koherentnych następnie modyfikowano na różne sposoby. W szczególności dopuszczano rozluźnienie poszczególnych warunków lub starano się zdefiniować je dla układów o nietrywialnej przestrzeni fazowej. Dla odróżnienia, stany koherentne na \mathbb{R}^n omówione w tym podrozdziale nazywa się standardowymi lub kanonicznymi.

2.2.1 Generowanie stanów koherentnych w \mathbb{R}^n ze stanu podstawowego

Stan podstawowy oscylatora harmonicznego wyraża się w reprezentacji położeniowej standardowym wzorem

$$|0,0\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f_{00}(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \quad (2.2.5)$$

przy czym funkcja falowa jest funkcją gaussowską postaci

$$f_{00}(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\hbar}} \quad {}^5 (2.2.6)$$

Operator przesunięcia ma postać

$$\hat{D}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) = e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{x}}}{\hbar} \cdot \hat{\mathbf{P}}} \quad (2.2.7)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ i $\bar{\mathbf{p}}$ są parametrami⁶, $\hat{\mathbf{X}}$ – operatorem położenia, a $\hat{\mathbf{P}}$ – pędu (w przyjętym układzie jednostek). Wówczas stan koherentny wyraża się w bazie położeniowej następująco

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}\rangle &= \hat{D}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}) |0,0\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f_{00}(\mathbf{x}) e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{x}}}{\hbar} \cdot \hat{\mathbf{P}}} |\mathbf{x}\rangle = \\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}} \int d\mathbf{x} f_{00}(\mathbf{x}) e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{X}}} e^{i\frac{\bar{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{P}}}{\hbar}} |\mathbf{x}\rangle = \\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}} \int d\mathbf{x} f_{00}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle = e^{-\frac{i}{2\hbar} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}} \int d\mathbf{x} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^2}{2\hbar}} e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Funkcja falowa ma wówczas postać

$$f_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{p}}}(\mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{2\hbar} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}} e^{i\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^2}{2\hbar}} \quad (2.2.9)$$

gdzie $e^{-\frac{i}{2\hbar} \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}}}$ jest stałym globalnym stałym czynnikiem fazowym.

⁵ Dla prostoty funkcję tę zapisano bez normalizacji.

⁶ Oznaczenie sugeruje, że są to wartości średnie odpowiednich operatorów. Tak jest w istocie, ale na tym etapie wywodu wystarczy rozumieć je jako parametry należące do przestrzeni fazowej indeksujące stany koherentne.

2.3 Funkcja kwaziprawdopodobieństwa Wignera

W tym podrozdziale przedstawiamy definicję i podstawowe właściwości funkcji Wignera w przypadku, gdy przestrzenią konfiguracyjną układu jest \mathbb{R}^n , a fazową \mathbb{R}^{2n} . Wyczerpujące omówienie funkcji Wignera w tym standardowym kontekście zawiera na przykład artykuł [8].

Funkcja Wignera określona jest na przestrzeni fazowej układu. Wartości funkcji wyrażają tzw. kwaziprawdopodobieństwo znajdowania się układu w stanie określonym przez dane współrzędne położenia i pędu. Jest zatem analogiem gęstości prawdopodobieństwa Liouville'a znanej z mechaniki klasycznej. Nie spełnia jednak pierwszego aksjomatu prawdopodobieństwa Kolmogorowa, gdyż może przyjmować wartości ujemne (ale zawsze rzeczywiste).

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R} \quad (2.3.1)$$

Mimo tego rozkłady brzegowe otrzymane przez całkowanie po pozostałych zmiennych są nieujemne i wyrażają odpowiednie gęstości prawdopodobieństwa:

$$\int d\mathbf{p} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |f(\mathbf{x})|^2 \quad (2.3.2)$$

$$\int d\mathbf{x} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |\tilde{f}(\mathbf{p})|^2 \quad (2.3.3)$$

gdzie $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x})$ jest znormalizowaną funkcją falową danego stanu w reprezentacji położeniowej, a $\tilde{f}(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}$ jej transformatą Fouriera, czyli (również znormalizowaną) funkcją falową w reprezentacji pędowej. Gdy nie zaznaczono inaczej, całkowane odbywa się po całej dziedzinie⁷.

Funkcja Wignera spełnia warunek normalizacji

$$\iint d\mathbf{x} d\mathbf{p} W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \text{Tr } \hat{\rho} = 1 \quad (2.3.4)$$

Wartości oczekiwane operatorów obliczane są przez całkowanie ich transformaty Wignera po przestrzeni fazowej z funkcją Wignera jako gęstością wg wzoru

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle f | \hat{A} | f \rangle = \text{Tr } \hat{\rho} \hat{A} = \iint d\mathbf{x} d\mathbf{p} W_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) a(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (2.3.5)$$

gdzie transformata Wignera $a(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ operatora \hat{A} zdefiniowana jest następująco:

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \int d\mathbf{x}' \left\langle \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2} \left| \hat{A} \right| \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'}{2} \right\rangle e^{\frac{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'}{\hbar}} \quad (2.3.6)$$

Inną cechą funkcji Wignera, odróżniającą ją od klasycznej gęstości prawdopodobieństwa, jest jej ograniczoność, mianowicie

$$|W(x, p)| \leq \frac{2}{\hbar} \quad (2.3.7)$$

Standardowa **definicja** funkcji Wignera ma postać:

$$W(x, p) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int dx' f\left(x + \frac{x'}{2}\right)^* f\left(x - \frac{x'}{2}\right) e^{\frac{ipx'}{\hbar}} \quad (2.3.8)$$

i symetrycznie

⁷ $\int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n f(x_1, \dots, x_n)$

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int d\mathbf{p}' \tilde{f}\left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{p}'}{2}\right)^* \tilde{f}\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}'}{2}\right) e^{-\frac{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}'}{\hbar}} \quad (2.3.9)$$

Stopień przekrywania się stanów można obliczyć z użyciem ich funkcji Wignera.

$$|\langle f|g\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^n \iint d\mathbf{x} d\mathbf{p} W_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) W_g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (2.3.10)$$

Obszary przestrzeni fazowej o ujemnej wartości funkcji Wignera mają rozmiary rzędu \hbar , więc, za sprawą zasady nieoznaczoności Heisenberga, nie są obserwowane jako „ujemne prawdopodobieństwa” zarejestrowana układu w danym stanie. Znikają też w granicy klasycznej. Nie są one jednak jakąś patologiczną cechą formalizmu, a wskazują na rzeczywiste kwantowe zachowanie układu.

2.4 Transformacje Weyla i Wignera

Funkcja Wignera jest ściśle związana z odpowiedniością Weyla pomiędzy funkcjami na przestrzeni fazowej a operatorami w obrazie Schrödingera. Niech funkcja $f(x, p)$ określona będzie na przestrzeni fazowej. Rozumiemy przez to także ewentualność określenia jej na samej przestrzeni położeniowej albo pędowej – jako funkcji stałej pozostałego argumentu. Z każdą taką funkcją związany jest operator \hat{F} zwany jej operatorem Weyla. Wówczas funkcja $f(x, p)$ nazywana jest symbolem tegoż operatora. Wzajemne transformacje funkcji $f(x, p)$ i operatora \hat{F} nazywamy transformacjami Weyla i Wignera.

W transformacji Weyla \mathcal{W} funkcję $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in L^2(T^*X)$ poddaje się transformacji Fouriera po obydwu argumentach

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\tilde{\mathbf{x}} - i\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{p}}} \quad (2.4.1)$$

a następnie, formalnie, transformacji odwrotnej ze zmiennymi \mathbf{x}, \mathbf{p} zastąpionymi odpowiednimi operatorami.

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\mathbf{p}} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}) e^{i\tilde{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{X}} + i\tilde{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{P}}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} d\tilde{\mathbf{p}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) e^{i\tilde{\mathbf{x}}\cdot(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x}) + i\tilde{\mathbf{p}}\cdot(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{p})} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Transformacje te można podsumować grafem przemiennym:

$$\begin{array}{ccc}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) & \xrightarrow{\mathcal{W}} & \hat{F} \\
 \mathcal{F} \downarrow & & \uparrow \\
 & & \begin{array}{l} \mathbf{x}' \rightarrow \hat{\mathbf{X}} \\ \mathbf{p}' \rightarrow \hat{\mathbf{P}} \end{array} \\
 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{p}}) & \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} & f'(\mathbf{x}', \mathbf{p}')
 \end{array} \tag{2.4.3}$$

Więcej wiadomości o operatorach Weyla znajdziemy na przykład w pracy [9]. Przekształcenie odwrotne, operatora w funkcję na przestrzeni fazowej nazywamy transformacją Wignera \mathcal{W}^{-1} .

Część wyrażenia (2.4.2) niezależną od $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ oznaczamy $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Wówczas

$$\hat{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \tag{2.4.4}$$

gdzie

$$\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x}' \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{p}' e^{i\mathbf{p}' \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x}) + i\mathbf{x}' \cdot (\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{p})} \tag{2.4.5}$$

jest operatorem zależnym od zmiennych \mathbf{x}, \mathbf{p} , inaczej funkcją o wartościach operatorowych. Ma on sens operatora gęstości prawdopodobieństwa.

Funkcję Wignera stanu $|f\rangle$ otrzymuje się obliczając wartość oczekiwaną operatora gęstości $\hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ w stanie $|f\rangle$

$$W_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \langle f | \hat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) | f \rangle \tag{2.4.6}$$

Funkcja ta jest identyczna z funkcją Wignera zdefiniowaną wzorem (2.3.8). Rachunków koniecznych do pokazania tego faktu nie zamieszczono w przypadku \mathbb{R}^n , natomiast analogiczne rachunku w przypadku nietrywialnym przedstawiono szczegółowo w podrozdziale 4.4.1.

Transformacje te można podsumować grafem:

Przedstawienie funkcji Wignera i operatora gęstości \hat{W} w języku transformacji Fouriera jest kluczowe dla uogólnienia jej konstrukcji na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n .

2.5 Transformacja Segala-Bargmanna, funkcja falowa na przestrzeni fazowej

Transformacja Segala-Bargmanna jest to transformacja całkowa funkcji falowej na przestrzeni położeniowej $f(x)$ przekształcająca ją w funkcję na przestrzeni fazowej. Zwyczajowo transformację tę definiuje się następująco. Wprowadźmy zespoloną parametryzację przestrzeni fazowej $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{C}^n$. Niech $z = (x + ip)/\sqrt{2}$. Wówczas przekształcenie

$\mathcal{A}: L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_{\mathbb{C}})$, gdzie $\mu_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}) = (\pi\hbar)^{-n} e^{-|\mathbf{z}|^2/\hbar}$ ⁸ takie, że

$$F_A(\mathbf{z}) = [\mathcal{A}f](\mathbf{z}) := \frac{1}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-\frac{\mathbf{z}^2 - 2\sqrt{2}\mathbf{z}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{x}^2}{2\hbar}} \quad (2.5.1)$$

nazywamy transformacją Segala-Bargmanna funkcji falowej w reprezentacji położeniowej $f(\mathbf{x})$.

Okazuje się, że $\mu_{\mathbb{C}}(\mathbf{z})$ jest jądrem ciepłym $\rho_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}, \tau)$ na \mathbb{C}^n z $\tau \rightarrow \hbar$. Transformacja ta jest (z dokładnością do stałego czynnika normalizującego) szczególnym przypadkiem kanonicznej transformacji liniowej z parametrami

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

zgodnie z [10], gdy zmienną sprzężoną do położenia \mathbf{x} jest $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Jest to ułamkowa transformacja Laplace'a opisana macierzą

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ -i \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

dla kąta $\alpha = \pi/4$ (transformacja połówkowa). Jej kwadrat (w sensie funkcjonalnym), pełna transformacja Laplace'a jest równoważny (z dokładnością do czynnika i) transformacji Fouriera, która przeprowadza funkcję falową w reprezentacji położeniowej w funkcję falową w reprezentacji pędowej. Zatem transformacja Segala-Bargmanna wykonuje połowę tego obrotu w płaszczyźnie zespolonej $x + ip$ (w każdym wymiarze), który zmienia reprezentację położeniową w pędową. W typowych zastosowaniach transformacja Segala-Bargmanna działa na funkcję $f(\mathbf{x})$ w reprezentacji położeniowej; może jednak działać na otrzymaną wcześniej transformatę Segala-Bargmanna wykonując kolejny obrót o $\pi/4$ i zwracając funkcję falową w reprezentacji pędowej. Jeśli obliczymy funkcję Wignera W_F podstawiając $F_A(\mathbf{z})$ w miejsce $f(\mathbf{x})$, $W_F(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = W_F((\mathbf{x} + i\mathbf{p})/\sqrt{2}, (\mathbf{p} - i\mathbf{x})/\sqrt{2}) = W_f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Hall ([11] tw. 6.4) proponuje inną formę transformacji Segala-Bargmanna dogodniejszą do uogólnień na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n .

Teraz $\mathcal{C}: L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^n, \nu)$, gdzie $\nu(\mathbf{z}) = (\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} e^{-(\Im\mathbf{z})^2/\hbar} = (\pi\hbar)^{-\frac{n}{2}} e^{-\mathbf{p}^2/2\hbar}$

$$\begin{aligned} F_C(\mathbf{z}) &= [\mathcal{C}f](\mathbf{z}) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-\frac{(\mathbf{z}-\mathbf{x})^2}{2\hbar}} = \\ &= \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \rho_{AC}(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

gdzie $\rho_{AC}(\mathbf{z}) = (2\pi\hbar)^{-n/2} e^{-\mathbf{z}^2/2\hbar}$ jest przedłużeniem analitycznym jądra ciepłego $\rho(\mathbf{x}, \tau) = (2\pi\tau)^{-n/2} e^{-\mathbf{x}^2/2\tau}$ na \mathbb{R}^n z $\tau \rightarrow \hbar$ do dziedziny zespolonej⁹. Zatem transformacja \mathcal{C} ta jest konwolucją funkcji, na którą działa, z $\rho_{AC}(\mathbf{z})$. Okazuje się, że miara $\nu(\mathbf{z}) = \int d\mathfrak{R}\mathbf{z} \mu(\mathbf{z}) = 2^{-n/2} \int d\mathbf{x} \mu(\mathbf{z})$ jest całką jądra ciepłego $\mu(\mathbf{z})$ na \mathbb{C}^n po $\mathfrak{R}\mathbf{z} = 2^{-n/2} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Miara $\nu(\mathbf{z})$ zależy tylko od zmiennych pędowych. Te interpretacje mają kluczowe znaczenie dla uogólnienia przedstawionej konstrukcji na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n .

⁸ $\mathcal{H}L^2(X, \mu)$ jest przestrzenią całkowalnych z kwadratem względem miary μ funkcji holomorficznnych $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ([11], def. 2.1)

⁹ Uwaga: przedłużenie analityczne $\rho_{AC}(\mathbf{z})$ jądra ciepłego $\rho(\mathbf{x})$ na \mathbb{R}^n do $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ nie jest tym samym co jądro ciepłe $\mu(\mathbf{z})$ na \mathbb{C}^n .

Z punktu widzenia kanonicznych transformacji liniowych, transformacja \mathcal{C} jest kanoniczną transformacją liniową o parametrach

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A zatem jest to ścinanie na płaszczyźnie x, p (w każdym z wymiarów). Jeśli obliczymy funkcję Wignera W_F podstawiając $F_C(\mathbf{z})$ w miejsce $f(\mathbf{x})$, $W_F(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = W_F(\mathbf{x} + i\mathbf{p}, \mathbf{p}) = W_f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Transformacja \mathcal{C} różni się od \mathcal{A} jedynie wyborem gęstości. Zachodzi

$$F_C(\mathbf{z}) = \sqrt{\frac{\rho_{AC}(\mathbf{z})}{2}} F_A\left(\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{\mathbf{z}^2}{4\hbar}}}{(4\pi\hbar)^{\frac{n}{4}}} F_A\left(\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.5.3)$$

W dalszej części pracy przez transformatę Segala-Bargmanna rozumie się transformatę $F_C(\mathbf{z}) = [\mathcal{C}f](\mathbf{z})$ oznaczaną $F(\mathbf{z})$ lub $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = F(\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$.

W tym miejscu warto zestawić miary zaangażowane w konstrukcję transformacji Segala-Bargmanna

- $\rho(\mathbf{x})$ – jądro cieplne na \mathbb{R}^n z $\tau \rightarrow \hbar$
- $\rho_{AC}(\mathbf{z})$ – przedłużenie analityczne $\rho(\mathbf{x})$ do $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$
- $\mu_{\mathbb{C}}(\mathbf{z})$ – jądro cieplne na \mathbb{C}^n z $\tau \rightarrow \hbar$
- $\nu(\mathbf{z})$ – całka z $\mu(\mathbf{z})$ po $\Re\mathbf{z}$

Transformata Segala-Bargmanna $F(\mathbf{z})$ pełni rolę analogiczną do funkcji falowej, tyle że określona jest na przestrzeni fazowej. W szczególności, całki z niej wzdłuż składowych urojonych lub rzeczywistych argumentu \mathbf{z} dają odpowiednio funkcję falową w przestrzeni położeniowej lub pędowej

$$f(x) = \frac{1}{\hbar^{\frac{n}{2}}} \int d\Im\mathbf{z} F(\mathbf{z}) \nu(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \int dp F(x, p) e^{-\frac{p^2}{2\hbar}} \quad (2.5.4)$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\hbar^{\frac{n}{2}}} \nu(\mathbf{z}) \int d\Re\mathbf{z} F(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{p^2}{2\hbar}} \int dx F(x, p) \quad (2.5.5)$$

2.6 Funkcja Husimiego

Transformacja Weierstrassa funkcji Wignera, czyli jej konwolucja z gaussianem o szerokości $\sigma = \sqrt{\hbar}$ dana wzorem

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \iint d\mathbf{x}' d\mathbf{p}' W(\mathbf{x}', \mathbf{p}') e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2 + (\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}{2\hbar}} \quad (2.6.1)$$

zwraca inną funkcję kwaziprawdopodobieństwa Q znaną jako funkcja Husimiego. Równoważnie, z użyciem parametryzacji zespolonej $\mathbf{z} = (\mathbf{x} + i\mathbf{p})/\sqrt{2}$ transformacja ta wyraża się następująco

$$Q(\mathbf{z}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{C}^n} d\mathbf{z}' W(\mathbf{z}') e^{-\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|^2}{\hbar}} \quad (2.6.2)$$

przy czym wprowadzana w miejsce $W(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ jednakowo oznaczona funkcja argumentu zespolonego rozumiana jest następująco $W(\mathbf{z}) = W(\sqrt{2}\Re\mathbf{z}, \sqrt{2}\Im\mathbf{z})$. Transformacja Weierstrassa jest niczym innym jak wygładzeniem danej funkcji filtrem gaussowskim z jądrem o szerokości $\sigma = \sqrt{\hbar}$.

Funkcja Husimiego, podobnie jak funkcja Wignera, jest ograniczona $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq 1/\pi$, ale w przeciwieństwie do funkcji Wignera jest nieujemna $0 \leq Q(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, co (nieco zwoodniczo) upodabnia ją do klasycznej gęstości prawdopodobieństwa. Jest również unormowana $\iint d\mathbf{x} d\mathbf{p} Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1$. Jednak jej wartości określają nie tyle gęstość prawdopodobieństwa znajdowania się układu w stanie o danych współrzędnych położenia i pędu (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , co gęstość prawdopodobieństwa znajdowania się w stanie koherentnym $|\mathbf{x}, \mathbf{p}\rangle$ parametryzowanym takimi współrzędnymi, zgodnie ze wzorem

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} | f \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} | \hat{\rho} | \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle \quad (2.6.3)$$

Jako że stany koherentne nie są wzajemnie ortogonalne, poszczególne punkty przestrzeni argumentów nie odpowiadają zdarzeniom rozłącznym, a zatem funkcja Husimiego nie spełnia trzeciego aksjomatu Kolmogorowa. Scalkowana po zmiennych położeniowych lub pędowych nie zwraca poprawnych gęstości prawdopodobieństwa, jak ma to miejsce w przypadku funkcji Wignera.

Inną drogą otrzymania funkcji Husimiego jest obliczenie kwadratu modułu odpowiedniej transformaty Segala-Bargmanna, która pełni rolę funkcji falowej na przestrzeni fazowej. Wskazana jest tu szczególna uwaga, gdyż zależnie od typu transformacji Segala-Bargmanna, kwadrat modułu transformaty należy przemnożyć przez inną gęstość¹⁰. W używanym tu wariacie transformacji mamy

$$Q(\mathbf{z}) = |F(\sqrt{2}\mathbf{z}^*)|^2 \nu(\mathbf{z}) = |F(\sqrt{2}\mathbf{z}^*)|^2 \frac{e^{-\frac{(\Im \mathbf{z})^2}{\hbar}}}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.6.4)$$

a wracając do parametryzacji rzeczywistej

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |F(\mathbf{x} - i\mathbf{p})|^2 \nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |F(\mathbf{x} - i\mathbf{p})|^2 \frac{e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2\hbar}}}{(\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.6.5)$$

¹⁰ Z użyciem transformacji typu \mathcal{A} : $Q(\mathbf{z}) = |F_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}^*)|^2 \mu(\mathbf{z}) = |F_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}^*)|^2 (2\pi\hbar)^{-n} e^{-|\mathbf{z}|^2/2\hbar}$ inaczej $Q(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |F_{\mathcal{A}}\left(\frac{\mathbf{x}-i\mathbf{p}}{\sqrt{2}}\right)|^2 \mu(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |F_{\mathcal{A}}((\mathbf{x} - i\mathbf{p})/\sqrt{2})|^2 (2\pi\hbar)^{-n} e^{-(\mathbf{x}^2 + \mathbf{p}^2)/4\hbar}$.

III Uogólnienia przedstawionych narzędzi na przypadki topologicznie nietrywialne

3.1 Uogólnienia stanów koherentnych

Znanych jest wiele sposobów uogólnienia konstrukcji stanów koherentnych na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n . Szerokie ich omówienie zawiera praca [12], jednak powstała ona w 1995 r., toteż nie obejmuje nowszych wyników w tej dziedzinie, w tym stanów koherentnych typu jądro ciepłe Halla i Stenzela.

3.1.1.1 Podejście Gilmore'a i Perelemowa

Zagadnienie stanów koherentnych jest w istocie zagadnieniem teorii grup Liego. Standardową, jakkolwiek nie zawsze prostą, ani nawet nie w każdym przypadku wykonalną, metoda konstruowania stanów koherentnych jest procedura Gilmore'a i Perelemowa [13] [14]. Otrzymane tą drogą stany koherentne odróżniają się nazwą stany koherentne typu Gilmore'a-Perelemowa (*Gilmore-Perelemov coherent states, GPCS, Perelemov-type CS*).

3.1.1.2 Podejście Baruta i Girardello

W podejściu tym [15] za definiującą właściwość stanów koherentnych przyjmuje się to, że są stanami własnymi (odpowiednio uogólnionego) operatora anihilacji \hat{a} . Oczywiście operator ten jest operatorem obniżającym (*lowering operator*) stanów Focka $|n\rangle$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{\varepsilon_n}|n-1\rangle$$

Wybór definicji \hat{a} , a mianowicie postaci jego wartości własnych $\sqrt{\varepsilon_n}$ determinuje różne algebry operatorów $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, I$. W ogólności własności standardowych stanów koherentnych takie jak minimalizowanie nieoznaczoności czy własności grupowe eksploatowane przez Gilmore'a i Perelemowa nie muszą być odtworzone. W wielu przypadkach jednak zachodzą pewne ich uogólnienia.

Podejście to było z powodzeniem zastosowane do skonstruowania stanów koherentnych na okręgu przez Kowalskiego, Rembielińskiego i Papaloucasa [16].

3.1.1.3 Podejście Halla i Stenzela, stany koherentne typu jądro ciepłe

Innym, również osadzonym w teorii grup Liego podejściem jest metoda Halla i Stenzela wiodąca przez kompleksyfikację rozmaitości pełniącą rolę przestrzeni konfiguracyjnej. Stany koherentne wyrażają się przez jądro ciepłe (*heat kernel*), która to funkcja pełni w odpowiednich przestrzeniach rolę analogiczną do funkcji Gaussa znanej z przypadku standardowych stanów koherentnych. Otrzymane tą drogą stany odróżniają się nazwą stany koherentne typu jądro ciepłe (*heat kernel coherent states*). Metoda ta znajduje zastosowanie do grup zwartych oraz zwartych przestrzeni symetrycznych. W szczególności, znane są stany koherentne typu jądro ciepłe dla sfer S^n dowolnego wymiaru.

Podejście to w zastosowaniu do okręgu omówiono w podrozdziale 4.3.5, a w zastosowaniu do sfery – 5.3.3.

3.1.1.4 Sumowanie okresowe

Wreszcie, w przypadku okręgu S^1 , możliwe jest otrzymanie stanów koherentnych poprzez sumowanie okresowe (*periodic summation*) standardowych stanów koherentnych na prostej. Podejście to omówiono szczegółowo w podrozdziale 4.3.1.

3.2 Uogólnienia funkcji Wignera

Podobnie jak w przypadku stanów koherentnych, również funkcję Wignera można uogólniać na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n na więcej niż jeden sposobów.

Jedną z dróg poszukiwania uogólnienia funkcji Wignera na rozmaitości inne niż \mathbb{R}^n jest zwykła analogia wzoru wyrażającego samą funkcję Wignera lub operator gęstości \widehat{W} (*vide* wz. (2.4.5)).

Inne metody konstruowania funkcji Wignera polegają na wykorzystaniu

- transformacji Weyla albo
- transformacji Segala-Bargmanna, funkcji Husimiego i odwrotnej transformacji Gaussa-Weierstrassa.

Omówiono je szczegółowo w podrozdziale 4.4.1 i rozdziale I.

IV Okrąg

Topologicznie nieeuklidesowa przestrzeń konfiguracyjna,
z trywialną wiązką styczną jako przestrzenią fazową

Gdy przestrzenią konfiguracyjną układu jest okrąg, przestrzenią fazową jest wiązka styczną do okręgu. Okrąg jest pierwszym omówionym tu przypadkiem topologicznie nietrywialnym. Trzeba jednak wyraźnie stwierdzić co w nim jest nietrywialne oraz w jakim sensie.

Oczywiście przestrzeń konfiguracyjna – okrąg różni się topologicznie od prostej, m.in. jest przestrzenią zwartą i nieskończeniowielospójną (*non-simply connected*) i w tym sensie jest przypadkiem nietrywialnym¹¹.

Przestrzeń fazowa, czyli wiązka styczną do przestrzeni konfiguracyjnej jest w tym przypadku wiązką trywialną. Ma globalną strukturę produktową $S^1 \times \mathbb{R}$ i globalne niezerowe przekroje. Topologicznie jest to walec. Jak dalej pokazano, jest ona izomorficzna z odpowiednio zdefiniowaną kompleksyfikacją okręgu.

Mamy zatem do czynienia z topologicznie nieeuklidesową przestrzenią konfiguracyjną i przestrzenią fazową trywialną jako wiązką włóknista (choć topologicznie nietrywialną, ze względu na właściwości jej przestrzeni podstawowej).

4.1 Przestrzeń konfiguracyjna, fazowa i przestrzeń Hilberta dla okręgu

4.1.1 Parametryzacja przestrzeni konfiguracyjnej dla cząstki na okręgu

Wektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}^2 = r^2$ skonstruowano z wykorzystaniem macierzy obrotu na płaszczyźnie

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

parametryzowanej przez kąt zadający położenie na okręgu. Dla przejrzystości przyjmijmy $r = 1$.

Punkt początkowy układu współrzędnych na okręgu wyznaczony jest przez wektor w \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wówczas punkty okręgu generowane są przez obroty na płaszczyźnie, tak że

$$\mathbf{x} = R(\phi)\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}$$

Analogicznie opiszmy wyróżniony punkt

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

przeznaczony do parametryzacji stanów koherentnych.

¹¹ Mówiąc, że prosta czy \mathbb{R}^n są pod tym względem trywialne mamy na myśli, że są topologicznie euklidesowe, nie zaś że wyposażone są w topologię trywialną.

4.1.1.1 Metryka na okręgu

Metryką Riemanna na okręgu, czyli odległością geodezyjną jest długość (krótszego) łuku pomiędzy punktami

$$d(\phi, \phi') = |[\phi - \phi']_{(-\pi, +\pi]}| = |\text{Arg } e^{i(\phi - \phi')}| \quad (4.1.1)$$

gdzie uogólniony symbol kongruencji (z przesunięciem) sprowadza kąty do wybranego przedziału $[\phi]_{[a,b)} := [\phi]_{b-a} + a$; zaś Arg oznacza argument główny liczby zespolonej wybrany tak aby należał do przedziału $(-\pi, +\pi]$ ¹².

Uwaga 1

Ponieważ każdy przedział o długości 2π może parametryzować kąty, dla każdego kąta ϕ' można tak wybrać przedział liczb parametryzujących kąt ϕ , że odległość $d(\phi, \phi')$ wyraża się różnicą współrzędnych ϕ i ϕ' . Gdy $\phi \in [\phi' - \pi, \phi' + \pi]$, $d(\phi, \phi') = \phi - \phi'$. Zabieg ten znajduje zastosowanie przy wyborze granic całkowania we wprowadzonych dalej wzorach.

4.1.1.2 Miara na okręgu

Miarę na okręgu wybrano standardowo: $d\mu(\mathbf{x}) = d\phi$. Wówczas zachodzi

$$\int_{S^1} d\mu(\mathbf{x}) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi = 2\pi$$

4.1.2 Parametryzacja przestrzeni fazowej dla cząstki na okręgu

Wektory momentu pędu są styczne do okręgu, tak że

$$\mathbf{j} = jR(\phi)R\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_1 = j \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}$$

Analogicznie opiszmy wyróżniony wektor momentu pędu

$$\mathbf{l} = l \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

przeznaczony do parametryzacji stanów koherentnych.

Tak skonstruowana wiązka styczna jest izomorficzna z walcem.

Współrzędne zespolone łączą położenie na okręgu i moment pędu

$$\chi(\phi, l) = \phi + il \quad (4.1.2)$$

Warto porównać tu parametryzację zespoloną zaproponowaną przez Halla dla sfer dowolnego wymiaru ([17], rozdz. 3, w szczeg. wz. 18 i następujące po nim uwagi).

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{j}) = \cosh j \frac{\mathbf{x}}{r} + ir \sinh j R\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \cos(\phi + ij) \\ \sin(\phi + ij) \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Wzory (4.1.2) i (4.1.3) różnią się tym, że w pierwszym parametryzacja zespolona dotyczy w istocie algebry Liego, a w drugim – grupy. W przypadku sfery S^2 istnieje odpowiednik wzoru (4.1.3), ale już nie (4.1.2) (por. podrozdz. 5.1.2).

¹² Funkcję Arg wybrano tak, żeby miała cięcie (branch cut) wzdłuż ujemnej półosi rzeczywistej: $(-\infty, 0]$.

4.1.2.1 Dziedzina momentu pędu

W niniejszej pracy moment pędu na okręgu rozumiany jest jako zmienna dyskretna $j \in \mathbb{Z}$ w duchu dualności Pontriagina, w której zmienną fourierowsko sprzężoną do zmiennej na okręgu, jest zmienna dyskretna i *vice versa*. Zagadnienie to rozwinęto w podrozdziale 4.4.1.1.

Niemniej jednak stanowisko odmienne, w którym $j \in \mathbb{R}$, również jest przedmiotem jak najbardziej sensownych badań i prowadzi do wartościowych wyników. Kastrup [18] przedstawia funkcję Wignera określoną na ciągłej przestrzeni fazowej, skonstruowanej z użyciem funkcji interpolujących *sinus cardinalis*.

4.1.3 Algebra operatorów położenia i momentu pędu dla okręgu

Punktem wyjścia do konstrukcji przestrzeni Hilberta dla okręgu jest algebra $e(2)$ operatorów położenia i momentu pędu

$$\widehat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \widehat{X}_1 \\ \widehat{X}_2 \end{bmatrix} \quad \widehat{J}$$

której operator Casimira spełnia warunek $\widehat{\mathbf{X}}^2 = r^2$ wyrażający ograniczenie możliwych położzeń do sfery o promieniu r . Algebrę tę charakteryzują następujące relacje komutacyjne:

$$[\widehat{J}, \widehat{X}_1] = i\widehat{X}_2 \quad [\widehat{J}, \widehat{X}_2] = -i\widehat{X}_1 \quad [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = 0 \quad (4.1.4)$$

4.1.4 Reprezentacja położeniowa przestrzeni Hilberta dla okręgu

Wektory własne $|\mathbf{x}\rangle$ operatora $\widehat{\mathbf{X}}$, $\widehat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$ rozpinają reprezentację algebry $e(2)$. Baza położeniowa jest ortogonalna $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ i zupełna, z rozkładem jedności $\int_{S^1} d\mu(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}| = \widehat{I}$, gdzie μ jest miarą Haara na okręgu, a \widehat{I} – operatorem identycznościowym.

W parametryzacji opisanej w podrozdziale 4.1.1 (w biegunowym układzie współrzędnych) $|\mathbf{x}\rangle \equiv |\phi\rangle$. Wówczas $d\mu(\mathbf{x}) = d\phi$. Warunek ortogonalności przybiera postać

$$\langle \phi|\phi'\rangle = \delta(\phi - \phi') \quad (4.1.5)$$

gdzie dystrybucje δ dla kątów są poprawnie określone na dziedzinie $\phi, \phi' \in [-\pi, +\pi)$.¹³ Natomiast rozkład jedności wyraża się wzorem

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi |\phi\rangle\langle \phi| = \widehat{I} \quad (4.1.6)$$

Wektory bazy położeniowej $|\phi\rangle$ nie są normalizowalne, podobnie jak wektory bazy położeniowej w \mathbb{R}^n . Warunek normalizacji zastępujemy jego wersją dystrybucyjną (4.1.5).

4.1.5 Reprezentacja pędowa przestrzeni Hilberta dla okręgu

Wektory własne $|j\rangle$ operatora \widehat{J} , $\widehat{J}|j\rangle = j|j\rangle$ rozpinają reprezentację algebry $e(2)$. Baza pędowa jest ortogonalna

$$\langle j|j'\rangle = \delta_{jj'} \quad (4.1.7)$$

¹³ Ewentualnie dla $\phi \in \mathbb{R}$, deltę Diraca należy zastąpić „funkcją” sza (vide uzup. 9.1).

i zupełna, z rozkładem jedności

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j\rangle\langle j| = \hat{I} \quad (4.1.8)$$

gdzie \hat{I} jest operatorem identycznościowym.

Zagadnienia bazy położeniowej i pędowej przestrzeni Hilberta dla cząstki na okręgu omówiono np. w [19].

4.2 Statystyka na okręgu

4.2.1 Motywacja

Jednym z podstawowych pojęć mechaniki kwantowej, związanym z jej probabilistycznym aspektem, jest wartość oczekiwana obserwabli. Wartość oczekiwana obserwabli \hat{A} w stanie $|f\rangle$ dana jest wzorem

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle f | \hat{A} | f \rangle = \int_X d\lambda(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^* \hat{A} f(\mathbf{x}) \quad (4.2.1)$$

gdzie X jest przestrzenią konfiguracyjną, $\lambda(x)$ miarą Haara na X , a $f(\mathbf{x}) \in L^2(X, d\lambda(\mathbf{x}))$ funkcją falową określoną na X względem miary $\lambda(\mathbf{x})$.

Gdy $\hat{A}f(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ (jak to ma miejsce np. dla operatora położenia), biorąc pod uwagę probabilistyczny sens funkcji falowej $\rho(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|^2$, rozumiemy, że wartość oczekiwana funkcji $a(\mathbf{x}) \in A \subset \mathbb{R}^n$ ¹⁴ określonej na przestrzeni X wyrażona jest definicją standardową.

$$\langle a \rangle = \int_X d\lambda(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x})|^2 \quad (4.2.2)$$

X jest wówczas przestrzenią zdarzeń elementarnych, a $a(\mathbf{x}) \in A$ zmienną losową.

Przeciwdziedzina $a: X \rightarrow A$ ma tu kluczowe znaczenie. Dopóki A jest wypukłym podzbiorem \mathbb{R}^n , wartość oczekiwana zdefiniowana wzorem (4.2.2) również należy do A . Kiedy jednak A nie jest wypukły, $\langle a \rangle$ może znaleźć się poza A . Jeśli w danym zagadnieniu przestrzeń \mathbb{R}^n , w której zanurzony jest zbiór A ma sensowną interpretację, można powiedzieć, że $\langle a \rangle$ jest wartością oczekiwaną $a(x)$ w \mathbb{R}^n , ale nie w A . Łatwo jednak wskazać sytuację, gdy przestrzeń zanurzenia nie ma w ogóle sensu fizycznego.

Przykładem takim jest zagadnienie średniego położenia na okręgu jako rozmaitości indeksującej kierunku orientacji na płaszczyźnie, powiedzmy średniego kierunku wiatru. Niech kierunki wiatru opisane będą przy użyciu azymutu. Przypuśćmy, że mamy do uśrednienia dwa punkty: azymut 15° i 345° . Jasne jest, że skupione są one w pobliżu kierunku północnego. Jednak naiwne uśrednienie ich wartości zwróci wynik 180° czyli południe. Z drugiej strony, sparametryzowane ich jako punktów na okręgu jednostkowym i uśrednienie na płaszczyźnie, zwróci wynik wewnątrz koła, który (bez dodatkowych założeń) nie wyraża kierunku.

¹⁴ Ewentualnie \mathbb{C}^n .

Na tej samej zasadzie średnie położenie na okręgu (rozumiane jako średnia orientacja na płaszczyźnie) w przypadku rozkładu ciągłego nie może być obliczone ani wzorem $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \phi \rho(\phi)$ (gdyż granice całkowania wyrażają jedynie arbitralnie wybrany punkt „rozcięcia” okręgu, a funkcja ϕ nie jest okresowa), ani $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi [\cos \phi, \sin \phi] \rho(\phi)$ ¹⁵, gdyż wartość ta leży wewnątrz koła, a to nie ma sensu, gdy ϕ parametryzuje kąty orientacji na płaszczyźnie.

Należy zwrócić uwagę, że jest to problem natury geometrycznej, nie mający swojego źródła w mechanice kwantowej.

Kluczem do poprawnego określenia wartości oczekiwanej dla obserwabli której wartościami są punkty należące do rozmaitości o topologii okręgu jest zdefiniowanie geometrycznej wartości oczekiwanej (środka ciężkości) dla punktów należących do okręgu w jego topologii, bez odwoływania się do przestrzeni zanurzenia \mathbb{R}^2 .

4.2.2 Statystyka na rozmaitości o topologii okręgu

Definicja wartości oczekiwanej zależy od topologii rozmaitości, do której należą wartości uśrednianej **zmiennej losowej**¹⁶. Zagadnieniem tym zajmuje się statystyka wartości na rozmaitościach (*manifold-valued statistics*). Gdy zmienną losową jest kierunek (ze zwrotem) w przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^{n+1} (czyli punkt na sferze S^n), mówimy o statystyce kierunkowej (*directional statistics*).

Ideą miar tendencji centralnej jest to, że mają być to pojedyncze punkty w jakimś sensie najlepiej reprezentujące cały zbiór. Osiąga się to przez minimalizację pewnej miary łącznej odległości wszystkich punktów zbioru od danego punktu. Nazywa się ją (uogólnioną) funkcją Frécheta. Gdy funkcją Frécheta jest suma kwadratów owych odległości, to uzyskaną miarę tendencji centralnej nazywamy średnią. Pozostaje kwestia metryki, w której mierzone są odległości pomiędzy punktami. W \mathbb{R}^n najbardziej naturalna jest metryka euklidesowa; dla ogólniejszych rozmaitości zastępuje ją odpowiednia metryka Riemanna, czyli odległość geodezyjna na danej rozmaitości. W przypadku okręgu jest nią długość (krótszego) łuku pomiędzy punktami.

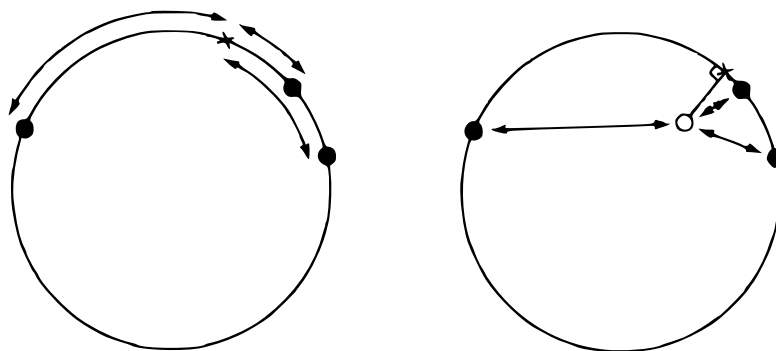
Alternatywą jest znalezienie środka ciężkości rozkładu na płaszczyźnie, w której ten okrąg jest zanurzony. Punkt ten leży wewnątrz koła (chyba że rozkład prawdopodobieństwa był jednopunktowy). Za średnią (zewnątrzną) na okręgu przyjmuje się rzut tego punktu na okrąg. Równoważnie można wykonać minimalizację funkcji Frécheta na okręgu z tym, że skonstruowanej nie w oparciu o metrykę Riemanna, a metrykę cięciwową. Sens takiej średniej w przypadku okręgu jako rozmaitości indeksującej kąty orientacji na płaszczyźnie jest ograniczony, jako że punkty wewnątrz koła oraz długości cięciw w ogóle nie mają sensownej interpretacji.

Statystyki uzyskane w metryce Riemanna na danej rozmaitości nazywamy wewnętrznymi (*intrinsic*)¹⁷, a te w metryce euklidesowej przestrzeni zanurzenia – zewnętrznymi (*extrinsic*).

¹⁵ Inaczej $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \rho(\phi)$.

¹⁶ Nie należy tego mylić z topologią przestrzeni zdarzeń elementarnych. Średnia wysokość n.p.m. obliczana wzdłuż zamkniętej marszruty, to zwykła średnia zmiennej euklidesowej, tyle że obliczana przez całkowanie po krzywej zamkniętej; natomiast średni kierunek wiatru obliczany w danym miejscu w przeciągu godziny wymaga odmiennego podejścia.

¹⁷ Spotyka się też nazwy średnia Frécheta, czy Karchera.



Rysunek 1 – Schemat ideowy średniej wewnętrznej i zewnętrznej. (Na podst. [20])

Ideę tego jak odmierzane są odległości pomiędzy punktami zbioru a punktem kandydującym na średnią na okręgu w koncepcji średniej wewnętrznej i zewnętrznej (lub punktem z nim w pewien sposób powiązany) przedstawia Rysunek 1. W przypadku średniej wewnętrznej odległości mierzone są w samej rozmiarowości okręgu, w jej metryce Riemanna, czyli po łuku, podczas gdy w przypadku średniej zewnętrznej – na płaszczyźnie, w której okrąg ten jest zanurzony. Do tego, w przypadku średniej zewnętrznej, odległości te mierzone są pomiędzy punktami zbioru a punktem wewnątrz koła, który dopiero ma być zrzutowany na okrąg.

Większość treści tego podrozdziału opiera się na [20], [21], [22] i [23]. Część propozycji, w szczególności wzór na wariancję przypomina podejście Trifonowa [24]. Autor zwraca jednak uwagę na ich odmienny sens (m.in. inny wybór „centrum”) i odmienne uzasadnienie.

4.2.3 Funkcja Fréchet’a

W \mathbb{R}^n standardową miarą centrum rozkładu jest średnia M , zaś standardowymi miarami dyspersji rozkładu prawdopodobieństwa są wariancja V i odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{V}$. Wariancja zdefiniowana jest jako średni kwadrat odchylenia od średniej $V = \mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}x)^2$. Odchylenie standardowe σ ma też tę właściwość, że mierzy odległość od maksimum do punktu przegięcia funkcji gęstości rozkładu normalnego. Tak więc tradycyjnie wariancja zdefiniowana jest z użyciem definicji wartości oczekiwanej.

Na rozmiarowościach o ogólniejszej topologii porządek definiowania wartości oczekiwanej i wariancji zostaje zmieniony. Otóż najpierw zdefiniowana zostaje funkcja Fréchet’a¹⁸, która zdefiniowana jest podobnie do (standardowo określonej) wariancji z tym, że stanowi sumę kwadratów odległości wszystkich punktów zbioru nie tyle od średniej, co od dowolnego punktu dziedziny – jako jego funkcja

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}') := \int_K d\mu(\mathbf{x}) f(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \rho(\mathbf{x}) \quad (4.2.3)$$

gdzie $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ jest metryką, a f – funkcją rosnącą.

¹⁸ Funkcja ta najczęściej występuje w literaturze bez specjalnej nazwy. Rzadko stosowana nazwa „funkcja Fréchet’a” jest adekwatna, jako że funkcja ta służy do definiowania średniej Fréchet’a i wariancji Fréchet’a.

Wówczas miarę tendencji centralnej definiuje się jako położenie minimum tej funkcji $C_{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}'} \mathcal{V}(\mathbf{x}')$. Natomiast miarą dyspersji jest wartość tej funkcji w minimum $D_{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}'} \mathcal{V}(\mathbf{x}') = \mathcal{V}(C_{\mathbf{x}})$.

Różne wybory d i f prowadzą do nierównoważnych miar tendencji centralnej i rozrzutu.

Naturalną metryką w \mathbb{R}^n jest metryka euklidesowa $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_2$. W \mathbb{R}^n miarą tendencji centralnej określoną przez wybór $f(y) = y^2$ jest zwykła średnia, zaś miarą rozrzutu jest wówczas zwykła wariancja. Wybór $f(y) = y$ prowadzi odpowiednio do mediany i średniego odchylenia bezwzględnego (MAE).

Średnia wewnętrzna na danej rozmaitości określana jest też jako riemannowski środek masy, co dobrze oddaje jej sens.

4.2.4 Średnia wewnętrzna na okręgu

Średnią i wariancję na okręgu otrzymuje się wybierając $f(y) = y^2$ i metrykę wewnętrzną okręgu (4.1.1)

$$\mathcal{V}(\phi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi ([\phi - \phi']_{(-\pi, +\pi)})^2 \rho(\phi) \quad (4.2.4)$$

Odpowiedni wybór przedziału całkowania pozwala pozbyć się funkcji modulo.¹⁹ Gdy $\phi \in [\phi' - \pi, \phi' + \pi)$, $d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = |\phi - \phi'|$ (vide Uwaga 1 w podrozdz. 4.1.1.1).

$$\mathcal{V}(\phi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi' - \pi}^{\phi' + \pi} d\phi (\phi - \phi')^2 \rho(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \phi^2 \rho(\phi + \phi') \quad (4.2.5)$$

Wówczas

$$M_{\phi} = \arg \min_{\phi'} \mathcal{V}(\phi') = \arg \min_{\phi'} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \phi^2 \rho(\phi + \phi') \quad (4.2.6)$$

Średnia wewnętrzna na okręgu jest zawsze określona, ale nie zawsze jest jednoznaczna. Jednak, z wyłączeniem rozkładu jednostajnego, jest lokalnie jednoznaczna. Wraz z ciągłymi zmianami kształtu rozkładu, przemieszcza się w sposób ciągły. Jeśli nie jest jednoznaczna, poszczególne jej wystąpienia mogą się łączyć lub rozdzielać w miarę ciągłego zniekształcania rozkładu, ale nie mogą się pojawiać ani znikać.

Istotną trudnością związaną ze średnią wewnętrzną jest fakt, że nie jest wyrażona wzorem jawnym a procedurą optymalizacyjną.^{20 21}

19 Należy rozumieć ten zabieg jako dostosowanie granic całkowania do prostszej nieokresowej funkcji podcałkowej $(\phi - \phi')^2$, podczas gdy jej właściwa okresowa wersja to $([\phi - \phi']_{[-\pi, +\pi)})^2$. W przypadku zastosowania okresowej wersji funkcji podcałkowej, granice całkowania można przesunąć dowolnie, byle przedział całkowania pokrywał cały okrąg. (Inaczej mówiąc, punkt rozcięcia okręgu nie gra roli.)

20 W przypadku rozkładów dyskretnych optymalizacja może przebiegać tylko zbiór dyskretny (najczęściej skończony). [21]

21 Zaletą tej definicji natomiast (w kontekście ogólnej statystyki) jest fakt, że traktuje średnią i medianę na jednakowej stopie (vide podrozdz. 4.2.3), ułatwiając systematyczne proponowanie miar pośrednich lub jeszcze innych.

4.2.4.1 Sprawdzian spójności i wzór alternatywny

Ciekawym sprawdzianem konsystencji definicji średniej wewnętrznej na okręgu może być rozumowanie następujące. Niech średnia będzie położona w punkcie $\bar{\phi}$. Jeśli rozetniemy okrąg na antypodach owej średniej, tj. w punkcie $\bar{\phi} \pm \pi$ i policzymy standardową średnią na takim odcinku $\langle \phi \rangle_{[\bar{\phi}-\pi, \bar{\phi}+\pi]}$, powinna ona zgadzać się z $\bar{\phi}$ czyli wypaść pośrodku odcinka. Jeśli natomiast wybierzemy dowolny inny punkt centralny $\alpha \neq \bar{\phi}$ i, konsekwentnie, punkt rozcięcia $\alpha \pm \pi$, to średnia na takim odcinku $\langle \phi \rangle_{[\alpha-\pi, \alpha+\pi]}$ nie wskaże automatycznie α .

Stwierdzenie, że $\bar{\phi}$ jest średnią wewnętrzną rozkładu $\rho(\phi)$ oznacza, że funkcja Frécheta osiąga tam minimum $\frac{d}{d\phi} \mathcal{V}(\bar{\phi}) = 0$.

Zatem

$$\langle \phi \rangle_{[\bar{\phi}-\pi, \bar{\phi}+\pi]} = \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} d\phi \phi \rho(\phi) = \bar{\phi} \quad (4.2.7)$$

Podczas gdy dla $\langle \phi \rangle_{[\alpha-\pi, \alpha+\pi]} = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} d\phi \phi \rho(\phi)$, gdzie $\alpha \neq \bar{\phi}$, nic podobnego nie zachodzi.

Nie jest to oczywiście dowód poprawności definicji ani procedury znajdowania średniej wewnętrznej, ale, jak powiedziano, sprawdzian spójności. Formuła $\int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} d\phi \phi \rho(\phi)$ nie może służyć za wzór jawny dla średniej wewnętrznej, gdyż zależy od $\bar{\phi}$. Można jednak zauważyć, że $\bar{\phi}$ jest punktem stałym funkcji

$$f(\phi') = \int_{\phi'-\pi}^{\phi'+\pi} d\phi \phi \rho(\phi) \quad (4.2.8)$$

$$\bar{\phi} = \text{Fix}_{\phi'} f(\phi') \quad (4.2.9)$$

co można potraktować jako równoważną wobec (4.2.6) definicję średniej wewnętrznej na okręgu.

Uwaga 2

Ten ostatni wzór okazuje się zgadzać z definicją zaproponowaną (choć innym językiem) przez Trifonowa ([24], wz. 18 w związku z wz. 8a). W niniejszej pracy jednak zarówno wzór (4.2.8) jak i (w pewnym sensie bardziej fundamentalny) wzór (4.2.6) otrzymano wprost z zasad statystyki na rozmaitościach, mianowicie bardzo naturalnego warunku minimalizacji funkcji Frécheta (wyrażającej pewną łączną odległość wszystkich punktów zbioru od punktu dziedziny, jako argumentu, por. podrozdz. 4.2.3).

4.2.5 Wariancja

Jako że w literaturze występują różne miary rozrzutu dla rozkładów na rozmaitościach, ten rodzaj wariancji nazywa się niekiedy *wariancja Frécheta*. Nie jest to jednak powszechnie używany termin.

$$V_{\phi} = \min_{\phi'} \mathcal{V}(\phi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} d\phi (\phi - \bar{\phi})^2 \rho(\phi) \quad {}^{22} (4.2.10)$$

inaczej

$$V_{\phi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \phi^2 \rho(\phi + \bar{\phi}) \quad (4.2.11)$$

Uwaga 3

Wzór na wariancję okazuje się bardzo podobny do zwykłego wzoru na „średni kwadrat”. Należy jednak dostrzec, że jeśli granice całkowania mają być niezależne od położenia średniej, to argumentem funkcji gęstości prawdopodobieństwa musi być położenie kątowe przesunięte o tę średnią.

Uwaga 4

Należy pamiętać, że obecność $\bar{\phi}$ w granicach całkowania w (4.2.10) czy ogólniej ϕ' w (2.2.3) wynika wyłącznie z dostosowania granic całkowania do prostszej nieokresowej funkcji podcałkowej $(\phi - \phi')^2$, podczas gdy jej właściwa okresowa wersja $([\phi - \phi']_{[-\pi, +\pi]})^2$ wynika wprost z postaci metryki Riemanna na okręgu (wz. (4.1.1)). W przypadku zastosowania okresowej wersji funkcji podcałkowej, granice całkowania można przesunąć dowolnie, byle przedział całkowania pokrywał cały okrąg. (Inaczej mówiąc, punkt „rozcięcia” okręgu nie gra wówczas roli.)

Uwaga 5

Wzór (4.2.12) ma na pozór taką samą postać jak formuła zaproponowana przez Trifonowa ([24], wz. 12) z tym, że w niniejszej pracy:

- „Centrum pakietu falowego” (na antypodach którego znajduje się początek i koniec przedziału całkowania – punkt „rozcięcia” okręgu), rozumiane jest nie jako dominanta (cyt.: „*most probable value of ϕ* ”) ale jako (zdefiniowana w podrozdziale 4.2.4) średnia wewnętrzna.
- Przedstawiony wzór wynika wprost z zasad statystyki na rozmaitościach (por. Uwaga 2 w podrozdz. 4.2.4).
- Przedstawiono także taki wariant wzoru na wariancję, w którym granice całkowania nie zależą od położenia średniej (ani innego „centrum”) (4.2.11).

Wobec powyższych wyjaśnień (Uwaga 4 i Uwaga 5) zasadne zastrzeżenia wobec propozycji Trifonowa podnoszone m.in. w [25] nie mają zastosowania do propozycji przedstawionej w niniejszej pracy.

Na koniec tego punktu dodamy, że relacja $V_x = \sigma_x^2$ znana ze standardowej statystyki zmiennych euklidesowych nie ma prostego odpowiednika w statystyce zmiennych na okręgu, gdyż poszczególne właściwości odchylenia standardowego σ znanego z statystyki w \mathbb{R}^n wykazuje kilka

22 Czynniki $1/2\pi$ jest czysto konwencjonalny.

różnych funkcji. W szczególności $\sigma_V := \sqrt{V}$ nie pokrywa się z punktem przegięcia σ_i gęstości rozkładu pełniącego rolę rozkładu normalnego (*vide* podrozdz. 4.2.6).

4.2.6 Odpowiednik rozkładu normalnego

Szczególne role jaką pełni rozkład normalny wynika z następujących jego właściwości:

- Jest rozkładem granicznym dla sumy zmiennych losowych w sensie centralnego twierdzenia granicznego.
- Ma maksymalną entropię wśród wszystkich rozkładów o określonej średniej i wariancji.
- Jest rozwiązaniem fundamentalnym równania przewodnictwa cieplnego (dyfuzji).
- Jego postać odpowiada gęstości standardowego stanu koherentnego w \mathbb{R}^n w przestrzeni położeniowej, pędowej, jak i funkcji Wignera ($2n$ D).

Analogiem rozkładu normalnego z \mathbb{R}^n jest w S^1 , nawinięty rozkład normalny (*wrapped normal distribution*), inaczej rozkład *theta*.

$$\rho(\phi) = \frac{1}{2\pi} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \right) \quad (4.2.12)$$

normalizowany tak że $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f(\phi) = 1$. Uwaga: nie jest to normalizacja powyższej funkcji jako funkcji falowej, a jako gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

Ma on średnią (wewnętrzną) $M_{\phi,S} = \alpha$ i wariancję $V_{\phi,S}(\sigma^2)$ – funkcję rosnącą i ograniczoną taką, że dla $\sigma^2 \ll \frac{\pi^2}{3}$ zachodzi $M_{\phi,S}(\sigma^2) = \sigma^2$.

Jego pozycja jako „rozkładu normalnego na okręgu” wynika z następujących faktów:

- Powstaje on w wyniku „nawinięcia” rozkładu normalnego z \mathbb{R} na okrąg (sumowanie okresowe, *vide* podrozdz. 4.3.1).
- W przypadku rozkładu silnie skupionego (dla $\sigma^2 \ll \frac{\pi^2}{3}$) sprowadza się do rozkładu normalnego.
- Obowiązuje dla niego odpowiednia postać centralnego twierdzenia granicznego.
- Również jest rozkładem o maksymalnej entropii (dla określonych M i V) w swojej przestrzeni²³.
- Również jest rozwiązaniem fundamentalnym równania przewodnictwa cieplnego w swojej przestrzeni.
- Jego postać również odpowiada stanowi koherentnemu w odpowiedniej przestrzeni.

²³ Często to rozkład von Misesa wymieniany jest jako ten maksymalizujący entropię. Jest to prawda jedynie, gdy szukamy rozkładu maksymalizującego entropię wśród rozkładów o określonych: średniej zewnętrznej i tzw. „wariancji cyrkularnej” (która jednak nie jest obliczana z użyciem metryki Riemanna na okręgu). Tymczasem tu szukano rozkładu maksymalizującego entropię wśród rozkładów o zgodnych wewnętrznych miarach położenia i dyspersji.

4.2.7 Zewnętrzne miary położenia i rozrzutu

4.2.7.1 Średnia zewnętrzna

Średnia zewnętrzna (*extrinsic mean*)²⁴ obliczana jest za pośrednictwem średniej na płaszczyźnie.

$$M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \mathbf{x} \rho(\phi) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} |f(\phi)|^2 \quad (4.2.13)$$

Punkt ten leży wewnątrz koła, chyba że rozkład $\rho(\phi)$ był jednopunktowym („typu delta”).

Wówczas tak uśredniona wartość kąta ϕ wynosi

$$EM = \text{atan2}(M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2}) \quad (4.2.14)$$

gdzie $\text{atan2}(x)$ jest dwuargumentową funkcją *arcus tangens*, uwzględniającą też kwadrant układu współrzędnych (*vide* uzup. 9.1).

Natomiast położenie na okręgu we współrzędnych płaszczyzny można też odczytać przez normalizację wektora $M_{\mathbf{x}}$ do długości 1.

$$EM(\mathbf{x}) = \frac{M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2}}{|M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2}|} \quad (4.2.15)$$

Średnia zewnętrzna nie jest określona, gdy $M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2} = [0, 0]$. W pozostałych przypadkach jest jednoznaczna. Jej położenie nie zależy w sposób ciągły od kształtu rozkładu na okręgu. W szczególności, dowolnie mała zmiana kształtu rozkładu, przy której $M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^2}$ przechodzi dokładnie przez środek koła, skutkuje przeskokiem EM na antypody.

Jeśli położenie na okręgu parametryzowane jest liczbą zespoloną $z = e^{i\phi}$, to średnia na płaszczyźnie (zespolonej) obliczana jest następująco

$$\bar{z} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} \rho(\phi) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} |f(\phi)|^2 \quad (4.2.16)$$

$$|\bar{z}| \leq 1$$

Odpowiadające jej położenie kątowe możemy wyekstrahować jako argument główny.

$$EM = \text{Arg } \bar{z} \quad (4.2.17)$$

Natomiast położenie na okręgu we współrzędnych płaszczyzny (zespolonej)

$$EM(z) = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|} \quad (4.2.18)$$

4.2.7.2 Zewnętrzne miary rozrzutu

Choć miary te mają w niniejszej pracy mniejsze zastosowanie, scharakteryzujmy je krótko z myślą o kompletności wywodu w bieżącym punkcie. Konsekwentnie, zewnętrzną miarą wariancji powinno być coś związanego z wariancją na płaszczyźnie. Wariancję w przypadku wielowymiarowym, można rozumieć jako macierz kowariancji $Cov_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T$, jako jej wyznacznik lub ślad $V_{\mathbf{x}} = \text{Tr } Cov_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, przy czym wartość oczekiwaną $\bar{\mathbf{x}}$

²⁴ W literaturze często średnia ta nazywana jest „średnią cyrkularną” (circular mean). Autor jest przeciwny stosowaniu tego terminu jako mylącego, gdyż średnia ta nie jest obliczana na samej rozmaitości okręgu a poza nią.

oblicza się standardowo w \mathbb{R}^n . $V_{\mathbf{x}}$ wyraża (standardową, 1D) wariancję euklidesowych odległości pomiędzy punktami danych a ich średnią w \mathbb{R}^n .

$$V_{\mathbf{x},\mathbb{R}^2} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi ((\cos \phi - \bar{x})^2 + (\sin \phi - \bar{y})^2) \rho(\phi) = 1 - M_{\mathbf{x},\mathbb{R}^2}^2 \quad (4.2.19)$$

$V_{\mathbf{x},\mathbb{R}^2} \in [0,1]$. Jest to wariancja na płaszczyźnie. Ma sens kwadratu pewnej odległości od punktu $M_{\mathbf{x}}$. W przeciwieństwie do przypadku średniej zewnętrznej, gdzie rzutowanie na okrąg wydawało się w miarę naturalne, tu nie ma powszechnie uznawanego sposobu „przeliczenia jej” na jakość rozumianą wariancję położenia kąтового V_{ϕ} . Można argumentować, że sensowną miarą byłby $(\arccos|M_{\mathbf{x}}|)^2$, ale nie jest to szerzej znana definicja. W niniejszej pracy nie ma też zastosowania, toteż zagadnienie to nie będzie tu rozwijane.

W tej materii w literaturze panuje zupełny chaos pojęciowy. Kłopotliwość stosowania ściślejszej wariancji Fréchet’a i brak naturalnego jednoznacznego związku pomiędzy wariancją na płaszczyźnie a kwadratem jakiejś długości na okręgu poskutkowało wprowadzeniem pewnych innych miar rozrzutu. Nie byłoby w tym nic złego, gdyby nie nazewnictwo sugerujące, że miary te są na okręgu odpowiednikami wariancji lub odchylenia standardowego na prostej. Mamy zatem:

- $1 - |M_{\mathbf{x}}|$ – „wariancję cyrkularną” (*circular variance*)
- $\sqrt{-2 \ln|M_{\mathbf{x}}|}$ – „cyrkularne odchylenie standardowe” (*circular standard deviation*)
- $(1 - M_{\mathbf{x}}^2)/2M_{\mathbf{x}}^2$ – „dyspersję cyrkularną” (*circular dispersion*)

Żadna z tych trzech miar nie ma prostego związku z wariancją na okręgu (w jego metryce Riemanna) ani wariancją czy odchyleniem standardowym na płaszczyźnie. Co więcej, miary te nie mają dostatecznie prostego związku ze sobą nawzajem.

4.3 Stany koherentne na okręgu

Gdy przestrzenią konfiguracyjną jest okrąg, można wskazać następujące drogi skonstruowania stanów koherentnych, które okazują się identyczne:

1. Sumowanie okresowe funkcji falowej (w reprezentacji położeniowej) stanu podstawowego oscylatora harmonicznego na prostej i generowanie pozostałych stanów koherentnych przy użyciu operatora przesunięcia \widehat{D} .
2. Sumowanie okresowe funkcji falowych (w reprezentacji położeniowej) standardowych stanów koherentnych $|\bar{x}, \bar{p}\rangle$ na prostej.
3. Przyjęcie za stan podstawowy na okręgu jądra cieplnego (też na okręgu) dla parametru „czasu” τ określającego stopień dyspersji stanu i wygenerowanie pozostałych stanów jak w punkcie 1.
4. Znalezienie przy użyciu operatora anihilacji relacji rekurencyjnej pomiędzy abstrakcyjnymi stanami koherentnymi parametryzowanymi liczbą zespoloną ξ , rozwiązanie rekurencji, rozwinięcie stanu w bazie pędowej i zinterpretowanie parametru ξ jako położenia w przestrzeni fazowej w parametryzacji zespolonej. (Ogólnie: [15], na okręgu: [16])

Ponadto w literaturze spotyka się inne nierównoważne propozycje stanów koherentnych.

4.3.1 Sumowanie okresowe

W tym podrozdziale przedstawiamy metodę sumowania okresowego w ogólności bez odniesienia do funkcji falowych.

Dowolną funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ można przekształcić w funkcję okresową

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + kT) \quad (4.3.1)$$

Funkcję $f_T(x)$ można traktować jako funkcję okresową $f_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o okresie T , lub jako funkcję $f_T: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$ jest prostą modulo T lub okręgiem o obwodzie T .

Można ją wyrazić jako spłot (konwolucję) danej funkcji (całkowalnej) z tzw. grzebieniem Diraca, inaczej „funkcją” *sza* (vide uzup. 9.1):

$$\mathfrak{W}_T(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x + kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}x} \quad (4.3.2)$$

gdzie $\delta(x)$ jest deltą Diraca, a więc $\mathfrak{W}_T(x)$ również jest dystrybucją.

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \delta(x' - x + kT) = \int dx' f(x') \mathfrak{W}_T(x' - x) \quad (4.3.3)$$

Po dalszych przekształceniach

$$f_T(x) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}(x-x')} = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_n e^{in\frac{2\pi}{T}x} \tilde{f}\left(n\frac{2\pi}{T}\right) \quad (4.3.4)$$

gdzie współczynniki szeregu Fouriera $\tilde{f}(n2\pi/T)$ są równe ciągłej unitarnej transformacie Fouriera funkcji f próbkowanej co $2\pi/T$. Jest to treść tzw. formuły sumacyjnej Poissona.

Dla okręgu o promieniu r

$$f_{2\pi r}(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(r\phi + k2\pi r) \quad (4.3.5)$$

Warto zauważyć, że przedstawione tu sumowanie okresowe jest szczególnym przypadkiem transformacji Zaka²⁵.

$$(Tf)(q, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(r\phi + kL) e^{ikL\lambda}$$

dla $L = 2\pi r$ i $\lambda = 1$. Ogólniej transformację tę zastosowano w podrozdziale 4.3.4.1.

Ponieważ przedmiotem zainteresowania w tym rozdziale jest okrąg jako samodzielna rozmaitość, bez odniesienia do przestrzeni zanurzenia (dokładniej włożenia), w szczególności jako rozmaitość odpowiadająca kątom orientacji lub obrotu, promień jest bez znaczenia i możemy przyjąć $r = 1$. Wówczas miara kąta jest liczbowo równa długości łuku. Jednak, gdy jednostki na osi położenia wybrano tak że stan koherentny na prostej (wykorzystywany w konstrukcji stanu na

²⁵ Transformację Zaka określa się też nazwiskami Gel'fanda, Weila i Brezina.

okręgu) ma szerokość $s = 1$, skala przestrzenna została już zafiksowana i nie możemy jednocześnie swobodnie ustalić jej wyborem $r = 1$. Należy zdecydować się na jedno z dwojga:

- narzucić $r = 1$, a dyspersję stanu na prostej s pozostawić jako parametr swobodny,
- narzucić $s = 1$, a promień okręgu r pozostawić jako parametr swobodny.

Pierwsza możliwość wydaje się bardziej dogodna do opisu statystycznego, zaś druga jest zgodna ze zwyczajowym opisem stanów koherentnych na prostej.

Sumowanie okresowe funkcji działa tak, jakby oś argumentów styczną w punkcie $\phi = 0$ do okręgu o promieniu $r = T/2\pi$ obustronnie nawinać na ów okrąg i zsumować wartości funkcji odpowiadające poszczególnym punktom okręgu a różniące się liczbą „nawinięć”.

4.3.1.1 Kwestia normalizacji

Jako że w podrozdziale 4.3.1 omawiano sumowanie okresowe bez odniesienia do funkcji falowych, warto zwrócić uwagę na dwojaką możliwość normalizacji otrzymanej funkcji. Jeśli pracujemy w kontekście ogólnej statystyki kierunkowej, zarówno funkcją f na \mathbb{R} jak i $f_{2\pi}$ na S^1 zazwyczaj są gęstości prawdopodobieństwa. Natomiast w mechanice kwantowej funkcjami tymi się funkcje falowe. To co podlega normalizacji, to, zgodnie z drugim aksjomatem Kołmogorowa, prawdopodobieństwo. Zatem musimy odróżniać warunek normalizacji $f_{2\pi}$:

- jako gęstości prawdopodobieństwa $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_{2\pi}(\phi) = 1$ i
- jako funkcji falowej $\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi |f_{2\pi}(\phi)|^2 = 1$.

4.3.2 Generowanie stanów koherentnych na okręgu przez sumowanie okresowe

Istotną cechą stanów koherentnych jest możliwość wygenerowania ich ze stanu podstawowego (lub innego stanu koherentnego o znanych parametrach) przy użyciu operatora przesunięcia $|\alpha\rangle = \widehat{D}(\alpha)|0\rangle$. W tym celu trzeba znać postać stanu $|0\rangle$ oraz operatora \widehat{D} .

Dalej rozważona będzie też ewentualność antyokresowych warunków brzegowych.

4.3.2.1 Stan podstawowy

Funkcję falową podstawowego stanu koherentnego na okręgu można otrzymać metodą sumowania okresowego funkcji falowej standardowego stanu koherentnego (na prostej) $g(x) = e^{-x^2/2\hbar}$ będącego stanem podstawowym $\bar{x} = 0, \bar{p} = 0$ (tu, dla prostoty, bez czynnika normalizującego). W toku sumowania okresowego zmienna x odmierzana jest wzdłuż okręgu, toteż $x = r(\phi + k2\pi)$. Poprzez bezpośrednie sumowanie:

$$\begin{aligned} f_{00}(\phi) &= N \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(r(\phi + k2\pi)) = N \sum_k e^{-\frac{(\phi+k2\pi)^2 r^2}{2\hbar}} = \\ &= \frac{N\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2\pi r^2}} \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Inaczej $N(\hbar/2\pi r^2)^{-1/2} \theta_3(\phi/2 | i\hbar/2\pi r^2)$. Funkcja *theta* Jacobiego typu 3 zdefiniowana jest następująco: $\theta_3(z, q) \equiv \theta_3(z|\tau) := \sum_k q^{n^2} e^{i2nz}$ gdzie $q = e^{i\pi\tau}$ jest tzw. *nome* (*nome*) a τ –

parametrem kraty (*lattice parameter*) (*vide* uzup. 9.1). N jest (ustalonym dalej) współczynnikiem normalizacyjnym.

Łatwiej, bo niemal bezpośrednio z definicji, funkcję tę można obliczyć z użyciem wzoru sumacyjnego Poissona (4.3.4):

$$f_{00}(\phi) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} e^{-\frac{n^2\hbar}{2r^2}} = \frac{N\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2\pi r^2}} \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \quad (4.3.7)$$

W dalszej części pracy sumowanie okresowe wykonywane jest wzorem sumacyjnym Poissona; zawsze jednak można wykonać je wprost z definicji sumowania okresowego jak w (4.3.1).

Stany własne $|\phi\rangle$ operatora $\widehat{e^{i\Theta}}$ wyznaczają bazę położeniową na okręgu indeksowaną przez kąty ϕ . Ścisłe rzecz biorąc stany te nie są normalizowalne lub inaczej, są normalizowalne „w sensie Diraca” tj. $\langle\phi|\phi'\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(\phi-\phi')k} = \sum_k \delta(\phi - \phi' + k2\pi) = \mathfrak{W}_{2\pi}(\phi - \phi')$, więc nie należą do $L^2(-\pi, +\pi)$. To samo dotyczy jednak i $|x\rangle$ w \mathbb{R}^n . Krótkie omówienie kwestii bazy na okręgu można znaleźć w [19] a nieco obszerniejsze w ([26], podrozdz. 6.6).

Stan podstawowy wyraża się w reprezentacji położeniowej przez

$$|0,0\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_{00}(\phi) |\phi\rangle \quad (4.3.8)$$

4.3.2.2 Operator przesunięcia \widehat{D}

Operator przesunięcia $\widehat{D}(\alpha, l) = e^{i(l\widehat{\Theta} - \alpha\widehat{J})}$ ma postać analogiczną do przypadku \mathbb{R} . Operator ten ulega rozkładowi na czynniki $e^{i(l\widehat{\Theta} - \alpha\widehat{J})} = e^{-\frac{i}{2}\alpha l} e^{il\widehat{\Theta}} e^{-i\alpha\widehat{J}}$.

4.3.2.3 Stany $|\alpha, l\rangle$

Stany koherentne o parametrach $\alpha \in (-\pi, +\pi]$, $l \in \mathbb{Z}$ powstają ze stanu podstawowego pod działaniem operatora \widehat{D} .

$$\begin{aligned} |\alpha, l\rangle &= \widehat{D}(\alpha, l)|0,0\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_{00}(\phi) e^{il\widehat{\Theta} - i\alpha\widehat{J}} |\phi\rangle = \\ &= e^{-\frac{i}{2}l\alpha} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} f_{00}(\phi' - \alpha) e^{il\phi'} |\phi'\rangle \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Tak więc funkcja falowa

$$f_{\alpha l}(\phi) = e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{il\phi} f_{00}(\phi - \alpha) = \frac{N\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2\pi r^2}} e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{il\phi} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \quad (4.3.10)$$

przy czym $e^{-i\alpha l/2}$ jest globalnym stałym czynnikiem fazowym.

4.3.2.4 Normalizacja stanu

Funkcja $f_{\alpha l}(\phi)$ podlega normalizacji jako funkcja falowa stanu układu kwantowego (*vide* uwagi w podrozdz. 4.3.1.1) $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |f_{\alpha l}(\phi)|^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |f_{\alpha l}(\phi)|^2 &= \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} \int \frac{d\phi}{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{in(\phi-\alpha)} \right)^* \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{in(\phi-\alpha)} \right) = \\ &= \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} \sum_{n,m} e^{-\frac{(n^2+m^2)\hbar}{2r^2}} e^{-i(m-n)\alpha} \text{sinc}(\pi(m-n)) = \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} \sum_{n,m} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} = \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} \theta_3 \left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right) \end{aligned}$$

Powyżej funkcja *sinus cardinalis* $\text{sinc}(x)$ brana w punktach $\pi(m-n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ działa w sumowaniu po m lub n jak delta Kroneckera δ_{mn} . Zatem $N = \sqrt{2\pi r^2 / \hbar} \theta_3(0, e^{-\hbar/r^2})$.

$$f_{\alpha l}(\phi) = \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3 \left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right)}} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \quad (4.3.11)$$

4.3.3 Przemienność sumowania okresowego i przesuwania stanu

Zauważmy teraz, że ten sam wynik otrzymujemy niezależnie czy startując ze stanu podstawowego na prostej:

- najpierw przy użyciu operatora $\widehat{D}_{XP}(\bar{x}, \bar{p})$ wygenerujemy pozostałe stany koherentne na prostej $|\bar{x}, \bar{p}\rangle$, a następnie metodą sumowania okresowego przekształcimy je w stany na okręgu $|\alpha, l\rangle$, czy też
- najpierw stan podstawowy na prostej przekształcimy w stan podstawowy na okręgu, a następnie za pomocą $\widehat{D}_{\Theta,J}(\alpha, l)$ wygenerujemy pozostałe stany koherentne $|\alpha, l\rangle$,

Funkcją falową stanu koherentnego na prostej jest (dla prostoty bez czynnika normalizującego)

$$g_{\bar{x}\bar{p}}(x) = e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\hbar}} e^{i\frac{\bar{p}x}{\hbar}} e^{-i\frac{\bar{p}\bar{x}}{2\hbar}} \quad (4.3.12)$$

Zgodnie z ideą sumowania okresowego wyrażmy (jeszcze nie wysumowaną) funkcję $g_{\bar{x}\bar{p}}(x)$ jako funkcję $g_{\alpha l}(\phi)$ zmiennych $\phi, \alpha, l \in \mathbb{R}$: $\phi = x/r, \alpha = \bar{x}/r, l = \bar{p}r/\hbar$.

$$g_{\alpha l}(\phi) = e^{-\frac{(\phi-\alpha)^2 r^2}{2\hbar}} e^{il\phi} e^{-i\frac{l\alpha}{2}} \quad (4.3.13)$$

We wzorze sumacyjnym Poissona (4.3.4) występuje transformata Fouriera sumowanej funkcji

$$\tilde{g}_{\alpha l}(n) = e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{in(-\alpha - il\frac{\hbar}{r^2})} e^{-\frac{l^2 \hbar}{2r^2}} e^{i\frac{l\alpha}{2}} \quad (4.3.14)$$

Wówczas

$$f_{\alpha l}(\phi) = N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\phi} \tilde{g}_{\alpha l}(n) = N e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{il(\phi-\alpha)} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \quad (4.3.15)$$

Oczywiście ten sam wynik można otrzymać przez bezpośrednie sumowanie funkcji $\sum_k g_{\alpha l}(\phi + k2\pi)$.

Po normalizacji

$$f_{\alpha l}(\phi) = \frac{e^{il(\phi-\alpha)}}{\theta_3 \left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right)} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \quad (4.3.16)$$

Wynik ten zgadza się (z dokładnością do globalnego stałego czynnika fazowego) z (4.3.11).

4.3.4 Uogólniona okresowość

Otrzymany w poprzednim podrozdziale wynik można uogólnić. Zauważmy, że sumowanie okresowe w zwykłej formie zakłada zwykłą okresowość docelowej funkcji; jest jednak możliwe uzyskanie funkcji o okresowości uogólnionej przez wprowadzenie fazy.

Splot (4.3.3) powinien być wykonany ze zmodyfikowaną funkcją $s_{\lambda}a$ (grzebień Diraca z fazą, *vide* uzup. 9.1).

4.3.4.1 Sumowanie kwaziokresowe

W analogii do definicji funkcji $s_{\lambda}a$ (4.3.2) wprowadźmy grzebień Diraca z fazą zdefiniowany następująco:

$$\begin{aligned}\Psi_{\tau,\lambda}(t) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) e^{i\frac{\lambda 2\pi t}{\tau}} = \Psi_{\tau}(t) e^{i\frac{\lambda 2\pi t}{\tau}} = \\ &= \frac{1}{\tau} e^{i\frac{\lambda 2\pi t}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{n 2\pi t}{\tau}} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{(n+\lambda) 2\pi t}{\tau}}\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

Przy czym znak wykładnika można wybrać dowolnie. τ oznacza pseudookres, λ to faza (liczona w obrotach) dodawana do wartości funkcji po każdym pseudookresie. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Tak więc pełen okres $T = \tau/\lambda$.

Funkcja ta znajduje zastosowanie w uogólnieniu sumowania okresowego, na kwaziokresowe z fazą.

$$\begin{aligned}f_{\tau,\lambda}(\phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi' g(\phi') \Psi_{\tau,\lambda}(\phi' - \phi) = \\ &= \int d\phi' g(\phi') \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(n+\lambda)\frac{2\pi}{\tau}(\phi' - \phi)} = \\ &= \frac{1}{\tau} \sum_n e^{i\phi\frac{2\pi}{\tau}(n+\lambda)} \int d\phi' \underbrace{g(\phi') e^{-i\phi'\frac{2\pi}{\tau}\lambda}}_{g_{\tau,\lambda}(\phi')} e^{-i\phi'\frac{2\pi}{\tau}n} = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\tau} e^{i\phi\frac{2\pi}{\tau}\lambda} \sum_n e^{i\phi\frac{2\pi}{\tau}n} \tilde{g}_{\tau,\lambda}\left(n\frac{2\pi}{\tau}\right)\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

W przypadku funkcji o uogólnionej okresowości na okręgu pseudookresem jest kąt pełny 2π .

$$\begin{aligned}f(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{i\phi(n+\lambda)} \int d\phi' \underbrace{g(\phi') e^{-i\phi'\lambda}}_{g_{\lambda}(\phi')} e^{-i\phi'n} = \\ &= \frac{e^{i\phi\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{i\phi n} \tilde{g}_{\lambda}(n)\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

W istocie przekształcenie to jest równoważne transformacji Zaka

$$(Tf)(q, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(q + kL) e^{ikL\lambda}$$

dla $L = 2\pi r$ i $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. (por. podrozdz. 4.3.1.)

Stany koherentne na okręgu poprzez transformację Zaka standardowych stanów koherentnych na prostej i to od razu w uogólnionej okresowości otrzymali de Bièvre i Gonzalez

(vide Gonzalez i del Olmo [27]). Przypomnijmy, że na mocy argumentów [16] (por. podrozdz. 4.3.4.2) jedynymi dopuszczalnymi wariantami tej okresowości są warianty z $\lambda = 0$ i $\lambda = 1/2$.

4.3.4.2 Stan koherentny na okręgu o uogólnionej okresowości

Funkcja g z fazą $g_\lambda(\phi) = e^{-\phi^2 r^2 / 2\hbar} e^{-i\phi\lambda}$, a jej transformata Fouriera $\tilde{g}_\lambda(n) = \sqrt{\hbar/r^2} e^{-(n+\lambda)^2 \hbar / 2r^2}$.

Stan próżniowy:

$$\begin{aligned} f_{00\lambda}(\phi) &= N \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi r^2}} e^{i\phi\lambda} \sum_n e^{-\frac{(n+\lambda)^2 \hbar}{2r^2}} e^{i\phi n} = \\ &= N \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi r^2}} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{2r^2}} e^{i\phi\lambda} \theta_3 \left(\frac{\phi + i\lambda \hbar / r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Przesunięcie do stanu α, l :

$$\begin{aligned} f_{\alpha l\lambda}(\phi) &= e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{i\phi} f_{00}(\phi - \alpha) = \\ &= N \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi r^2}} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{2r^2}} e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{i\phi(l+\lambda)} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha + i\lambda \hbar / r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Normalizacja przebiega analogicznie jak w podrozdz. 4.3.2.4 lecz współczynnik zależy od λ .

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |f_0(\phi)|^2 &= \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{r^2}} \int \frac{d\phi}{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{in(\phi - \alpha + i\lambda \frac{\hbar}{r^2})} \right)^* \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{in(\phi - \alpha + i\lambda \frac{\hbar}{r^2})} \right) = \\ &= \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{r^2}} \sum_{n,m} e^{-\frac{(n^2+m^2)\hbar}{2r^2}} e^{-i(m-n)\alpha} e^{-i(m+n)\lambda \frac{\hbar}{r^2}} \text{sinc}(\pi(m-n)) = \\ &= \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{r^2}} \sum_{n,m} e^{-\frac{n^2 \hbar}{2r^2}} e^{-i2n\lambda \frac{\hbar}{r^2}} = \frac{N^2 \hbar}{2\pi r^2} e^{-\frac{\lambda^2 \hbar}{r^2}} \theta_3 \left(i\lambda \frac{\hbar}{r^2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right) \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$f_{\alpha l\lambda}(\phi) = \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{i\phi(l+\lambda)}}{\sqrt{\theta_3 \left(i\lambda \frac{\hbar}{r^2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right)}} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha + i\lambda \hbar / r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \quad (4.3.22)$$

4.3.4.3 Przemienność sumowania okresowego i przesunięcia w przestrzeni fazowej w przypadku uogólnionym.

Rachunki analogiczne jak w podrozdziale 4.3.3 dowodzą, że taki sam (z dokładnością do globalnej fazy) stan otrzymuje się przez sumowanie kwaziokresowe funkcji falowej stanów koherentnych na prostej.

4.3.4.4 Przypadki szczególne

W przypadku okresowym $\lambda = 0$, wzór (4.3.22) sprowadza się do ustalonego wcześniej

$$f_{\alpha l0}(\phi) = \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{i\phi l}}{\sqrt{\theta_3 \left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}} \right)}} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right) \quad (4.3.23)$$

W przypadku antyokresowym $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
f_{\alpha l \frac{1}{2}}(\phi) &= \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha} e^{i\phi(l+\frac{1}{2})}}{\sqrt{\theta_3\left(i\frac{\hbar}{2r^2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi-\alpha}{2} + \frac{i\hbar}{4r^2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) = \\
&= \frac{e^{-\frac{i}{2}(l-1)\alpha} e^{i\phi l}}{\sqrt{\theta_2\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_2\left(\frac{\phi-\alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

4.3.4.5 Interpretacja uogólnionej okresowości

Łatwo zauważyć, że parametr λ dodaje się do l tak jakby stan podstawowy charakteryzował się momentem pędu λ . Rozumowanie przedstawione w [16] wyklucza wartości $\lambda = l_0$ inne niż 0 lub $\frac{1}{2}$. Pozwala to na interpretowanie stanów $f_{\alpha l 0}$ jako bozonowe, a $f_{\alpha l \frac{1}{2}}$ jako fermionowe.

4.3.5 Stany koherentne typu jądro ciepłne na okręgu

Koncepcja stanów koherentnych typu jądro ciepłne (*beat kernel coherent states*, HKCS) została wprowadzona przez Halla w przypadku zwartych grup Liego [28] i uogólniona na zwarte przestrzenie symetryczne przez Stenzela [29]. Zagadnienie to omówiono kompleksowo w [17]. Przedstawiono tam stany koherentne dla sfer dowolnego wymiaru $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, przy czym sfery o wymiarze n nieparzystym są grupami Liego, a te o wymiarze parzystym są strukturami ilorazowymi grup Liego.

Zgodnie z tą koncepcją rolę funkcji Gaussa w przestrzeniach jednorodnych pełni jądro ciepłne (*beat kernel*), czyli rozwiązanie fundamentalne równania przewodnictwa ciepłnego w danej przestrzeni z warunkiem początkowym typu delta Diraca.

4.3.5.1 Zagadnienie przewodnictwa ciepłnego na przestrzeni konfiguracyjnej

W przypadku okręgu laplasjan (w naturalnym dla okręgu układzie współrzędnych biegunowych) $\Delta_S = \partial^2 / \partial \phi^2$.

Równanie przewodnictwa ciepłnego (z okresowymi warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym w postaci delty Diraca w $\phi = \alpha$) ma postać

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta_S f(\phi, t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(\phi, t) \\
f(\phi, t) &= f(\phi + 2\pi, t) \\
\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\phi, t) &= \delta(\phi - \alpha)
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

gdzie $\delta(\phi - \alpha)$ rozumiana jest z uwzględnieniem modularnej natury kątów jako $\mathbb{W}_{2\pi}(\phi - \alpha)$ (*vide* uzup. 9.1). Po ograniczeniu dziedziny do dowolnie wybranego przedziału o długości 2π , dystrybucja ta staje się na powrót zwykłą deltą Diraca.

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest

$$\rho(\alpha, \phi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\phi-\alpha+k2\pi)^2}{2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \theta_3\left(\frac{\phi-\alpha}{2}, e^{-\frac{\tau}{2}}\right) \tag{4.3.26}$$

$\tau = \hbar/r^2$, gdzie promień r wyrażono w jednostkach $\sqrt{\hbar}$, jak x . Zauważmy, że szerokość gausianu na prostej $e^{-(x-\bar{x})^2/2\hbar} = e^{-(\phi-\alpha)^2 r^2/2\hbar}$ jako funkcji x wynosi $s_x = \sqrt{\hbar}$ a jako funkcji ϕ wynosi $s_\phi = \sqrt{\hbar}/r$.²⁶ Parametr τ nie jest parametrem czasu dla fizycznej ewolucji otrzymanych stanów.

Uwaga 6

Tu należy podkreślić różnicę pomiędzy geometrią euklidesową a geometrią na okręgu (ogólniej: sferze). Mianowicie sfera ma naturalnie określoną skalę. W \mathbb{R}^n zmiana odległości między punktami (wymiarów figur) może nastąpić proporcjonalnie, bez naruszenia podobieństwa geometrycznego, toteż taki przeskalowany przypadek zawsze można sprowadzić do pierwotnego z użyciem jednego czynnika skalującego (który najczęściej ukrywa się przez wybór układu jednostek). Tymczasem na sferze tylko figury przystające są podobne. Zatem na okręgu jądra ciepłne dla różnych parametrów τ różnią się nie tylko skalą wzdłuż ϕ (jak ma to miejsce w przypadku gausianu w \mathbb{R}^n). Można na to patrzeć też następująco. Choć funkcje Gaussa o różniej dyspersji na prostej można przekształcić jedną w drugą przez transformację argumentu x , to po „nawinięciu” jednej i drugiej na okrąg o danym obwodzie (sumowaniu okresowym, *vide* 4.3.1), otrzymane funkcje będą różniły się „kształtem” a nie tylko skalą wzdłuż ϕ .

Ogólniej jądro ciepłne na sferze S^n [17] można rozpatrywać jako funkcję $\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau)$ gdzie $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in S^n$, ale wchodzą do funkcji ρ za pośrednictwem odległości geodezyjnej θ zdefiniowanej relacją $\cos \theta = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}/r^2$ ²⁷.

Funkcja $\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau)$ ma jednoznaczne rozszerzenie analityczne do $\rho_{AC}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \tau)$ polegające na zamianie $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{a} \in S_{\mathbb{C}}^n$, tyle że teraz $\theta = \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}/r^2) \in \mathbb{C}$. W przypadku okręgu $\theta = \phi - (\alpha + il\hbar/r^2)$, gdzie l jest momentem pędu wyrażonym w jednostkach \hbar .

$$\rho_{AC}(a, x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\theta+k2\pi)^2}{2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \theta_3\left(\frac{\theta}{2}, e^{-\frac{\tau}{2}}\right) \quad (4.3.27)$$

Stan koherentny (nieunormowany) jest równy jądru ciepłnemu dla

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha - il\hbar/r^2) \\ \sin(\alpha - il\hbar/r^2) \end{bmatrix}$$

z parametrem $\tau = \hbar/r^2$.

$$\begin{aligned} f_{\alpha l}(\phi) &= \frac{N}{\sqrt{2\pi\tau}} \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{\tau}{2}}\right) \Big|_{\tau \rightarrow \frac{\hbar}{r^2}} = \\ &= \frac{Nr}{\sqrt{2\pi\hbar}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - il\frac{\hbar}{r^2}}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) = \\ &= \frac{Nre^{\frac{l^2\hbar}{2r^2}}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{il(\phi-\alpha)} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Zaś po normalizacji:

²⁶ Szerokość tę oznaczono literą s , rezerwując $\sigma^2 = s^2/2$ do oznaczenia wariancji położenia w stanie opisanym funkcją falową $e^{-(x-\bar{x})^2/2s^2}$.

²⁷ Wielowartościowość odwrotności kosinusa nie gra roli, gdyż otrzymana funkcja ρ ma taki sam okres jak zmienna kątowa na okręgu.

$$f_{\alpha l}(\phi) = \frac{e^{il(\phi-\alpha)}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi-\alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \quad (4.3.29)$$

Oznaczmy $\frac{\hbar}{2r^2} =: \sigma^2$, gdzie σ jest bezwymiarowym parametrem dyspersji w zmiennej położeniowej. Jest to parametr opisujący w pewien (sprecyzowany dalej w podrozdziale 4.3.9) sposób dyspersję stanu, lecz nie ma prostej interpretacji jako odchylenie standardowe ani jako wariancja położenia, ani jako ich prosta funkcja.

4.3.6 Równoważność przedstawionych konstrukcji stanów koherentnych na okręgu

Stany koherentne otrzymane czterema drogami:

1. Przez sumowanie okresowe stanu $|00\rangle$ na prostej i przesuwanie wyniku operatorem $\widehat{D}(\alpha, l)$
2. Przez sumowanie okresowe stanów $|\bar{x}\bar{p}\rangle$ na prostej
3. Jako przedłużenie analityczne jądra ciepłego na okręgu
4. Metodą [16] (*vide* początek podrozdz. 4.3)

są identyczne (ewentualnie z dokładnością do globalnej stałej fazy). Będą nazywane stanami koherentnymi typu jądro ciepłe (*heat kernel coherent states*, HKCS).

Należy podkreślić, że metodami 1, 2 i 3 obliczenia przeprowadzono tu i wyniki przedstawiono dla dowolnej szerokości stanów charakteryzowanej parametrem $\sigma^2 = s^2/2 = \hbar/2r^2$ ²⁸.

Stany antyokresowe uzyskano tu metodami 1 i 2 i porównano je ze stanami antyokresowymi otrzymanymi metodą 4. Są zgodne z tym, że w [16] ograniczono się do przypadku z $\sigma^2 = \hbar/2r^2$, czyli $s^2 = \hbar/r^2$.

Autorowi nie jest znany sposób na wprowadzenie stanów antyokresowych wyłącznie poprzez jądra ciepłe (bez przesuwania stanów w dziedzinie pędowej), ale niewykluczone, że sposobu takiego dostarczą dalsze badania.

Odmienne, nierównoważne podejścia do problemu stanów koherentnych na okręgu krótko omówiono w podrozdziale 4.3.7.

4.3.7 Alternatywne propozycje stanów koherentnych na okręgu

W literaturze przedmiotu obecne są też odmienne propozycje stanów koherentnych na okręgu. W szczególności warto wspomnieć podejścia

- Bluhma, Kostecký'ego i Tudose (BKT) [30] – gdzie stany koherentne zdefiniowano jako stany minimalizujące specjalnie wybraną relację nieoznaczoności na płaszczyźnie $\sigma_j \sigma_{\sin \phi} \geq \frac{1}{2} |\langle \cos \phi \rangle|$, przesunięte następnie wzdłuż okręgu o α .

²⁸ Wskazanie za razem parametru dyspersji funkcji falowej s i parametru dyspersji gęstości prawdopodobieństwa σ (odnoszących się wprost do rozkładu na prostej, jeszcze „nie-nawiniętego”) pomaga uniknąć pomylenia jednego z drugim.

- Chadzitaskosa, Lufta i Tolara (CLT) [31] – polegające na obcięciu gaussowskiej funkcji stanu podstawowego na prostej do przedziału $[-\pi, +\pi]$, „sklejeniu” jego końców i wygenerowaniu pozostałych stanów operatorem przesunięcia.

Obydwa zostały omówione w [6] i porównane w szczególności pod względem właściwości ich funkcji Wignera. Jeśli za wskaźnik „klasyczności” stanów wziąć rozmiar tej części przestrzeni fazowej, na której $W < 0$, propozycje BKT i CLT okazują się mniej „klasycznymi” niż HKCS. Tutaj autor pozwoli sobie wspomnieć, co w jego opinii jest słabą stroną propozycji BKT i CLT w porównaniu z HKCS z bardziej fundamentalnego punktu widzenia.

Stany BKT minimalizują zasadę nieoznaczoności nie tyle dotyczącą kątów ϕ , co ich rzutów na osie układu współrzędnych na płaszczyźnie, w której zanurzony jest okrąg. Tymczasem okrąg powinien być traktowany jako samodzielna rozmaitość bez odniesienia do przestrzeni zanurzenia. Funkcja falowa $f_{\alpha s}^{BKT}(\phi) = e^{i\ell(\phi-\alpha)} e^{s \cos(\phi-\alpha)} / \sqrt{I_0(2s)}$, gdzie s jest parametrem dyspersji w momentach pędu, czyli jedną z postaci parametru ścieśnienia (*squeezing*), nie bez powodu przypomina rozkład von Misesa. Rozkład ten jest jedną z prób znalezienia odpowiednika rozkładu normalnego na okręgu. W istocie maksymalizuje on entropię informacyjną (podobnie jak czynił to rozkład Gaussa na prostej) wśród wszystkich rozkładów na okręgu o danej średniej zewnętrznej i danej „wariancji cyrkularnej”²⁹. Rzecz w tym, że obydwie te miary są zdefiniowane na płaszczyźnie, nie zaś na samej rozmaitości okręgu. Jeśli zastąpimy je miarami wewnętrznymi, rozkładem o maksymalnej entropii i prawdziwym odpowiednikiem rozkładu normalnego będzie rozkład *theta* (nawinięty rozkład normalny, *wrapped normal distribution*). Ogólniej, w każdej przestrzeni jednorodnej odpowiednikiem gęstości rozkładu normalnego jest odpowiednie jądro ciepłne.

W przypadku stanów CLT zastrzeżenia budzi samo obcięcie dziedziny funkcji Gaussa i sklejenie końców przedziału. Otrzymana funkcja na okręgu nie jest różniczkowalna na antypodach punktu skupienia (w $[\alpha \pm \pi]_{(-\pi, +\pi)}$). Wady tej nie ma funkcja gaussowska nawinięta na okrąg jak w podejściu wybranym w niniejszej pracy.

4.3.8 Podstawowe właściwości stanów koherentnych na okręgu

4.3.8.1 Kwadrat modułu

W przypadku standardowych stanów koherentnych zarówno moduł funkcji falowej, jak i jego kwadrat (gęstość prawdopodobieństwa) wyraża się funkcją gaussowską. Na okręgu, kwadrat modułu funkcji falowej ma już nieco inną postać od samej funkcji (w module). Wynika to z definicji funkcji *theta*.

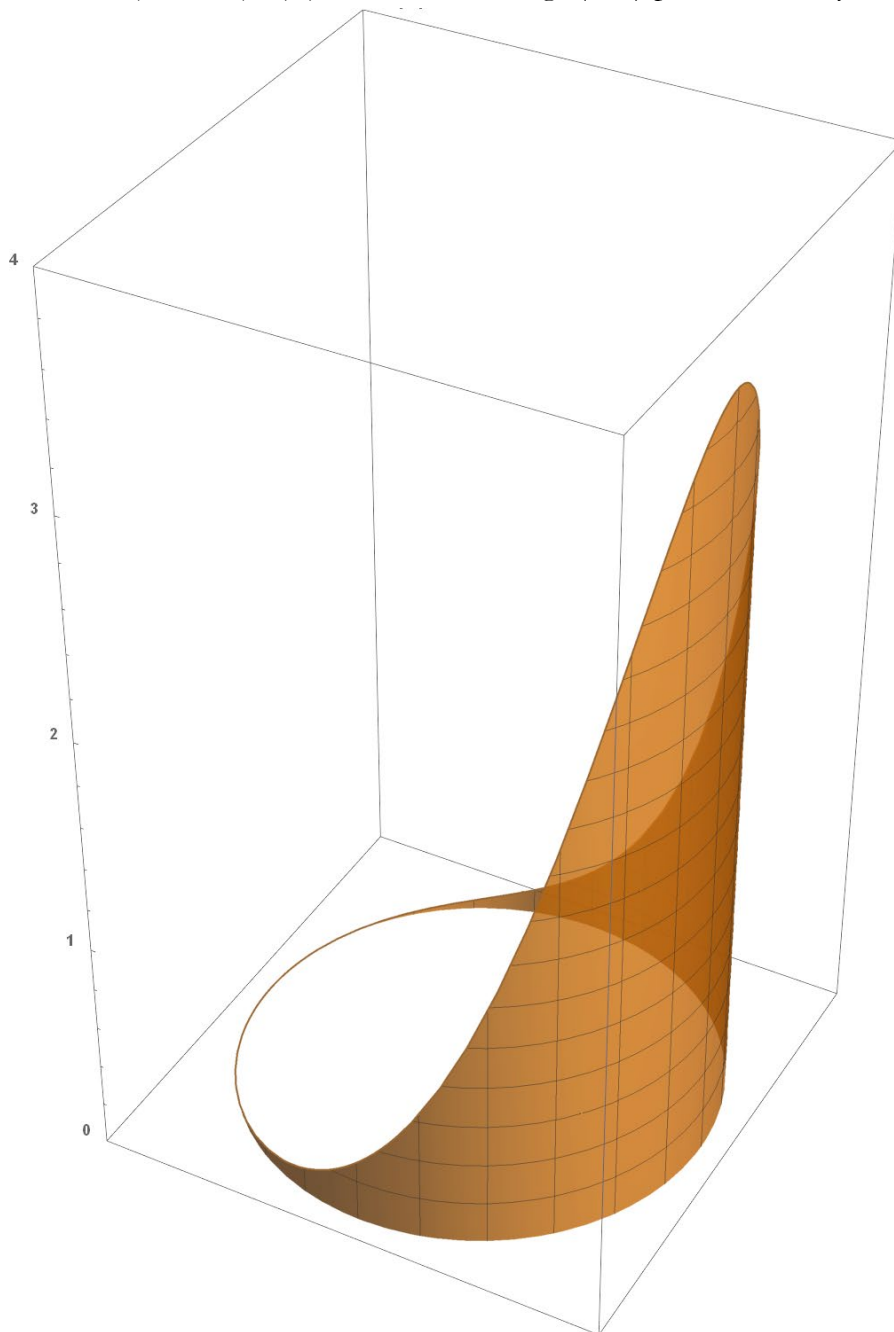
$$\begin{aligned} |f(\phi)|^2 &= \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)^2 = \\ &= \theta_3\left(\phi - \alpha, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) + k\left(\frac{\hbar}{r^2}\right) \theta_2\left(\phi - \alpha, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

gdzie $k(x) = \frac{\theta_2(0, e^{-x})}{\theta_3(0, e^{-x})}$.

²⁹ Używane tu terminy circular mean i circular variance są mylące, gdyż nie są miarami określonymi na samej rozmaitości okręgu.

Kwadrat modułu funkcji falowej w reprezentacji położeniowej stanu koherentnego $|\alpha, l\rangle$ nie zależy od momentu pędu l parametryzującego stan. Dotyczy to stanów w chwili $t = 0$ lub stanów w obrazie Heisenberga. Gęstość prawdopodobieństwa w stanach w obrazie Schrödingera ewoluujących w czasie oczywiście zależy od l .

Kwadrat modułu funkcji falowej $f(\phi)$ stanu koherentnego $|\alpha, l\rangle$ przedstawia Wykres 1.



Wykres 1 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanie koherentnym na okręgu zilustrowana jako wysokość nad okręgiem

4.3.8.2 Rozkład jedności

Stany koherentne na okręgu tworzą układ nadzupelny. Jest to bezpośrednią konsekwencją istnienia rozkładu jedności w bazie tych stanów i ich nieortogonalności.

Stan koherentny ma w reprezentacji położeniowej postać $|\alpha, l\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi f_{\alpha l}(\phi)|\phi\rangle$

$$f_{\alpha l}(\phi) = \frac{e^{-\frac{i l \alpha}{2}} e^{i l \phi}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \quad (4.3.31)$$

Niech $|\psi\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \psi(\phi)|\phi\rangle$ będzie dowolnym stanem. Jego rzut na stan koherentny wynosi

$$\begin{aligned} \langle \alpha, l | \psi \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f_{\alpha l}(\phi)^* \psi(\phi) = \\ &= \frac{e^{\frac{i l \alpha}{2}}}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-i l \phi} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \psi(\phi) \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Oznaczmy

$$A = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} |\alpha, l\rangle \langle \alpha, l|$$

Istotnie,

$$\begin{aligned} A|\psi\rangle &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f_{\alpha l}(\phi)|\phi\rangle \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} f_{\alpha l}(\phi')^* \psi(\phi') = \\ &= \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) |\phi\rangle \sum_l e^{i l \phi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-i l \phi'} \theta_3\left(\frac{\phi' - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \psi(\phi') = \\ &= \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)^2 \psi(\phi)|\phi\rangle = \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \psi(\phi)|\phi\rangle = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \psi(\phi)|\phi\rangle = |\psi\rangle \end{aligned}$$

Zatem

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} |\alpha, l\rangle \langle \alpha, l| = \hat{I} \quad (4.3.33)$$

4.3.8.3 Przekrywanie się stanów, jądro reprodukujące

Stany koherentne na okręgu nie są ortogonalne.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, l | \beta, k \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f_{\alpha l}(\phi)^* f_{\beta k}(\phi) = \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(k-l)\phi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{+\infty} e^{-\frac{(n^2+m^2)\hbar}{2r^2}} e^{-i(n\alpha+m\beta)} e^{i(n+m)\phi} = \\ &= \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \sum_{n,m} e^{-\frac{(n^2+m^2)\hbar}{2r^2}} e^{-i(n\alpha+m\beta)} \text{sinc}(\pi(n+m+(k-l))) = \\ \langle \alpha, l | \beta, k \rangle &= \frac{e^{-\frac{(k-l)^2\hbar}{2r^2}} e^{i(k-l)\beta}}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \theta_3\left(\frac{(\beta - \alpha) + i(k-l)\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

Inaczej:

$$\langle \alpha, l | \beta, k \rangle = \frac{e^{-\frac{(k-l)^2\hbar}{2r^2}} e^{i(k-l)\alpha}}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \theta_3\left(\frac{(\beta - \alpha) - i(k-l)\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) \quad (4.3.35)$$

Nieco dłuższe rachunki dają wersję symetryczną na α i β .

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, l | \beta, k \rangle &= \\
&= \frac{e^{-\frac{(l^2+k^2)\hbar}{2r^2}} e^{i(l\beta-k\alpha)}}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \theta_3\left(\frac{(\beta-\alpha) + i(k+l)\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) = \\
&= \frac{e^{-\frac{(l-k)^2\hbar}{4r^2}} e^{\frac{i}{2}(k+l)(\beta-\alpha)}}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \times \begin{cases} \theta_3\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) & k+l = 2n \\ \theta_2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) & k+l = 2n-1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

$n \in \mathbb{Z}$

Funkcja $\langle \alpha, l | \beta, k \rangle$ pełni rolę jądra reprodukującego.

4.3.8.4 Stan koherentny w reprezentacji pędowej

Przez reprezentację pędową należy rozumieć tu bazę rozpiętą przez stany własne operatora momentu pędu jak w podrozdziale 4.1.5.

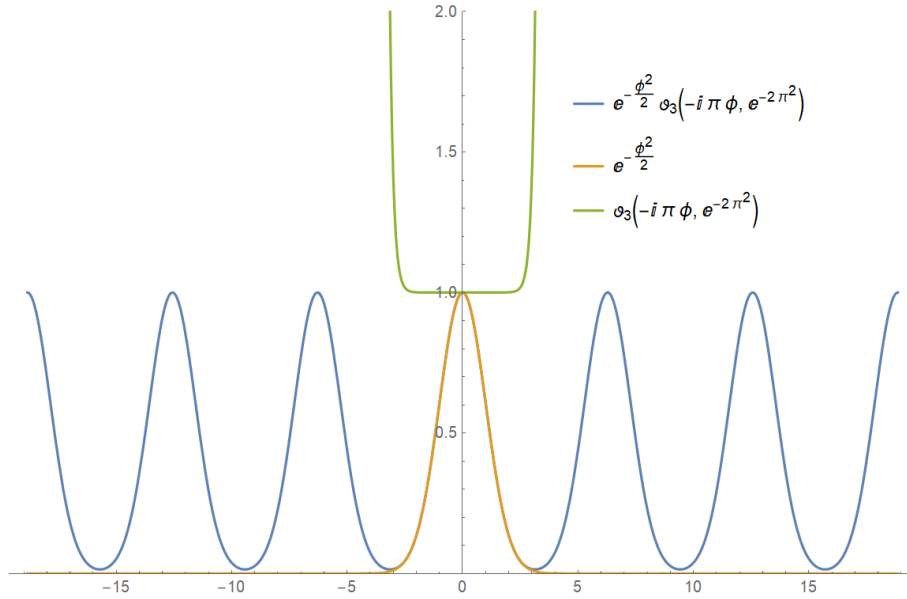
$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{\alpha l}(j) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-ij\phi} f_{\alpha l}(\phi) = \\
&= \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\hbar}{2r^2}} e^{-in\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{i(l+n-j)\phi} = \\
&= \frac{e^{-\frac{i}{2}l\alpha}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \sum_n e^{-\frac{n^2\hbar}{2r^2}} e^{-in\alpha} \text{sinc}(\pi(l+n-j)) = \\
&= \frac{e^{\frac{i}{2}l\alpha}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} e^{-\frac{(j-l)^2\hbar}{2r^2}} e^{-ija}
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}_{\alpha l}(j)|^2 = 1$$

4.3.8.5 Alternatywna postać wzoru

Pewien wgląd w naturę funkcji falowej stanu koherentnego daje rozdzielanie jej na część gaussowską dominującą w otoczeniu centrum rozkładu i pozostałą część istotną bliżej antypodów.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{\phi^2}{2}} \theta_3(i\phi\pi, e^{-2\pi^2}) \tag{4.3.38}$$



Wykres 2 – Rozkład funkcji theta na część gaussowską dominującą w otoczeniu centrum rozkładu i pozostałą część istotną bliżej antypodów

4.3.9 Własności statystyczne stanów koherentnych na okręgu

Własności statystyczne stanów koherentnych na okręgu zostaną przeanalizowane konsekwentnie w ramach statystyki zmiennych o topologii okręgu (*vide* podrozdz. 4.2). Na potrzeby określenia wielkości statystycznych, funkcja falowa stanu koherentnego zostanie zapisana z parametrem dyspersji $\sigma^2 = \hbar/2r^2$ wyrażonym jawnie.

$$f_{\alpha l}(\phi) = \frac{e^{-i\frac{l\alpha}{2}} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\sigma^2}\right) \quad (4.3.39)$$

Parametr ten odpowiada wariancji położenia w stanie koherentnym na prostej (gaussowskim)³⁰, który w wyniku sumowania okresowego daje dany stan koherentny na okręgu (por. podrozdz. 4.3.1).

4.3.9.1 Średnia

Średnia (wewnętrzna) położenia na okręgu znajdowana jest poprzez minimalizację funkcji Fréchet’a.

$$\mathcal{V}(\phi') = \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \psi^2 \theta_3\left(\frac{\psi + \phi' - \alpha}{2}, e^{-\sigma^2}\right)^2 \quad (4.3.40)$$

$$\bar{\phi} = \arg \min_{\phi'} \mathcal{V}(\phi') = \alpha \quad (4.3.41)$$

Natomiast średni moment pędu może być obliczony w ramach statystyki zmiennych euklidesowych lub odczytany z postaci funkcji falowej w reprezentacji pędowej (4.3.37). (Łatwo sprawdzić, że też minimalizuje funkcję Fréchet’a, jak na wartość oczekiwaną przystało.)

$$\bar{j} = l \quad (4.3.42)$$

30 Odczytanej rzecz jasna z funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

4.3.9.2 Dyspersja

σ^2 jest parametrem dyspersji w tym sensie, że wariancja ϕ zależy od niego ściśle rosnąco oraz dla małych wartości $V_\phi \sim \sigma^2$. Nie jest on jednak miarą wariancji na okręgu.

Aby $d(\phi, \bar{\phi})^2$ wyrażał się prosto $(\phi - \bar{\phi})^2$, kąty ϕ muszą należeć do przedziału $[\bar{\phi} - \pi, \bar{\phi} + \pi]$ (por. Uwaga 1 w podrozdz. 4.1.1.1), co można wyegzekwować adekwatnie wybierając granice całkowania.

$$\begin{aligned} V_\phi &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} ([\phi - \bar{\phi}]_{(-\pi, +\pi)})^2 \rho(\phi) = \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} (\phi - \bar{\phi})^2 \rho(\phi) = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \phi'^2 \rho(\phi' + \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Dla wariancji momentu pędu zaś obowiązuje wzór standardowy, gdyż wybór miejsca rozcięcia okręgu nie gra roli.

$$V_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (j - \bar{j})^2 p(j) = \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} j'^2 p(j' + \bar{j}) \quad (4.3.44)$$

Wariancja położenia:

$$\begin{aligned} V_\phi &= \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \phi^2 \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha + \alpha}{2}, e^{-\sigma^2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \phi^2 \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\sigma^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

Autorowi nie jest znana postać analityczna wyniku tego całkowania.

Analogicznie, wariancja momentu pędu:

$$\begin{aligned} V_j &= \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (j - l)^2 e^{-(j-l)^2 2\sigma^2} = \\ &= \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^2 e^{-j^2 2\sigma^2} \end{aligned} \quad {}^{31} (4.3.46)$$

Choć wariancja w zmiennej pędowej obliczana jest w standardowy sposób, łatwo sprawdzić, że również jest wartością funkcji Fréchet'a obliczaną dla argumentu równego wartości średniej.

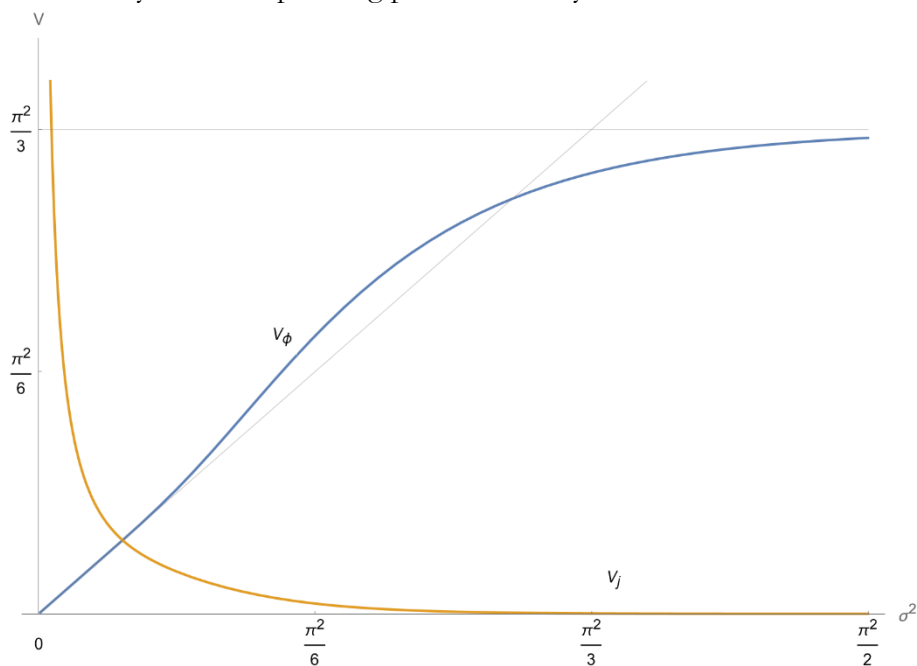
Zachowanie funkcji (4.3.45) i (4.3.46) w przypadkach granicznych zestawiono w tabeli 1.

31 Suma ta daje się przekształcić z użyciem tożsamości dot. funkcji theta tak że $V_j = e^{-2\sigma^2} \theta_3^{(0,1)}(0, e^{-2\sigma^2}) / \theta_3(0, e^{-2\sigma^2}) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma^2} \ln \theta_3(0, e^{-2\sigma^2})$ lecz postaci te nie są bardzo pomocne.

Tabela 1 – Asymptotyka wariancji położenia kąowego i momentu pędu w stanach koherentnych na okręgu w zależności od parametru dyspersji

	Rozkład jednopunktowy („typu delta”) $\sigma^2 \rightarrow 0$	Rozkład jednostajny $\sigma^2 \rightarrow \infty$
$V_\phi(\sigma^2)$	0	$\pi^2/3$ (maksimum)
$\frac{dV_\phi(\sigma^2)}{d\sigma^2}$	1	0
$V_\phi(\sigma^2)/\sigma^2$	1	0
$\frac{d}{d\sigma^2} \left(\frac{V_\phi(\sigma^2)}{\sigma^2} \right)$	0	0
$V_j(\sigma^2)$	∞	0
$\frac{dV_j(\sigma^2)}{d\sigma^2}$	1	0
$V_j(\sigma^2) \cdot \sigma^2$	$1/4$	0
$\frac{d}{d\sigma^2} (V_j(\sigma^2) \cdot \sigma^2)$	0	0
$V_j(\sigma^2) \cdot V_\phi(\sigma^2)$	$1/4$	0
$\frac{d}{d\sigma^2} (V_j(\sigma^2) \cdot V_\phi(\sigma^2))$	0	0

Wobec braku analitycznej postaci całki i sumy (4.3.45) i (4.3.46), zachowanie tych funkcji można przeanalizować numerycznie. Ich przebieg przedstawia Wykres 3.

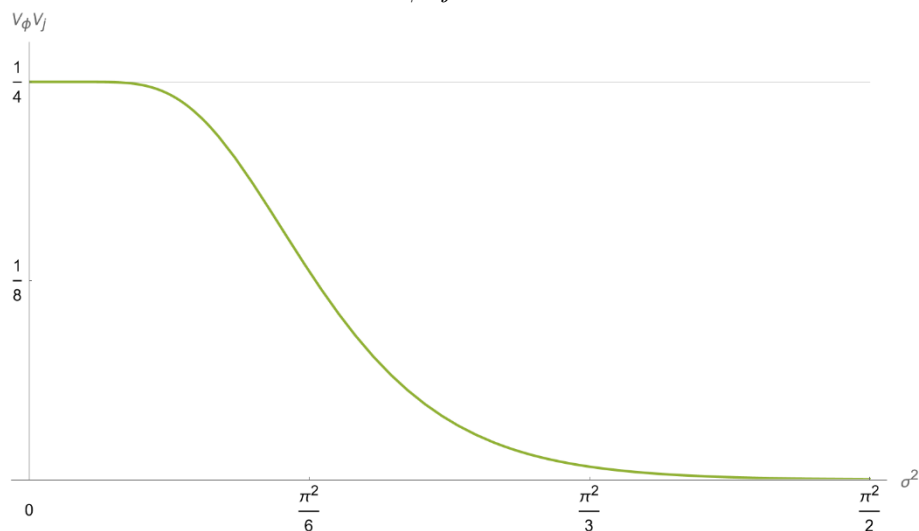


Wykres 3 – Wariancja położenia kąowego i momentu pędu w stanie koherentnym na okręgu w zależności od parametru dyspersji

Wariancja położenia kąowego dla rozkładów silnie skupionych jest równa σ^2 , następnie rośnie nawet nieco szybciej niż σ^2 , by dalej zwolnić wzrost i dla dużych σ^2 dążyć asymptotycznie do ograniczenia górnego, które odpowiada wariancji rozkładu jednostajnego na okręgu.

4.3.9.3 Nieoznaczoność kąta i momentu pędu

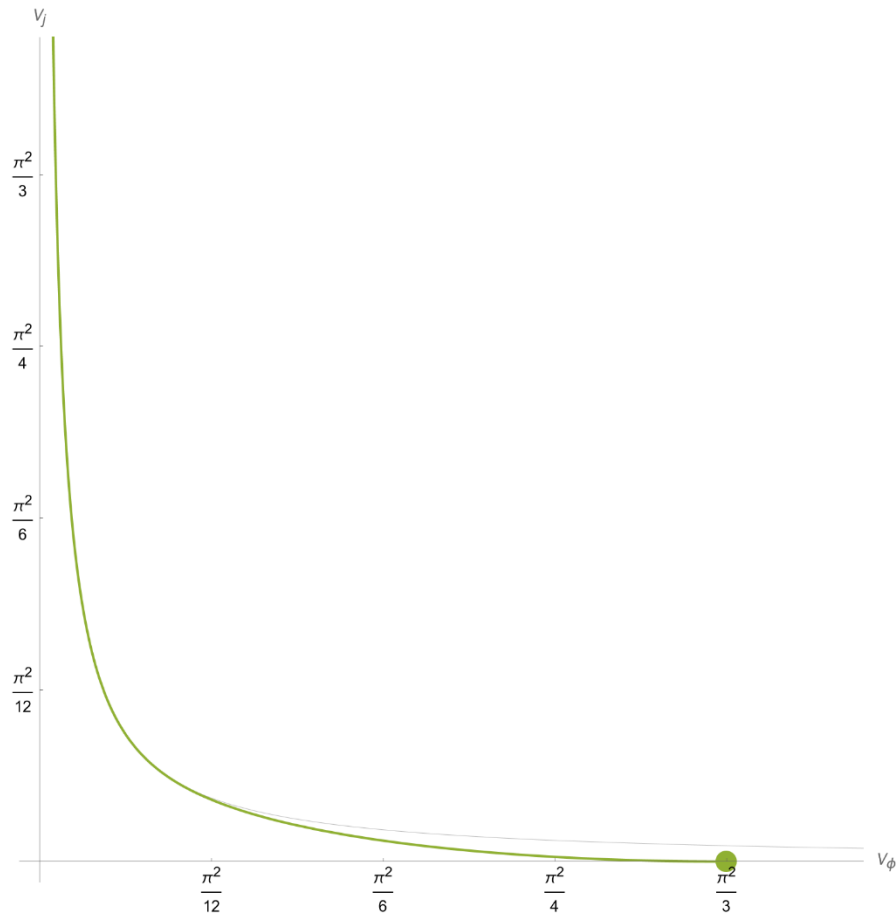
Ponieważ wariancja kąta jest ograniczona, a wariancja momentu pędu może być dowolnie bliska zeru, coś ciekawego dzieje się z iloczynem $V_\phi V_j$.



Wykres 4 – Iloczyn wariancji położenia kąowego i momentu pędu w stanie koherentnym na okręgu w zależności od parametru dyspersji

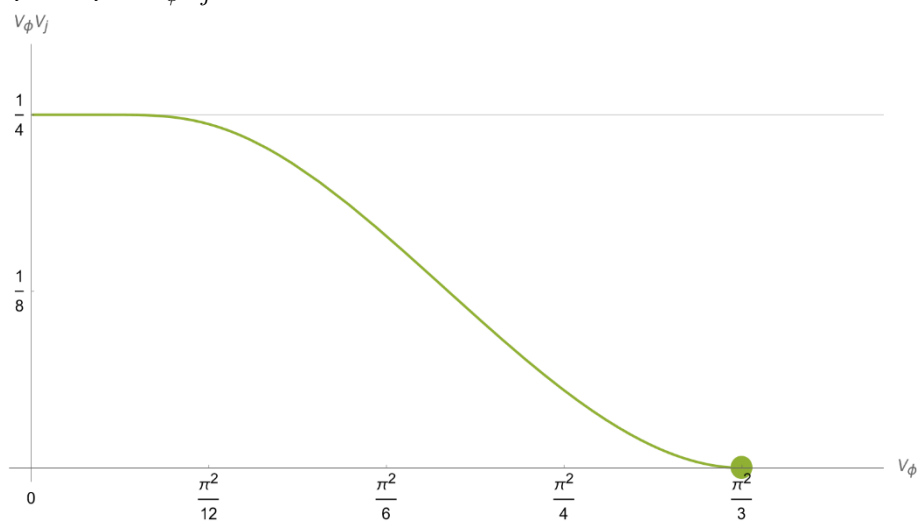
Iloczyn wariancji kąta i momentu pędu w stanie koherentnym na okręgu dla stanów względnie skupionych w przestrzeni wynosi $1/4$ – jak dla stanów koherentnych na prostej (które są tam stanami o minimalnej nieoznaczoności). W miarę jednak zwiększania dyspersji (odmierzonej parametrem dyspersji σ^2), iloczyn $V_\phi V_j$ spada, dążąc asymptotycznie do 0.

Wzajemna zależność V_ϕ i V_j w stanach koherentnych na okręgu została przedstawiona na następujących wykresach. Widzimy, że nie zachodzi nierówność analogiczna do $V_x V_p \geq 1/4$.



Wykres 5 – Wzajemna zależność wariancji położenia kąowego i momentu pędu w stanach koherentnych na okręgu

Gdy wariancja kąta osiąga swoje maksimum, które wynosi $\pi^2/3$ (i jest osiągane, gdy rozkład prawdopodobieństwa przechodzi w rozkład jednostajny), wariancja momentu pędu spada do 0. To samo dotyczy iloczynu $V_\phi V_j$.



Wykres 6 - Iloczyn wariancji położenia kąowego i momentu pędu w stanach koherentnych na okręgu w zależności od wariancji położenia

Między zmiennymi ϕ i j kanoniczny związek komutacyjny w ogólności nie zachodzi. $\widehat{J}\widehat{\Theta}f - \widehat{\Theta}\widehat{J}f = if$ zachodzi jednak dla $f \in \text{Dom}(\widehat{J}\widehat{\Theta}) \cap \text{Dom}(\widehat{\Theta}\widehat{J})$, który to zbiór okazuje się być gęsty w przestrzeni Hilberta, co uzasadnia heurystyczną regułę " $[\widehat{\Theta}, \widehat{J}] = i$ ". Należy ją jednak rozumieć następująco: Jeśli $\widehat{J}\widehat{\Theta}f$ i $\widehat{\Theta}\widehat{J}f$ są dobrze określone, to $\widehat{J}\widehat{\Theta}f - \widehat{\Theta}\widehat{J}f = if$.

Stan $\widehat{\Theta}f(\phi) = \phi f(\phi)$ nie spełnia okresowych warunków brzegowych wymaganych przez operator \widehat{J} . ([26] podrozdz. 12.2, s. 245).

Znane są próby pokonania trudności w formułowaniu zasady nieoznaczoności na okręgu związanych z okresowością funkcji w dziedzinach operatorów polegające na zastąpieniu $\widehat{\Theta}$ operatorem $\widehat{e^{ia\Theta}}$, który działa na $f(\phi)$ mnożąc ją przez $e^{ia\phi}$, co nie psuje okresowości. ([26], s. 248-285: tw.12.8, przykł. 12.5.7, 14.5.) Ściśle rzecz biorąc, próby te wymagają, aby zachodziła wykładnicza relacja komutacyjna (relacja Weyla), która dla operatorów $\widehat{\Theta}$, \widehat{J} w ogólności nie zachodzi. [19] podaje dla okręgu relację Weyla postaci $e^{-i\widehat{J}}e^{i\widehat{\Theta}}e^{i\widehat{J}}e^{-i\widehat{\Theta}} = e^{-i}$. Jest to szczególny przypadek wymaganej wykładniczej relacji komutacyjnej $e^{-ia\widehat{J}}e^{ib\widehat{\Theta}}e^{ia\widehat{J}}e^{-ib\widehat{\Theta}} = e^{-iab\hbar}$, która nie zachodzi dla $b \notin \mathbb{Z}$.

4.3.9.4 Własności statystyczne stanów koherentnych na okręgu w metryce płaszczyziny

Jakkolwiek to średnia wewnętrzna jest najbardziej naturalna dla rozkładów prawdopodobieństwa na okręgu, ze względu na symetrię gęstości stanów koherentnych (dla $t = 0$) w przestrzeni położeniowej wokół ich centrum, rzut środka masy rozkładu na płaszczyźnie zrzutowany prostopadle na okrąg wskazuje ten sam punkt, w którym leży średnia wewnętrzna.

$$\bar{\phi} \equiv IM_{\phi} = EM_{\phi} \quad (4.3.47)$$

Warunek ten nie jest spełniony dla stanów ewoluujących w czasie.

Średnią zewnętrzną położenia w stanie koherentnym na okręgu pośrednio obliczono w [16], gdzie wynik

$$\langle \widehat{e^{i\phi}} \rangle_f = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\theta_2(0, e^{-1})}{\theta_3(0, e^{-1})} e^{i\alpha} \quad \text{32 korygowano przy użyciu ilorazów postaci}$$

$$\langle \langle \widehat{e^{i\phi}} \rangle \rangle_f := \langle \widehat{e^{i\phi}} \rangle_f / \langle \widehat{e^{i\phi}} \rangle_{f_{00}} \quad \text{dla } f_{00} = \theta_3(0, e^{-\frac{1}{2}}).$$

Procedura ta to nic innego jak rzutowanie na okrąg.

4.3.9.5 Wartości oczekiwane operatorów

W podrozdziałach 4.3.9.1 i 4.3.9.2 wartości oczekiwane ϕ i j oraz ich wariancje obliczono w oparciu o kwadrat modułu funkcji falowej w reprezentacji położeniowej lub pędowej, czyli, odpowiednio, gęstość prawdopodobieństwa i prawdopodobieństwo tego, że stan charakteryzuje się danym położeniem kątowym lub, odpowiednio, momentem pędu. W tym podrozdziale obliczymy wartości oczekiwane wybranych operatorów.

Średnie $\langle \widehat{J} \rangle$ i $\langle \widehat{J}^2 \rangle$ obliczane są standardowo, najprościej w reprezentacji pędowej

32 W cytowanej pracy posługiwano się wzorem i przybliżeniem $\langle \widehat{e^{i\phi}} \rangle_f = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\theta_2(il, e^{-1})}{\theta_3(il, e^{-1})} e^{i\phi} \approx e^{-\frac{1}{4}} e^{i\phi}$.

$$\langle \hat{J} \rangle = \langle \alpha, l | \hat{J} | \alpha, l \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j |\tilde{f}_{\alpha l}(j)|^2 = l \quad (4.3.48)$$

$$\langle \hat{J}^2 \rangle = \langle \alpha, l | \hat{J}^2 | \alpha, l \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^2 |\tilde{f}_{\alpha l}(j)|^2 = \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j^2 e^{-(j-l)^2 2\sigma^2} \quad (4.3.49)$$

przy czym ta ostatnia suma nie przyjmuje prostej postaci. Sprawdzenie numeryczne pokazuje, że różnica $\langle \hat{J}^2 \rangle - \langle \hat{J} \rangle^2$ jest równa wariancji V_j obliczonej w podrozdziale 4.3.9.2.

Wartość oczekiwaną $\langle e^{i\hat{\Theta}} \rangle$ obliczono w reprezentacji położeniowej na okręgu

$$\langle e^{i\hat{\Theta}} \rangle = \langle \alpha, l | e^{i\hat{\Theta}} | \alpha, l \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi e^{i\phi} |f_{\alpha l}(\phi)|^2 = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\theta_2(0, e^{-2\sigma^2})}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} e^{i\alpha} \quad (4.3.50)$$

Wynik ten to nic innego jak średnia na płaszczyźnie zespolonej. Leży wewnątrz koła jednostkowego w odległości $e^{-\frac{1}{4}} \theta_2(0, e^{-2\sigma^2}) / \theta_3(0, e^{-2\sigma^2})$ od środka w kierunku α . Zatem α jest średnią zewnętrzną (*vide* podrozdz. 4.2.7.1) położenia w stanie koherentnym $|\alpha, l\rangle$ o parametrze dyspersji σ^2 .

Chcielibyśmy znaleźć średnią wewnętrzną położenia na okręgu jako wartość oczekiwaną odpowiedniego operatora położenia kąowego $\hat{\Theta}$. Niech $\hat{\Theta}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$. Standardowa metoda obliczania wartości oczekiwanych operatorów prowadzi do

$$\langle \hat{\Theta} \rangle = \langle f | \hat{\Theta} | f \rangle = \int_{\phi'-\pi}^{\phi'+\pi} d\phi \phi |f(\phi)|^2 \quad (4.3.51)$$

gdzie całkowanie odbywa się po przedziale długości 2π , a ϕ' jest dowolne. Funkcja podcałkowa nie jest jednak okresowa i wynik całkowania zależy od wyboru granic całkowania (punktu rozcięcia okręgu $\phi' \pm \pi$) a zatem i przedziału kątów ϕ . Wykorzystując swobodę jaką daje ta relacja, poszukajmy takiego jej wariantu (wartości ϕ'), w którym zgadza się ona z definicją średniej wewnętrznej. Z podrozdziału 4.2.4.1 wiemy, że wybór punktu rozcięcia okręgu na antypodach średniej wewnętrznej sprawia, że powyższa całka zwraca właśnie średnią wewnętrzną. Jak wyjaśniono w podrozdziale 4.2.4.1, średnia wewnętrzna jest jedyną wartością, która spełnia ten warunek. Zatem, zgodnie ze wzorem (4.2.9), wartość oczekiwana operatora położenia kąowego na okręgu

$$\langle f | \hat{\Theta} | f \rangle = \text{Fix}_{\phi'} \int_{\phi'-\pi}^{\phi'+\pi} d\phi \phi |f(\phi)|^2 \quad (4.3.52)$$

Symetria stanów koherentnych na okręgu wokół parametru α prowadzi do wniosku, że wartość oczekiwana operatora położenia rozumiana jako średnia wewnętrzna jest równa parametrowi położenia stanu

$$\langle \alpha, l | \hat{\Theta} | \alpha, l \rangle = \alpha \quad (4.3.53)$$

Dla ogólnych stanów $|f\rangle$ obliczenie $\langle f | \hat{\Theta} | f \rangle$ rozumianej jako średnia wewnętrzna może wymagać optymalizacji numerycznej.

Wartość oczekiwana innych operatorów działających na stany bazy położeniowej poprzez mnożenie może być obliczona wzorem standardowym, przy czym punkt rozcięcia okręgu należy wybrać na antypodach średniej wewnętrznej.

$$\langle f | \widehat{\Theta}^2 | f \rangle = \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} d\phi \phi^2 |f(\phi)|^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi (\phi + \bar{\phi})^2 |f(\phi + \bar{\phi})|^2 \quad (4.3.54)$$

W stanie koherentnym

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\Theta}^2 \rangle &= \langle \alpha, l | \widehat{\Theta}^2 | \alpha, l \rangle = \frac{1}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi (\phi + \alpha)^2 \theta_3\left(\frac{\phi}{2}, e^{-\sigma^2}\right)^2 = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi (\phi + \alpha)^2 \left(\theta_3(\phi, e^{-2\sigma^2}) + \frac{\theta_2(0, e^{-2\sigma^2})}{\theta_3(0, e^{-2\sigma^2})} \theta_2(\phi, e^{-2\sigma^2}) \right) \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Sprawdzenie numeryczne pokazuje, że różnica $\langle \widehat{\Theta}^2 \rangle - \langle \widehat{\Theta} \rangle^2$ jest równa wariancji V_ϕ obliczonej w podrozdziale 4.3.9.2.

4.3.10 Ewolucja swobodna stanów koherentnych na okręgu

Omówimy teraz swobodną ewolucję stanów koherentnych na okręgu, to jest dynamikę pod nieobecność potencjałów. Zagadnienie to dyskutowano po raz pierwszy w pracy [32].

W obrazie Schrödingera stany kwantowe ewoluują pod działaniem operatora $e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}}$. Hamiltonian swobodny ma postać $\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2r^2} \widehat{J}^2$, gdzie $\widehat{J} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ jest operatorem momentu pędu. Zatem operator ewolucji działa poprzez drugą pochodną po ϕ .

$$e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} = e^{\frac{ih}{2r^2} t \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}} \quad (4.3.56)$$

Rzecz jasna stany własne operatora energii³³ $\widehat{H}|j\rangle = E(j)|j\rangle$ nie ulegają zmianie z czasem.

$$\widehat{H}e^{ij\phi} = E(j)e^{ij\phi} = \frac{\hbar^2 j^2}{2r^2} e^{ij\phi} \quad (4.3.57)$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} e^{ij\phi} = e^{-\frac{i}{\hbar}tE(j)} e^{ij\phi} = e^{-\frac{ih}{2r^2}tj^2} e^{ij\phi} \quad (4.3.58)$$

Stan okresowy (bozonowy) ewoluuje w następujący sposób:

$$\begin{aligned} f_{\alpha l}(\phi, t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} \frac{e^{-\frac{il\alpha}{2}} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-\frac{h}{r^2}})}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{h}{2r^2}}\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} \frac{e^{-\frac{il\alpha}{2}} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-\frac{h}{r^2}})}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 h}{2r^2}} e^{in(\phi - \alpha)} = \\ &= \frac{e^{-\frac{il\alpha}{2}}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-\frac{h}{r^2}})}} \sum_n e^{-\frac{n^2 h}{2r^2}} e^{-in\alpha} e^{-\frac{i}{\hbar}t\widehat{H}} e^{i(n+l)\phi} = \frac{e^{-\frac{il\alpha}{2}}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-\frac{h}{r^2}})}} \sum_n e^{-\frac{n^2 h}{2r^2}} e^{-in\alpha} e^{-\frac{it\hbar}{2r^2}(n+l)^2} e^{i(n+l)\phi} = \\ &= \frac{e^{-\frac{il\alpha}{2}} e^{-\frac{it\hbar}{2r^2}l^2} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3(0, e^{-\frac{h}{r^2}})}} \sum_n e^{-\frac{n^2 h}{2r^2}(1+it)} e^{in(\phi - \alpha - tl\frac{h}{r^2})} \end{aligned}$$

Wreszcie

33 Ponieważ hamiltonian nie ma czlonu potencjalnego, stany własne \widehat{H} są za razem stanami własnymi \widehat{J} .

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha l}(\phi, t) &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\alpha l} e^{-\frac{i\hbar l^2}{2r^2}} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - tl\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right) = \\
 &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\alpha l} e^{\frac{\hbar}{2r^2}l^2} e^{il\alpha}}{\sqrt{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - il\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3.59}$$

Wynik ten podano w dwóch postaciach na potrzeby porównania ze standardowymi stanami koherentnymi. W przypadku tej drugiej postaci skorzystano z kwaziokresowości funkcji *theta*.

Ze wzorów wynika, że w miarę upływu czasu następuje:

- przyrost dyspersji (*vide* podrozdz. 4.3.9.2),
- jednostajny ruch po okręgu z prędkością kątową $l\hbar/r^2$,
- ewolucja fazy.

Podobne, *mutatis mutandis*, obliczenia prowadzą do następującego wzoru opisującego ewolucję stanu o uogólnionej okresowości³⁴

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha l\lambda}(\phi, t) &= \\
 &= \frac{e^{-i\alpha(\frac{l}{2}+\lambda)} e^{-it(l+\lambda)^2\frac{\hbar}{2r^2}} e^{i(l+\lambda)\phi}}{\sqrt{\theta_3\left(i\lambda, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - t(l+\lambda)\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right) = \\
 &= \frac{e^{-i\alpha(\frac{l}{2}+\lambda)} e^{(l+\lambda)^2\frac{\hbar}{2r^2}} e^{i(l+\lambda)\alpha}}{\sqrt{\theta_3\left(i\lambda, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - i(l+\lambda)\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3.60}$$

W szczególności stan antyokresowy (fermionowy) ewoluuje następująco:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha l\frac{1}{2}}(\phi, t) &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\alpha l} e^{-itl^2\frac{\hbar}{2r^2}} e^{il\phi}}{\sqrt{\theta_2\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_2\left(\frac{\phi - \alpha - tl\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right) = \\
 &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\alpha l} e^{l^2\frac{\hbar}{2r^2}} e^{il\alpha}}{\sqrt{\theta_2\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)}} \theta_2\left(\frac{\phi - \alpha - il\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3.61}$$

Standardowy wynik dla kanonicznych stanów koherentnych na prostej (2.2.4) otrzymany z wykorzystaniem rozwinięcia Fouriera funkcji falowej i działania hamiltonianu na stany własne energii ma postać

$$g_{x\bar{p}}(x, t) = \frac{e^{\frac{i\bar{x}\bar{p}}{2\hbar}} e^{-\frac{\bar{p}^2}{2\hbar}}}{\sqrt[4]{\pi\hbar}\sqrt{1+it}} e^{-\frac{(x-\bar{x}-i\bar{p})^2}{2\hbar(1+it)}} = \frac{e^{-\frac{i\bar{x}\bar{p}}{2\hbar}} e^{-it\frac{\bar{p}^2}{2\hbar}}}{\sqrt[4]{\pi\hbar}\sqrt{1+it}} e^{-\frac{(x-\bar{x}-t\bar{p})^2}{2\hbar(1+it)}} \tag{4.3.62}$$

Wynik ten podano w dwóch wersjach analogicznych do postaci, w których przedstawiono wyniki dla stanów koherentnych na okręgu. Bez trudu można zidentyfikować te same trzy efekty upływu czasu co w przypadku dynamiki na okręgu: przyrost dyspersji, ruch jednostajny i ewolucję fazy

³⁴ Użyteczność tego wzoru jest ograniczona, zważywszy, że jedynymi dozwolonymi (przynajmniej, dopóki nie dopuszczamy układów dyssypatywnych) wartościami λ są 0 i $\frac{1}{2}$.

4.3.10.1 Gęstość prawdopodobieństwa

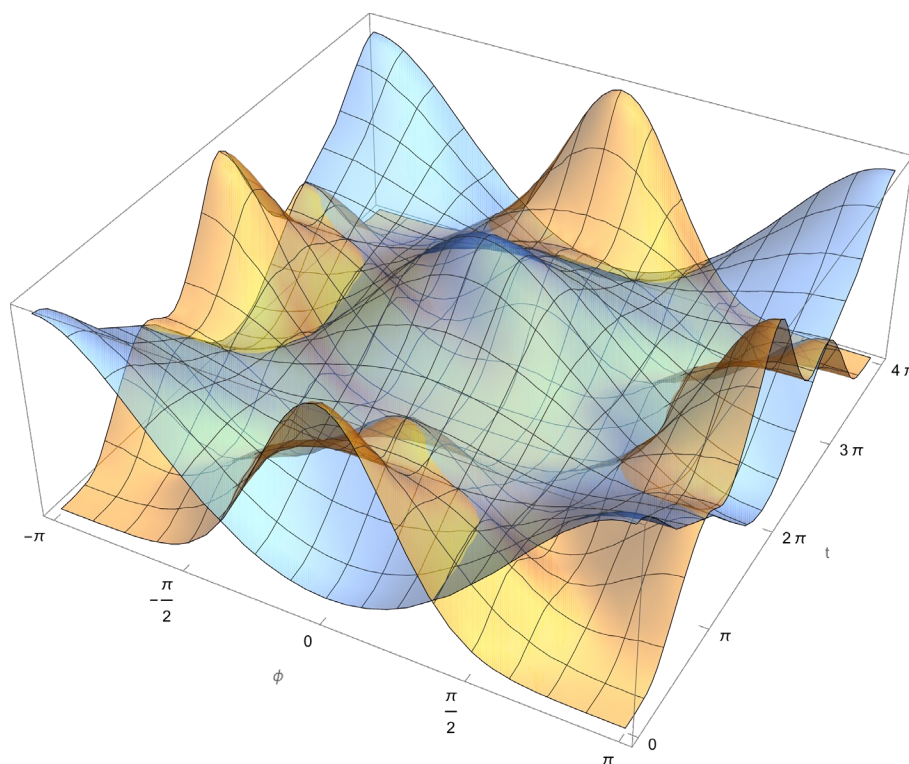
Gęstość prawdopodobieństwa ewoluuje w sposób nieco bardziej skomplikowany niż ma to miejsce na prostej. Mianowicie, na podstawie (4.3.59) otrzymujemy wzór

$$|f(\phi, t)|^2 = \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - t l \hbar / r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right) \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - t l \hbar / r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1-it)}\right) \quad (4.3.63)$$

Wyznaczamy funkcję Frécheta względem zmiennej położenia kąowego w kolejnych punktach czasu uzyskując

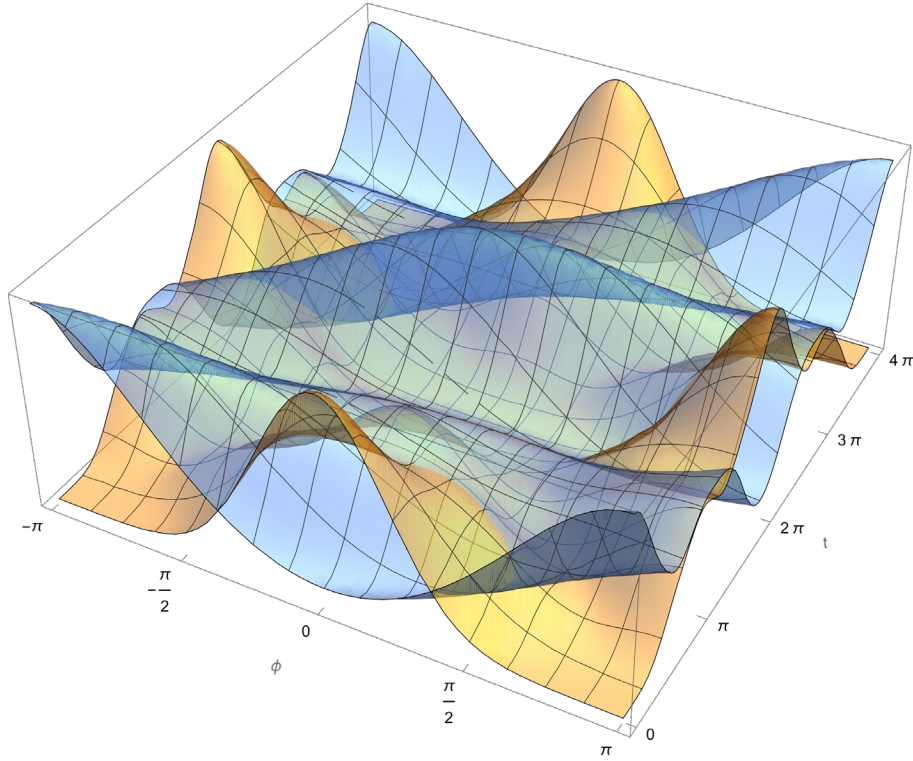
$$\mathcal{V}(\phi', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi' - \pi}^{\phi' + \pi} d\phi (\phi - \phi')^2 \rho(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \phi^2 \rho(\phi + \phi', t) \quad (4.3.64)$$

Gęstość prawdopodobieństwa stanu $|0,0\rangle_t$ jak również jego funkcję Frécheta przedstawia Wykres 7.



Wykres 7 – Gęstość prawdopodobieństwa (na pomarańczowo) oraz funkcja Frécheta (na niebiesko) stanu $|0,0\rangle$ w funkcji ϕ i t

Analogiczny wykres dla $|\alpha, 0\rangle$ otrzymujemy przez przesunięcie (cykliczne) na osi położenia kąowego $\phi \rightarrow \phi - \alpha$. Gęstość prawdopodobieństwa stanu z $l \neq 0$ i jego funkcję Frécheta przedstawia Wykres 8.



Wykres 8 - Gęstość prawdopodobieństwa (na pomarańczowo) oraz funkcja Frécheta (na niebiesko) stanu $|0,1\rangle$ w funkcji ϕ i t

Ponownie, uwzględnienie parametru α wymaga jedynie przesunięcia na osi ϕ .

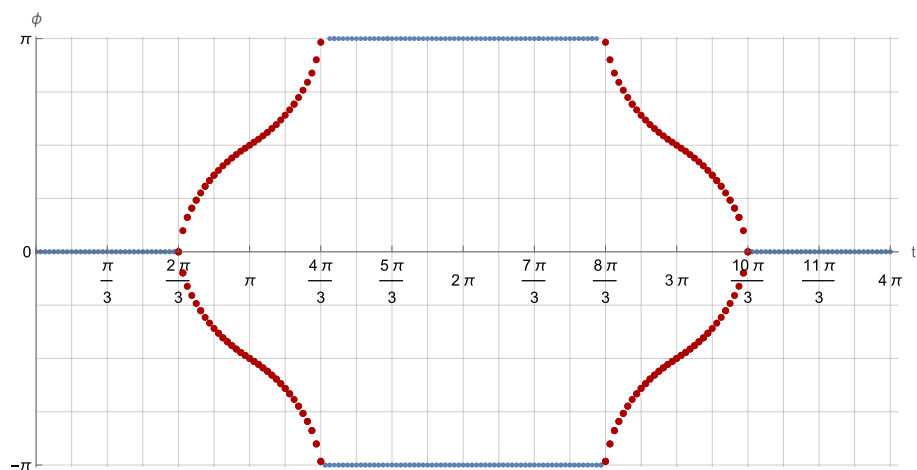
4.3.10.2 Średnia (wewnętrzna)

Minimum po ϕ funkcji Frécheta jest osiągane dla

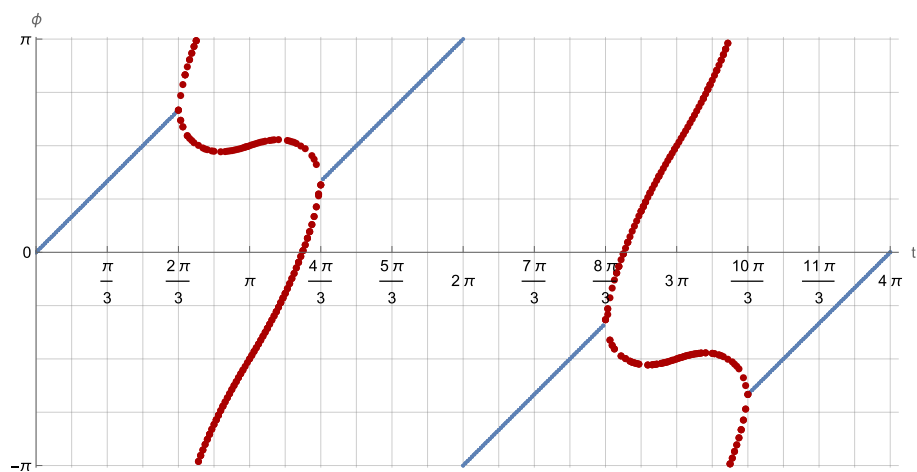
$$\bar{\phi}(t) = \begin{cases} \alpha + tl & t \in \left(-\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi, +\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \text{niejednozn.} & t \in \left(+\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi, +\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \alpha + tl \pm \pi & t \in \left(+\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi, +3\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \text{niejednozn.} & t \in \left(+3\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi, +3\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \end{cases} \quad (4.3.65)$$

$k \in \mathbb{Z}$. Obserwujemy zatem przeskoki położenia średniej. Gęstość prawdopodobieństwa zmienia się jednak w sposób ciągły. Dla $t \approx \pi + k4\pi$ i $t \approx 3\pi + k4\pi$ średnia nie jest jednoznaczna. Podobne przeskoki obserwujemy dla średniej zewnętrznej.

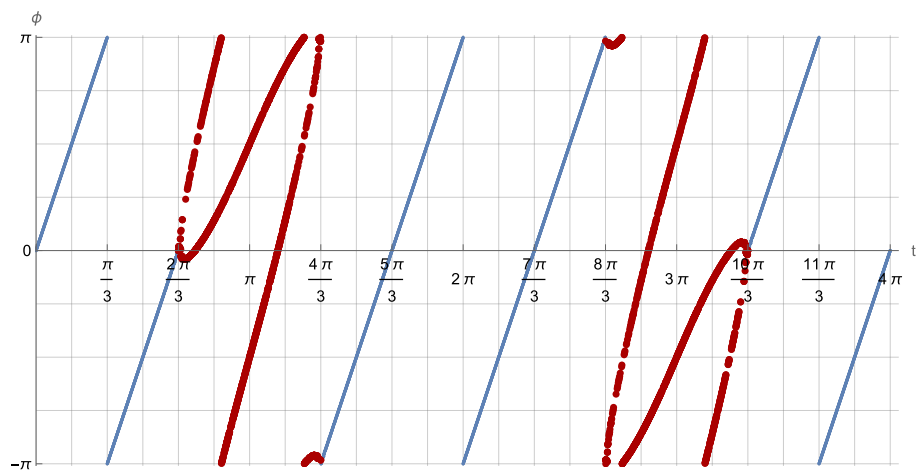
Przeskoki średniej na okręgu zostały już zaobserwowane w pracy [32] z tym, że posługiwano się tam średnią zewnętrzną i przeskoki były natychmiastowe (por. podrozdz. 4.3.10.4). Tu przeskok następuje nie tyle w jednym momencie, co jest rozciągnięty w czasie na przedział $\pm\pi/3$ wokół tych samych momentów przeskoku.



Wykres 9 – Położenie średniej (wewnętrznej) stanu koherentnego na okręgu $|0,0\rangle$ ewoluującego w czasie



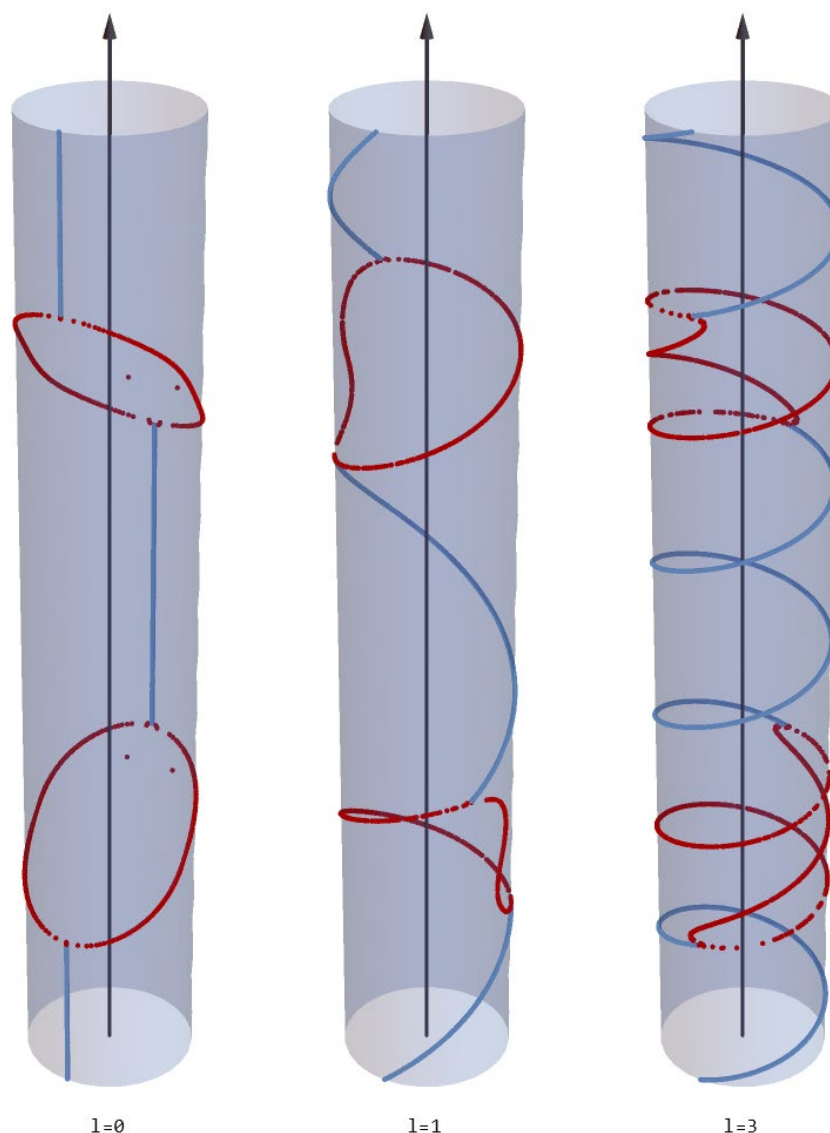
Wykres 10 – Położenie średniej (wewnętrznej) stanu koherentnego na okręgu $|0,1\rangle$ ewoluującego w czasie



Wykres 11 – Położenie średniej (wewnętrznej) stanu koherentnego na okręgu $|0,3\rangle$ ewoluującego w czasie

Kolorem bordowym oznaczono funkcję $\bar{\phi}$ w tych przedziałach czasu, gdy nie jest ona jednoznaczna.

Okresowa natura położenia kąowego (na osi pionowej) nieco komplikuje interpretację powyższych wykresów. Jeśli położenie kąowe odmierzymy wzdłuż okręgu, a czas wzdłuż tworzącej walca, to uzyskamy następujący obraz.



Wykres 12 – Położenie średniej (wewnętrznej) stanów koherentnych na okręgu $|0, l\rangle$ dla $l = 1, 3$ ewoluujących w czasie – przedstawienie uwzględniające topologię ϕ

Przeskoki dla różnych wartości l następują w otoczeniu tych samych momentów. Poza tymi przedziałami ruch średniej jest jednostajny z prędkością kątową odpowiadającą l . Przeskok też nie odbywa się na antypody a do punktu który sam z antypodów przesunął się z prędkością l w przód przez czas przeskoku $\Delta t = 2\pi/3$. Czyli jest to rozciągnięty w czasie przeskok na antypody pozostające w ruchu.

W okresach, gdy średnia jest niejednoznaczna, występuje ona za razem w 2 punktach, które poruszają się po okręgu ruchem niejednostajnym.

4.3.10.3 Wariancja

W przedziałach czasu, gdy średnia jest jednoznaczna, wariancje należy liczyć wokół tejże średniej. Tam, zaś gdzie nie jest ona jednoznaczna, nie ma znaczenia, które jej wystąpienie wybierzemy, gdyż właśnie dlatego średnia jest niejednoznaczna, że minimum funkcji Fréchet'a (wariancja) jest identyczne w różnych punktach. Rzecz w tym, że w okresach przeskoku, ruch wystąpień średniej jest niejednostajny i brakuje zwartej formuły na jej położenie. Jednocześnie jest to okres, gdy wariancja jest bliska maksymalnej.

W przypadku ewolucji standardowego stanu koherentnego, w miejscu parametru określającego szerokość funkcji falowej \hbar znajduje się $\hbar(1+it)$. Wariancja położenia standardowego stanu koherentnego (na prostej) rośnie kwadratowo z czasem, co można wprost odczytać z postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

$$|g(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar(1+t^2)}} e^{-\frac{(x-\bar{x}-t\bar{p})^2}{\hbar(1+t^2)}} \quad (4.3.66)$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\hbar}{2}(1+t^2) = \sigma_x^2(0) + \frac{\hbar^2 t^2}{4\sigma_x^2(0)^2} \quad (4.3.67)$$

W przypadku stanu koherentnego na okręgu parametr określający szerokość rozkładu ewoluuje identycznie jak dla standardowych stanów koherentnych $\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)$. Nie przekłada się to jednak na prostą postać ewolucji wariancji położenia stanu koherentnego na okręgu.

Wariancja obliczana jest na podstawie definicji (4.2.10) z wykorzystaniem gęstości prawdopodobieństwa (4.3.63) i położenia średniej (4.3.65).

$$V_\phi(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \phi^2 \rho(\phi + \bar{\phi}) =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \phi^2 \rho(\phi + \alpha + tl) & t \in \left(-\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi, +\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \text{złożona} & t \in \left(+\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi, +\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \phi^2 \rho(\phi + \alpha + tl \pm \pi) & t \in \left(+\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi, +3\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \\ \text{złożona} & t \in \left(+3\pi - \frac{\pi}{3} + k4\pi, +3\pi + \frac{\pi}{3} + k4\pi\right) \end{cases} \quad (4.3.68)$$

4.3.10.4 Średnia zewnętrzna

Przeskoki średniej obserwowane w przypadku średniej wewnętrznej mają swój odpowiednik dla średniej zewnętrznej.

$$M_x =$$

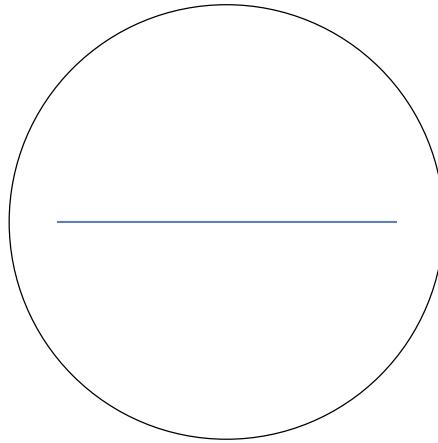
$$= \frac{1}{\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} [\cos \phi] \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - tl\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1+it)}\right) \theta_3\left(\frac{\phi - \alpha - tl\hbar/r^2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}(1-it)}\right) \quad (4.3.69)$$

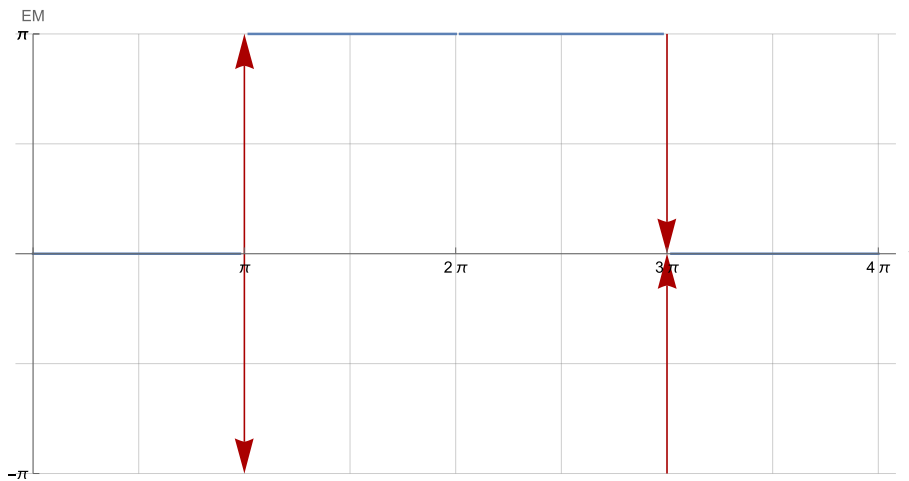
$$EM_\phi = \begin{cases} \alpha - tl & t \in (-\pi + k4\pi, +\pi + k4\pi) \\ \alpha - tl \pm \pi & t \in (+\pi + k4\pi, +3\pi + k4\pi) \end{cases} \quad (4.3.70)$$

Czyli średnia zewnętrzna zgadza się z wewnętrzną (4.3.65) tam, gdzie ta druga jest jednoznaczna.

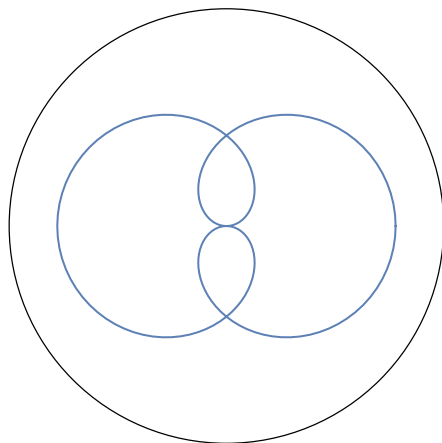
Poniżej zilustrowano ewolucję położenia średniej na płaszczyźnie oraz jej rzutu na okrąg, czyli średniej zewnętrznej. Bez straty ogólności przyjmujemy $\alpha = 0$.



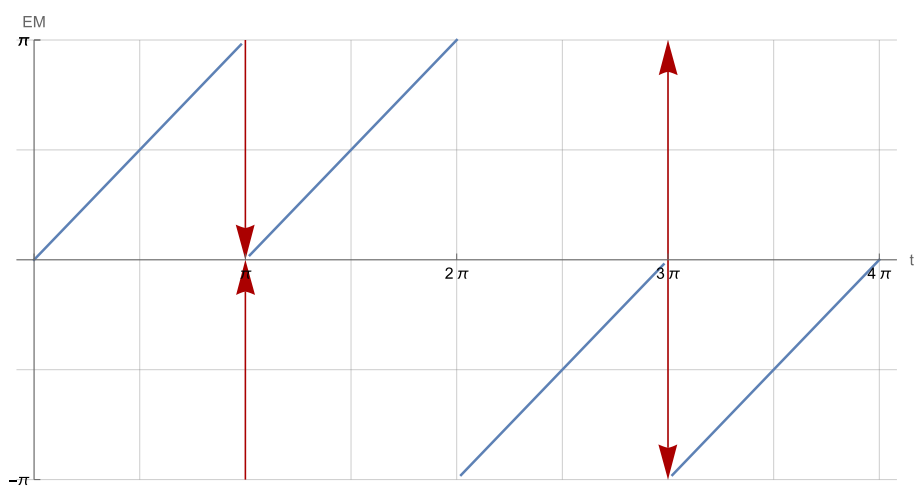
Wykres 13 – Trajektoria położenia średniej na płaszczyźnie dla stanu $|0,0\rangle$



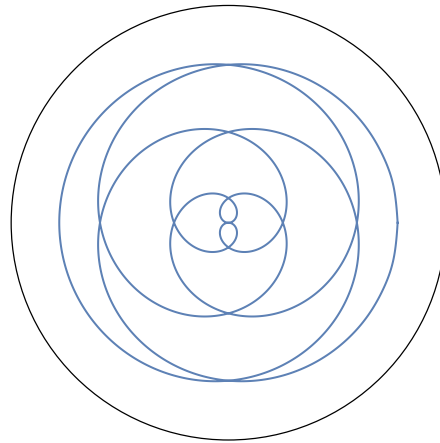
Wykres 14 – Ewolucja położenia średniej zewnętrznej na okręgu dla stanu $|0,0\rangle$. Przeskoki średniej oznaczono strzałkami.



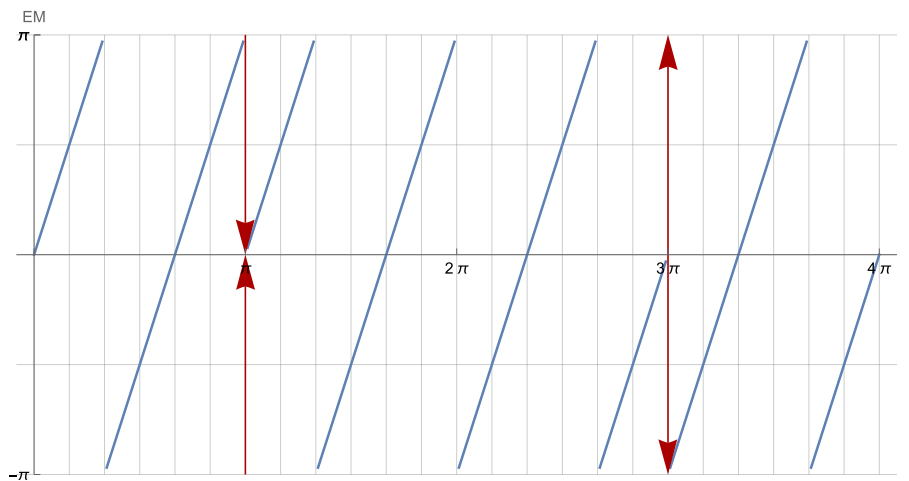
Wykres 15 – Trajektoria położenia średniej na płaszczyźnie dla stanu $|0,1\rangle$



Wykres 16 – Ewolucja położenia średniej zewnętrznej na okręgu dla stanu $|0,1\rangle$



Wykres 17 – Trajektoria położenia średniej na płaszczyźnie dla stanu $|0,3\rangle$



Wykres 18 – Ewolucja położenia średniej zewnętrznej na okręgu dla stanu $|0,3\rangle$

Bardzo zbliżone zachowanie wykazuje rotor przedstawiony w ([33], fig. 2).

Uwzględnienie niezerowego parametru α polega na przesunięciu współrzędnej położenia kątowego.

Wykresy te trzeba porównać z wykresami średniej wewnętrznej w podrozdziale 4.3.10.2. Przeskoki następują na tych samych etapach ruchu z tym, że średnia zewnętrzna przeskakuje w jednym momencie, podczas gdy średnia wewnętrzna przechodzi przez okres niejednoznaczności.

4.4 Funkcja Wignera na okręgu

Funkcja Wignera na prostej (jako przestrzeni konfiguracyjnej) ma postać

$$W(x, p) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f\left(x + \frac{x'}{2}\right)^* f\left(x - \frac{x'}{2}\right) e^{\frac{ipx'}{\hbar}}$$

Zamiana współrzędnych położenia na położenia katowe $x, x' \rightarrow \phi, \phi'$ i pędu na moment pędu $p \rightarrow j$ prowadzi do

$$W(\phi, j) := \frac{1}{\hbar} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} f\left(\phi + \frac{\phi'}{2}\right)^* f\left(\phi - \frac{\phi'}{2}\right) e^{ij\phi'} \quad (4.4.1)$$

$\phi \in S^1, j \in \mathbb{Z}$.

Oczywiście taka analogia może nie być przekonująca; istnieją jednak podejścia bardziej systematyczne.

Funkcja Wignera postaci (4.4.1) znana jest z prac [34] i [35]. Należy podkreślić, że ich autorzy otrzymali ten wynik zupełnie różnymi sposobami. Jeszcze inaczej otrzymano go w [36], nota bene przy okazji badania zagadnienia funkcji Wignera dla sfery.

4.4.1 Funkcja Wignera na okręgu poprzez transformację Weyla.

4.4.1.1 Ogólne transformacje Fouriera i dualność Pontriagina

Na mocy dualności Pontriagina ogólna transformacja Fouriera na okręgu jest identyfikowana jako współczynniki szeregu Fouriera

$$\tilde{f}(j') = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f(\phi) e^{-ij'\phi} \quad (4.4.2)$$

$j' \in \mathbb{Z}$, a transformacja odwrotna jako szereg Fouriera

$$f(\phi) = \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(j') e^{ij'\phi} \quad (4.4.3)$$

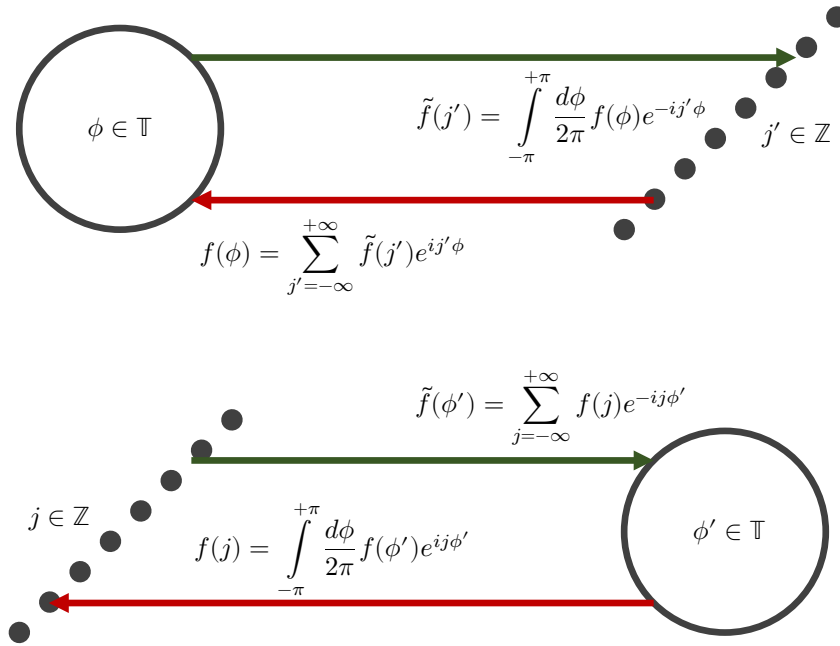
Natomiast transformacja Fouriera na dziedzinie dyskretnej (transformacja „w przód”) obliczana jest jako dyskretna w czasie transformacja Fouriera (*discrete-time Fourier transform*, DTFT, nie mylić z dyskretną transformacją Fouriera, inaczej *Fourier sequence transform*)

$$\tilde{f}(\phi') = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j) e^{-ij\phi'} \quad (4.4.4)$$

$\phi' \in S^1$, a transformacja odwrotna jako odwrotna dyskretna w czasie transformacja Fouriera (*inverse DTFT*, *inverse Fourier sequence transform*)

$$f(j) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tilde{f}(\phi') e^{ij\phi'} \quad (4.4.5)$$

Transformacje te można podsumować grafem:



Rysunek 2 – Schemat transformacji Fouriera pomiędzy dziedzinami \mathbb{T} a \mathbb{Z} .

4.4.1.2 Transformacja Weyla i funkcja Wignera na okręgu

Wzory przedstawione w podrozdziale 2.4 Transformacje Weyla wymagają jedynie zmiany zwykłych, ciągłych transformacji Fouriera na ich odpowiedniki działające w przestrzeniach S^1 i \mathbb{Z} omówione w poprzednim podrozdziale 4.4.1.1.

Transformacja Weyla jest dana wzorem

$$\begin{aligned} \hat{F} = \mathcal{Q}f &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} f(\phi, j) e^{ij'(\hat{\Theta}-\phi)+i\phi'(\hat{J}-j)} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} f(\phi, j) \widehat{W}(\phi, j) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Operator gęstości \widehat{W} ma postać

$$\widehat{W}(\phi, j) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} e^{ij'(\hat{\Theta}-\phi)+i\phi'(\hat{J}-j)} \quad (4.4.7)$$

Wzór na transformację Weyla pozostaje bez zmian z tym, że wartość oczekiwana musi być obliczana przez całkowanie po okręgu. Tak samo wzór na funkcję Wignera

$$\begin{aligned} W_f(\phi, j) &= \langle f | \widehat{W}(\phi, j) | f \rangle = \\ &= \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-ij'\phi} e^{-i\phi'j} \langle f | e^{ij'\hat{\Phi}+i\phi'\hat{J}} | f \rangle \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Poniżej przedstawiono rachunki prowadzące do wzoru na funkcję Wignera na okręgu w widoczny sposób analogiczną do przypadku prostej.

$$\begin{aligned}
e^{ij'\hat{\Phi}+i\phi'\hat{J}} &= e^{-\frac{i}{2}\phi'j'} e^{i\phi'j'} e^{ij'\hat{\Phi}} = e^{-\frac{i}{2}\phi'j'} e^{i\phi'j'} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} |\theta\rangle\langle\theta| \right) e^{ij'\hat{\Phi}} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} \left| \theta' - \frac{\phi'}{2} \right\rangle \left\langle \theta' + \frac{\phi'}{2} \right| e^{ij'\theta'} \\
|f\rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} f(\theta') |\theta'\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f\left(\theta \pm \frac{\phi'}{2}\right) \left| \theta \pm \frac{\phi'}{2} \right\rangle \\
e^{ij'\hat{\Phi}+i\phi'\hat{J}} |f\rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{ij'\theta'} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f\left(\theta + \frac{\phi'}{2}\right) \left| \theta' - \frac{\phi'}{2} \right\rangle \left\langle \theta' + \frac{\phi'}{2} \right| \theta + \frac{\phi'}{2} \rangle = \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{ij'\theta'} f\left(\theta' + \frac{\phi'}{2}\right) \left| \theta' - \frac{\phi'}{2} \right\rangle \\
\langle f | e^{ij'\hat{\Phi}+i\phi'\hat{J}} | f \rangle &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{ij'\theta'} f\left(\theta' + \frac{\phi'}{2}\right) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f\left(\theta - \frac{\phi'}{2}\right)^* \left\langle \theta' - \frac{\phi'}{2} \right| \theta - \frac{\phi'}{2} \rangle = \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{ij'\theta'} f\left(\theta' - \frac{\phi'}{2}\right)^* f\left(\theta' + \frac{\phi'}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
W_f(\phi, j) &= \sum_{j'=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-ij'\phi} e^{-i\phi'j} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} e^{ij'\theta'} f\left(\theta' - \frac{\phi'}{2}\right)^* f\left(\theta' + \frac{\phi'}{2}\right) = \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{-i\phi'j} f\left(\phi - \frac{\phi'}{2}\right)^* f\left(\phi + \frac{\phi'}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

lub równoważnie

$$W_f(\phi, j) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{i\phi'j} f\left(\phi + \frac{\phi'}{2}\right)^* f\left(\phi - \frac{\phi'}{2}\right) \tag{4.4.10}$$

zgodnie ze wzorem (4.4.1).

4.4.2 Podstawowe właściwości funkcji Wignera na okręgu

4.4.2.1 Rozkłady brzegowe

Rozkłady brzegowe odtwarzają gęstości prawdopodobieństwa wyrażone jako kwadraty modułu funkcji falowej odpowiednio w bazie położeniowej lub pędowej.

Zastosowanie tożsamości $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{ij\phi} = 2\pi\delta(\phi)$ do wzoru (4.4.1) natychmiast daje

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} W_f(\phi, j) = |f(\phi)|^2$$

Symetrycznie

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi W_f(\phi, j) = |\tilde{f}(j)|^2$$

4.4.2.2 Normalizacja

Funkcja Wignera na okręgu jest znormalizowana. Automatycznie, na podstawie rozkładów brzegowych przedstawionych w poprzednim podrozdziale 4.4.2.1 otrzymujemy

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi W_f(\phi, j) = 1$$

4.4.2.3 Ograniczoność

Z wykorzystaniem nierówności Schwartza, addytywności całki jako funkcji przedziału całkowania i dowolności wyboru punktu rozcięcia okręgu przy całkowaniu funkcji na okręgu:

$$|W_f(\phi, j)| \leq 2$$

4.4.2.4 Funkcja Wignera z użyciem funkcji falowych w reprezentacji pędowej.

Funkcja Wignera w przypadku euklidesowym może być zupełnie symetrycznie wyrażona z zastosowaniem funkcji falowych w reprezentacji pędowej. Fakt, że funkcja Wignera dla okręgu wyraża się formułą pozostającą w bardzo bliskiej analogii do tej znanej z przypadku euklidesowego pozwala przypuścić, że również funkcja Wignera na okręgu da się wyrazić z zastosowaniem funkcji falowych w reprezentacji pędowej tak zgrabnym wzorem.

Jest to jedna z pułapek rozumowania przez analogię, gdyż ściśle analogiczny wzór nie obowiązuje. Wydaje się, że najbliższym poprawnym analogiem formuły (2.3.9) w przypadku okręgu jest

$$\begin{aligned} W(\phi, j) &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-i(n+m)\phi} \tilde{f}(n)^* \tilde{f}(m) \operatorname{sinc} \left(\pi \left(\frac{n+m}{2} + j \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Wynik ten otrzymano przez wstawienie do wzoru (4.4.1) funkcji falowych wyrażonych przez transformacje Fouriera funkcji w reprezentacji pędowej zgodnie z regułami wynikającymi z dualności Pontriagina (*vide* podrozdz. 4.4.1.1). Wynik ten (różniący się indeksowaniem sum) został otrzymany też w [36].

Przyczyną niemożności doprowadzenia tej formuły do postaci z pojedynczą sumą analogicznej z (2.3.9) a za razem z (4.4.1), jest fakt, że pojawiająca się w odpowiednich transformacjach Fouriera całka po 2π z $e^{ik\phi}$ czyli funkcja *sinus cardinalis* działa w sumowaniu jak delta Kroneckera tylko dla $k \in \mathbb{Z}$, a tu jej argumentami są też połówki. $\operatorname{sinc}(\pi n) = \mathcal{J}(-1)^n / \pi n$. Tymczasem suma po \mathbb{Z} z $e^{ik\phi}$ daje deltę Diraca którą zawsze można wykorzystać w następującym całkowaniu.

Warto porównać powyższy wzór (4.4.9) z (4.4.12) – jedną z postaci funkcji Wignera stanu koherentnego.

4.4.2.5 Funkcja Wignera w stanie koherentnym

Przetestujmy formułę (4.4.1) dla stanu $|00\rangle$.

$$\begin{aligned}
W_{00}(\phi, j) &= \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \theta_3\left(\frac{\phi + \phi'/2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) \theta_3\left(\frac{\phi - \phi'/2}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}}\right) e^{ij\phi'} = \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \sum_{\substack{n=-\infty \\ m=-\infty}}^{+\infty} e^{-\frac{\hbar(n^2+m^2)}{2r^2}} e^{-i\phi(n+m)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} e^{i(j-\frac{n+m}{2})\phi'} = \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \sum_{n,m} e^{-\frac{\hbar(n^2+m^2)}{2r^2}} e^{-i\phi(n+m)} \operatorname{sinc}\left(\pi\left(j - \frac{n+m}{2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Po rozdzieleniu wyrazów o numerach parzystych i nieparzystych do osobnych sum otrzymujemy

$$\begin{aligned}
W_{00}(\phi, j) &= \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \left(\sum_{n,m} e^{-(n^2+m^2)\frac{\hbar}{r^2}} e^{i2n\phi} \operatorname{sinc}[\pi(m+j)] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n,m} e^{-((n+\frac{1}{2})^2+(m+\frac{1}{2})^2)\frac{\hbar}{r^2}} e^{i2(n+\frac{1}{2})\phi} \operatorname{sinc}\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}+j\right)\right] \right)
\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

co możemy zapisać z użyciem sumy po indeksach połówkowych

$$\begin{aligned}
W_{00}(\phi, j) &= \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \left(\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{-(n^2+m^2)\frac{\hbar}{r^2}} e^{i2n\phi} \operatorname{sinc}[\pi(m+j)] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n,m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}} e^{-(n^2+m^2)\frac{\hbar}{r^2}} e^{i2n\phi} \operatorname{sinc}[\pi(m+j)] \right)
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

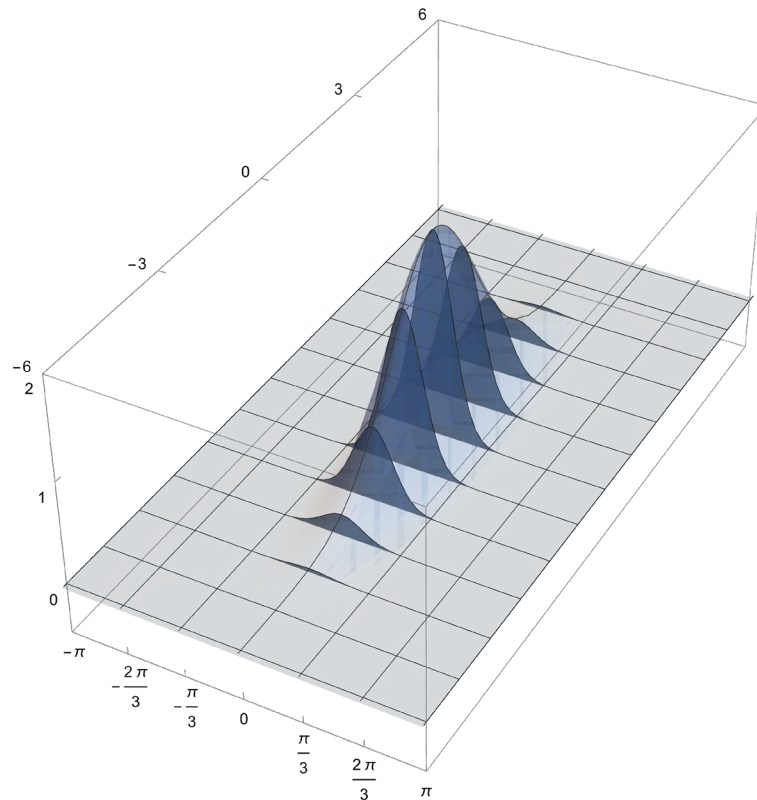
Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
W_{00}(\phi, j) &= \\
&= \frac{1}{\hbar\theta_3\left(0, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right)} \left(\theta_3\left(\phi, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) e^{-j^2} + \right. \\
&\quad \left. + \theta_2\left(\phi, e^{-\frac{\hbar}{r^2}}\right) \sum_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2} \operatorname{sinc}\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}+j\right)\right) \right)
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Trudno powiedzieć która postać: (4.4.12) czy (4.4.15) jest „prostsza”. Stany inne niż $|00\rangle$ otrzymujemy bezproblemowo podstawiając: $\phi \rightarrow \phi - \alpha, j \rightarrow j - l$.

4.4.2.6 Zależność funkcji Wignera od parametru dyspersji stanu

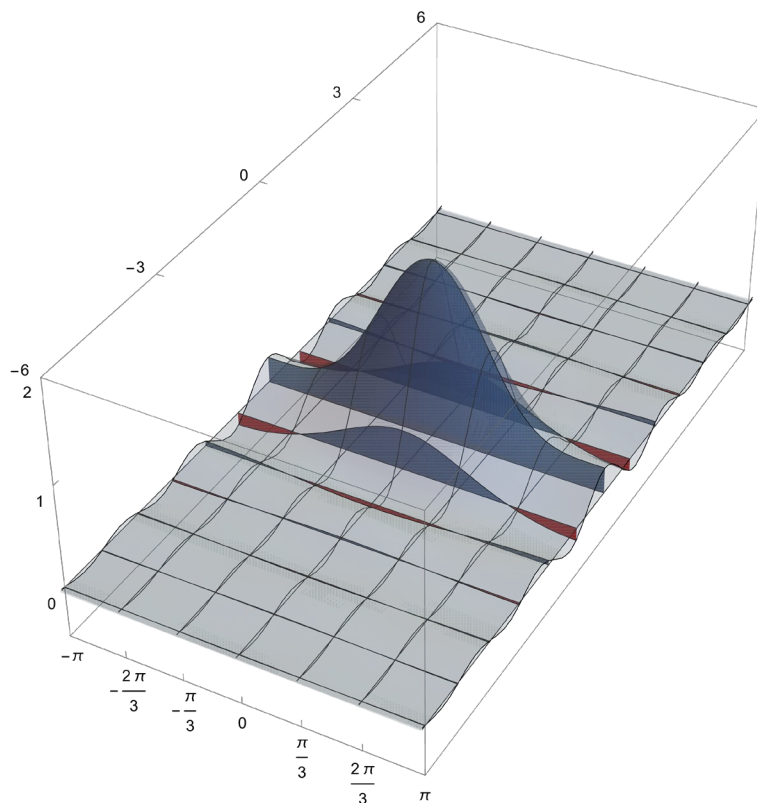
Funkcję Wignera stanu koherentnego przedstawia następujący wykres:



Wykres 19 – Funkcja Wignera stanu koherentnego na okręgu z parametrem dyspersji $\sigma^2 = 1/8$

Przestrzenią argumentów funkcji Wignera jest oczywiście przestrzeń fazowa. Oś ϕ należy rozumieć jako rozcięty okrąg i utożsamiać $\phi = -\pi$ z $+\pi$. Wartości j są dyskretne – tak zakładano w toku wyprowadzenia funkcji Wignera. Otrzymana jej postać pozwala podstawiać też dowolne ułamkowe wartości j . Odpowiada to postaci klasycznej przestrzeni fazowej dla cząstki na okręgu $S^1 \times \mathbb{R}$. Z drugiej strony dla fali na okręgu mamy $S^1 \times \mathbb{Z}$ jak stanowi twierdzenie o dualności Pontriagina. Powyższa ilustracja przedstawia także wykres dla ciągłych wartości j – stanowi on gładką obwiednię wykresu dla j dyskretnych. Na powyższej ilustracji przedstawiono stan $|0,0\rangle$; stany $|\alpha, l\rangle$ różnią się zwykłym przesunięciem w przestrzeni fazowej.

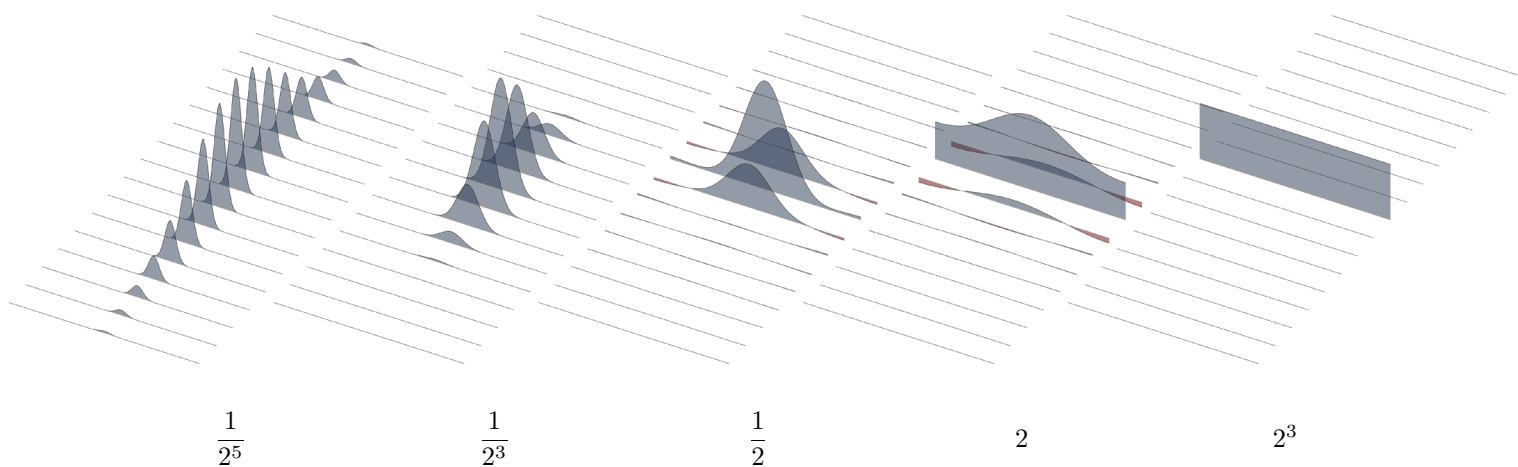
Analogicznie zilustrowano stan z większą wartością parametru dyspersji.



Wykres 20 – Funkcja Wignera stanu koherentnego na okręgu z parametrem dyspersji $\sigma^2 = 1$

Tutaj stan jest w widocznym stopniu rozciągnięty po całym okręgu. Jednocześnie jest znacznie bardziej skupiony w zmiennej pędowej. Daje się zauważyć falowanie wzdłuż j i obszary o ujemnej wartości funkcji (zaznaczone kolorem bordowym).

Szerszy zakres parametrów dyspersji przedstawia Wykres 21.



Wykres 21 – Funkcja Wignera stanu koherentnego na okręgu dla różnych wartości parametru dyspersji σ^2

Stan z $\sigma^2 = 8$ jest na tej ilustracji nieodróżnialny od stanu własnego operatora momentu pędu (a za razem hamiltonianu swobodnego). Ma równomierną gęstość na całym okręgu i

doskonale skupienie w zmiennej pędowej. Oczywiście ściśle zachodzi to dopiero dla $\sigma^2 \rightarrow \infty$, ale obydwie funkcje V_ϕ i V_j zdużają do swych granic szybko.

4.4.3 Własności statystyczne funkcji Wignera

Funkcja Wignera jest analogiem klasycznej gęstości dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, którego argumentem w mechanice kwantowej na prostej jest

$$\chi = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$$

Wartość oczekiwana składa się zatem z wartości oczekiwanej obydwu składowych argumentu.

$$M = \mathbb{E}\chi = \begin{bmatrix} \mathbb{E}x \\ \mathbb{E}p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{p} \end{bmatrix} \quad (4.4.16)$$

Jeśli chodzi o wariancję, to bez straty ogólności $V := \mathbb{E}(\chi - \bar{\chi})(\chi - \bar{\chi})^T = \mathbb{E}\chi'\chi'^T$ (zwykle przesunięcie początku układu).

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{E} \left(\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & p \end{bmatrix} \right) = \mathbb{E} \begin{bmatrix} x^2 & xp \\ px & p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}x^2 & \mathbb{E}xp \\ \mathbb{E}px & \mathbb{E}p^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xp} \\ V_{xp} & V_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & 0 \\ 0 & V_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & V_{xp} \\ V_{xp} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Gdzie V_{xp} jest kowariancją składowych.

Analogicznie, gdy $X = S^1$, $TX = S^1 \times \mathbb{Z}$, $\chi = \begin{bmatrix} \phi \\ j \end{bmatrix}$

$$M = \mathbb{E}\chi = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\phi \\ \mathbb{E}j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{j} \end{bmatrix} \quad (4.4.18)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & V_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & V_{\phi j} \\ V_{\phi j} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.19)$$

Jedyna różnica leży w sposobie obliczania wartości oczekiwanej \mathbb{E} , czy też w definicji średniej. Aby $d(\phi, \bar{\phi})^2$ wyrażało się prosto $(\phi - \bar{\phi})^2$, kąty ϕ muszą należeć do przedziału $[\bar{\phi} - \pi, \bar{\phi} + \pi]$, co można wyegzekwować adekwatnie wybierając granice całkowania (por. podrozdz. 4.2.3 i 4.2.5).

$$V_\phi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} (\phi - \bar{\phi})^2 W_f(\phi, j) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \phi'^2 W_f(\phi' + \bar{\phi}, j) \quad (4.4.20)$$

Dla V_j wybór miejsca rozcięcia okręgu nie gra roli, więc można pozostać przy standardowym wzorze

$$V_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} (j - \bar{j})^2 W_f(\phi, j) \quad (4.4.21)$$

Konsekwentnie,

$$\begin{aligned}
V_{\phi j} &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{\bar{\phi}-\pi}^{\bar{\phi}+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |j - \bar{j}| |\phi - \bar{\phi}| W_f(\phi, j) = \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} |j - \bar{j}| |\phi'| W_f(\phi' + \bar{\phi}, j)
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Warto zaznaczyć, że funkcje V_ϕ i V_j wg wzorów (4.4.20) i (4.4.21) precyzyjnie odtwarzają zachowanie analogicznych funkcji zdefiniowanych na stanach koherentnych (bez pośrednictwa funkcji Wignera) które przedstawiają Wykres 3 – Wykres 6 w podrozdziale 4.3.9.

V Sfera

Topologicznie nieeuklidesowa przestrzeń konfiguracyjna,
z nietrywialną wiązką styczną jako przestrzenią fazową

Gdy przestrzenią konfiguracyjną jest sfera S^2 , przestrzenią fazową jest wiązka styczną do sfery.

Przestrzeń konfiguracyjna – sfera różni się topologicznie zarówno od płaszczyzny jak i od okręgu S^1 . Jest, podobnie jak okrąg, przestrzenią zwartą, ale, w odróżnieniu od okręgu, jednopójną (*simply connected*). W odróżnieniu od okręgu nie jest grupą a strukturą ilorazową grup $S^2 = SO(3)/SO(2)$.³⁵

Przestrzeń fazowa, czyli wiązka styczną do przestrzeni konfiguracyjnej jest wiązką nietrywialną. Nie ma globalnej struktury produktowej (przestrzeni podstawowej i modelowego włókna) ani globalnych niezerowych przekrojów. Stanowi to treść tzw. twierdzenia o włochatej kuli (*hairy ball theorem, hedgehog theorem*).³⁶

Nietrywialność wiązki ma istotne znaczenie dla możliwości uogólnienia konstrukcji znanych z przypadków \mathbb{R}^n i S^1 .

Wiązka styczną do sfery TS^2 jest izomorficzna z odpowiednio zdefiniowaną kompleksyfikacją sfery ([37], rozdz. 3).

Zatem mamy do czynienia z topologicznie nieeuklidesową przestrzenią konfiguracyjną i przestrzenią fazową nietrywialną jako wiązką włóknista.

5.1 Przestrzeń konfiguracyjna, fazowa i przestrzeń Hilberta dla sfery

5.1.1 Parametryzacja przestrzeni konfiguracyjnej dla cząstki na sferze

Wektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}^2 = r^2$ skonstruowano z wykorzystaniem macierzy obrotu wokół osi zewnętrznego układu współrzędnych parametryzowanych przez kąty Eulera. Dla przejrzystości przyjmijmy $r = 1$.

$$R_x(\phi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x \end{bmatrix}; R_y(\phi_y) = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y \end{bmatrix}; R_z(\phi_z) = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Punkt początkowy układu współrzędnych na sferze wyznaczony jest przez wektor w \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wówczas punkty sfery generowane są przez obroty wokół osi, tak że

³⁵ S^3 jest grupą Liego,

³⁶ Brak globalnej struktury produktowej i globalnych niezerowych przekrojów wiązki styczną rozciąga się na sfery dowolnego wymiaru parzystego S^{2k} , podczas gdy sfery wymiaru nieparzystego S^{2k-1} mają wiązki styczną trywialne (jako wiązki włókniste).

$$\mathbf{x} = R_z(\phi)R_y(\theta)\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Analogicznie opiszmy inny punkt

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \sin \tau \cos \psi \\ \sin \tau \sin \psi \\ \cos \tau \end{bmatrix}$$

oraz wyróżniony punkt

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

przeznaczony do parametryzacji stanów koherentnych.

5.1.1.1 Metryka na sferze

Metryką Riemanna na sferze, czyli odległością geodezyjną jest długość (krótszego) łuku koła wielkiego przechodzącego przez dane punkty

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \quad (5.1.1)$$

$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S^2$.

We współrzędnych sferycznych, zgodnie z twierdzeniem kosinusów na sferze, mamy

$$d((\theta, \phi), (\theta', \phi')) = \arccos(\cos \theta \cos \theta' + \cos(\phi - \phi') \sin \theta \sin \theta') \quad {}^{37} (5.1.2)$$

5.1.1.2 Miara na sferze

Miarę na sferze wybrano standardowo: $d\mu(x) = d\phi d\theta \sin \theta$. Wówczas

$$\int_{S^2} d\mu(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta = 4\pi$$

5.1.2 Parametryzacja przestrzeni fazowej dla cząstki na sferze

Wektory momentu pędu są styczne do sfery tak, że

$$\mathbf{l} = lR_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\alpha)R_y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_3 = l \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \phi - \cos \alpha \cos \theta \cos \phi \\ -\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \cos \theta \sin \phi \\ \cos \alpha \sin \theta \end{bmatrix}$$

Analogicznie opiszmy inny wektor styczny

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \psi - \cos \beta \cos \tau \cos \psi \\ -\sin \beta \cos \psi - \cos \beta \cos \tau \sin \psi \\ \cos \beta \sin \tau \end{bmatrix}$$

oraz wyróżniony wektor momentu pędu

$$\mathbf{l}_0 = l_0 \begin{bmatrix} \sin \alpha_0 \sin \phi_0 - \cos \alpha_0 \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ -\sin \alpha_0 \cos \phi_0 - \cos \alpha_0 \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ \cos \alpha_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix}$$

przeznaczony do parametryzacji stanów koherentnych.

37 Analogiczny wzór w przypadku okręgu natychmiast sprowadza się do (4.1.1).

Współrzędne zespolone łączą położenie na sferze i moment pędu.

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \cosh l \frac{\mathbf{x}}{r} + i \frac{\sinh l}{l} \mathbf{l} \times \frac{\mathbf{x}}{r} \quad (5.1.3)$$

([38], wz. 6.1; por. [17], rozdz. 3, w szczeg. wz. 18). W przypadku okręgu możliwe jest nawet zastąpienie kąta parametryzującego położenie na okręgu zmienną zespoloną z częścią urojoną odpowiadającą momentowi pędu (por. podrozdz. 4.1.2); tu, w przypadku sfery aż taka prostota nie jest osiągalna.

5.1.3 Algebra operatorów położenia i momentu pędu dla sfery

Punktem wyjścia do konstrukcji przestrzeni Hilberta dla sfery jest algebra $e(3)$ operatorów położenia i momentu pędu

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \\ \hat{J}_3 \end{bmatrix}$$

której operatory Casimira spełniają warunki $\hat{\mathbf{X}}^2 = r^2$ i $\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{J}} = 0$ wyrażające ograniczenie możliwych położenia do sfery o promieniu r i prostopadłość wektora momentu pędu do wektora położenia. Algebrę tę charakteryzują następujące relacje komutacyjne:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad [\hat{J}_i, \hat{X}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{X}_k \quad [\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0 \quad (5.1.4)$$

$i, j, k = 1, 2, 3$

5.1.4 Baza $|j, m\rangle$ przestrzeni Hilberta dla sfery

Jednoczesne wektory własne $|j, m\rangle$ operatorów $\hat{\mathbf{X}}^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ zdefiniowane równaniami

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}^2 |j, m\rangle &= r^2 |j, m\rangle \\ \hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\ (\hat{\mathbf{X}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) |j, m\rangle &= 0 \end{aligned}$$

rozpinają nieredukowalną reprezentację algebry $e(3)$. Odpowiednie wartości własne spełniają warunki $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq j$. Baza ta jest ortogonalna

$$\langle j, m | j', m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (5.1.5)$$

i zupełna, z rozkładem jedności

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} |j, m\rangle \langle j, m| = \hat{I} \quad (5.1.6)$$

gdzie \hat{I} jest operatorem identycznościowym. Stan $|j, m\rangle$ wyraża się w bazie położeniowej przez harmoniki sferyczne $\langle x | j, m \rangle = Y_j^m(x)$ zdefiniowane w uzupełnieniu 9.1.

5.1.5 Reprezentacja położeniowa przestrzeni Hilberta dla sfery

Wektory własne $|\mathbf{x}\rangle$ operatora $\hat{X}, \hat{X}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$ także rozpinają reprezentację algebry $e(3)$. Baza położeniowa jest ortogonalna $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ i kompletna, z rozkładem jedności: $\int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}| = \hat{I}$, gdzie μ jest miarą Haara na sferze, a \hat{I} – operatorem identycznościowym.

W parametryzacji opisanej w podrozdziale 5.1.1 (w sferycznym układzie współrzędnych) $|\mathbf{x}\rangle \equiv |\theta, \phi\rangle$. Wówczas $d\mu(\mathbf{x}(\theta, \phi)) = d\phi d\theta \sin \theta$. Warunek ortogonalności przybiera postać

$$\langle \theta, \phi | \theta', \phi' \rangle = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \quad (5.1.7)$$

gdzie dystrybucje δ dla kątów są poprawnie określone na dziedzinie $\phi \in [-\pi, +\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.³⁸ Natomiast rozkład jedności wyraża się wzorem

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |\theta, \phi\rangle\langle \theta, \phi| = \hat{I} \quad (5.1.8)$$

5.2 Statystyka na sferze

Topologia sfery, podobnie jak topologia okręgu, również wymaga skonstruowania właściwych jej funkcji statystycznych. W szczególności, w przypadku sfery istnieją odpowiednio: funkcja Frécheta, średnia wewnętrzna, wariancja Frécheta i rozkład będący odpowiednikiem rozkładu normalnego. Oprócz nich istnieje też średnia zewnętrzna. Właściwie jedyne co odróżnia przypadek sfery od okręgu w kwestii statystyki, to postać odległości geodezyjnej. Odległość geodezyjna na sferze wyraża się wzorem (5.1.1) lub (5.1.2).

Poniżej wypisano podstawowe narzędzia statystyki na sferze. Ich sens jest *mutatis mutandis* taki sam jak w przypadku okręgu (por. podrozdz. 4.2).

Funkcja Frécheta ma postać

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}') = \int_{S^2} d\mathbf{x} (\arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'))^2 \rho(\mathbf{x}) \quad (5.2.1)$$

Średnia wewnętrzna i wariancja zdefiniowane są identycznie jak w podrozdz. 4.2.

$$M_{\mathbf{x}, S^2} = \arg \min_{\mathbf{x}'} \mathcal{V}(\mathbf{x}')$$

$$V_{\mathbf{x}, S^2} = \min_{\mathbf{x}'} \mathcal{V}(\mathbf{x}') = \mathcal{V}(M_{\mathbf{x}, S^2})$$

Odpowiednikiem rozkładu normalnego na sferze jest jądro ciepłe opisane dalej w podrozdziale 5.3.3 wzorami (5.3.6) i (5.3.8).³⁹

Średnia zewnętrzna jest zdefiniowana poprzez średnią w \mathbb{R}^3

$$M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^3} = \int_{S^2} d\mathbf{x} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) = \int_{S^2} d\mathbf{x} \mathbf{x} |f(\mathbf{x})|^2 \quad (5.2.2)$$

³⁸ Ewentualnie dla $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, delty Diraca należy zastąpić „funkcjami” sza (vide uzup. 9.1).

³⁹ Niekiedy jako odpowiednik rozkładu normalnego na sferze podaje się rozkład von Misesa-Fishera, jednak ma on tę samą wadę co rozkład von Misesa na okręgu (por. przypis 23 w podrozdz. 4.2.6).

Rzutowanie średniej w \mathbb{R}^3 na sferę polega na normalizacji wektora, czyli średnia zewnętrzna dana jest wzorem

$$EM(\mathbf{x}) = \frac{M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^3}}{|M_{\mathbf{x}, \mathbb{R}^3}|} \quad (5.2.3)$$

5.3 Stany koherentne na sferze

Przedyskutujemy dwa sposoby skonstruowania stanów koherentnych na sferze. Obydwe wykorzystują zespoloną parametryzację przestrzeni fazowej. Stany koherentne będą parametryzowane punktami $\mathbf{c} = \mathbf{z}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)$, zgodnie z (5.1.3).

5.3.1 Pierwsza konstrukcja stanów koherentnych na sferze

Stan koherentny na sferze znaleźli Kowalski i Rembieliński w pracy [38]. Ich metoda opierała się na wprowadzeniu zespolonej parametryzacji przestrzeni fazowej, skonstruowaniu operatora będącego analogiem standardowego operatora anihilacji, lecz dostosowanego do wprowadzonej parametryzacji przestrzeni fazowej, sformułowaniu równania własnego i rozwiązaniu go dla stanu podstawowego, by następnie wygenerować z niego pozostałe stany przez zespolone obroty. Jest to rozwinięcie metody zastosowanej przez tych samych autorów do przypadku okręgu w pracy [16] a opierającej się na koncepcji Baruta i Girardello (por. podrozdz. 3.1.1.2). W cytowanej pracy wyprowadzono postać stanu koherentnego w bazie $|j, m\rangle$ (*vide* podrozdz. 5.1.4)

$$\begin{aligned} \langle j, m | \mathbf{c} \rangle &= \\ &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \frac{(2|m|)!}{|m|!} \sqrt{\frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} \left(\frac{-\operatorname{sgn}(m)c_1 + ic_2}{2} \right)^{|m|} C_{j-|m|}^{|m|+\frac{1}{2}}(c_3) \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

([38], wzór 5.14), gdzie $C_\nu^\lambda(x)$ jest funkcją Gegenbauera (*vide* uzup. 9.1).

Funkcję (4.3.1) można wyrazić też w prostszy sposób. Otóż wzór (5.3.1) jest równoważny następującemu

$$\langle j, m | \mathbf{c} \rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{c_1 + ic_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right)^{-m} P_j^m(c_3) \quad (5.3.2)$$

lub równoważnie z $c_1^2 + c_2^2 = 1 - c_3^2$, ze względu na szczególną postać zespolonego wektora \mathbf{c} .

$P_j^m(x)$ jest stowarzyszoną funkcją Legendre'a pierwszego rodzaju, typu 2 (*vide* uzup. 9.1).

Wreszcie, przy odpowiedniej definicji harmonik sferycznych dla zespolonych argumentów (*vide* uzup. 9.1):

$$\langle j, m | \mathbf{c} \rangle = \sqrt{4\pi} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (-1)^m Y_j^{-m}(\mathbf{c}) \quad (5.3.3)$$

lub równoważnie z $(-1)^m Y_j^{-m}(\mathbf{c}) = \overline{Y_j^m(\overline{\mathbf{c}})} = Y_j^m(\theta_c, -\phi_c)$ dla $\theta_c = \arccos c_3$, $\phi_c = \operatorname{arctg}(c_1, c_2)$ z użyciem dwuargumentowego wariantu funkcji arcus tangens (*atan2*) (*vide* uzup. 9.1).

Wyprowadzenie wzorów (5.3.2) i (5.3.3) przedstawiono w uzupełnieniu 9.3.

5.3.1.1 Sprawdzenie

Prostym testem wyprowadzonych wzorów jest przypadek $\mathbf{c} = [0, 0, 1]$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi}e^{-\frac{1}{2}j(j+1)}Y_j^{-m}(0, \phi) &= \sqrt{4\pi}e^{-\frac{1}{2}j(j+1)}Y_j^0(0, \phi)\delta_{m,0} = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\sqrt{2j+1}P_j(\cos 0)\delta_{m,0} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\sqrt{2j+1}\delta_{m,0}\end{aligned}$$

co ściśle zgadza się z rzutem $\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)}\sqrt{2j+1}|j, 0\rangle$ ([38], wz. 5.3) na $|j, m\rangle$.

5.3.2 Stan koherentny na sferze w reprezentacji położeniowej

Wykorzystując rozkład jedności w bazie $|j, m\rangle$: $\hat{I} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} |j, m\rangle\langle j, m|$, otrzymujemy

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{c} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} \langle \mathbf{x} | j, m \rangle \langle j, m | \mathbf{c} \rangle$$

Stan $|j, m\rangle$ wyraża się w bazie położeniowej $|\mathbf{x}\rangle$ przez harmoniki sferyczne $\langle \mathbf{x} | j, m \rangle = Y_j^m(\mathbf{x})$ zdefiniowane w uzupełnieniu 9.1. Funkcja falowa stanu koherentnego w reprezentacji położeniowej wyraża się następująco

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x} | \mathbf{c} \rangle &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} Y_j^m(\mathbf{x}) \langle j, m | \mathbf{c} \rangle = \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sum_{m=-j}^{+j} Y_j^m(\mathbf{x}) Y_j^m(\mathbf{c}^*)^* = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (2j+1) P_j(\mathbf{x} \cdot \mathbf{c})\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

gdzie $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}$ jest standardowym hermitowskim iloczynem skalarnym liczb zespolonych.

$$\begin{aligned}c &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \\ &= \cosh l (\cos(\phi - \phi_0) \sin \theta \sin \theta_0 + \cos \theta \cos \theta_0) + \\ &+ i \sinh l (\sin \theta \cos \theta_0 \sin \alpha_0 \cos(\phi - \phi_0) - \sin \theta \cos \alpha_0 \sin(\phi - \phi_0) + \\ &- \cos \theta \sin \theta_0 \sin \alpha_0)\end{aligned}\tag{5.3.5}$$

W przypadku $\mathbf{c}_{00} = [0, 0, 1]$

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{c}_{00} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (2j+1) P_j(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (2j+1) P_j(\cos \theta)$$

5.3.3 Stany koherentne typu jądro ciepłe na sferze

Jak wspomniano w podrozdziale 4.3.5, Hall [17], [28] i Stenzel [29] opracowali stany koherentne dla sfer dowolnego wymiaru wyrażające się przez jądro ciepłe w danej przestrzeni z parametrem „czasu” τ określającym dyspersję w zmiennej położeniowej.

Jądro ciepłe na sferze S^n [17] jest funkcją $\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau)$ gdzie $x_0, x \in S^n$, ale wchodzi do funkcji ρ za pośrednictwem odległości geodezyjnej θ^* zdefiniowanej relacją $\cos \theta^* = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x} / r^2$ ⁴⁰. Na mocy twierdzenia kosinusów na sferze S^2 , $\cos \theta^* = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0)$

40 Wielowartościowość odwrotności cosinusa nie gra roli, gdyż otrzymana funkcja ρ ma taki sam okres jak zmienna kątowna na okręgu.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau) &= \\ &= \frac{e^{\frac{\tau}{8}}}{2\pi\tau} \int_{\theta^*}^{\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{\cos\theta^* - \cos\phi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k (\phi - k2\pi) e^{-\frac{(\phi+k2\pi)^2}{2\tau}} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

$\tau = \hbar/r^2$, gdzie promień r wyrażono w jednostkach $\sqrt{\hbar}$, jak \mathbf{x} . Podobnie jak w przypadku okręgu, wybór r wiąże się z dyspersją położenia. Parametr τ nie jest parametrem czasu dla fizycznej ewolucji otrzymanych stanów.

Funkcja $\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau)$ ma jednoznaczne rozszerzenie analityczne do $\rho_{AC}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, \tau)$ polegające na zamianie $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{c} \in S_{\mathbb{C}}^n$, tyle że teraz $\theta^* = \arccos(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}/r^2) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \rho_{AC}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, \tau) &= \\ &= \frac{e^{\frac{\tau}{8}}}{2\pi\tau} \int_{\theta^*}^{\pi} d\psi \frac{1}{\sqrt{\cos\theta^* - \cos\psi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k (\psi - k2\pi) e^{-\frac{(\psi+k2\pi)^2}{2\tau}} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

([17], rozdz. 5)

W tym przypadku całka musi być rozumiana jako całka po konturze na płaszczyźnie zespolonej w pasie $0 \leq \Re\psi \leq \pi$.

Całka we wzorach (5.3.6) i (5.3.7) znacząco utrudnia rachunki z ich zastosowaniem. Istnieją jednak równoważne im wzory ([17], wz. (42), z poprawką $\sqrt{2j+1} \rightarrow 2j+1$ ⁴¹)

$$\rho(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\tau \frac{j(j+1)}{2}} (2j+1) P_j(\cos\theta^*) \quad (5.3.8)$$

$$\rho_{AC}(\mathbf{c}, \mathbf{x}, \tau) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\tau \frac{j(j+1)}{2}} (2j+1) P_j(\cos\theta^*) \quad (5.3.9)$$

Zatem stan koherentny na sferze opisany jest funkcją falową

$$f_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = N \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\frac{\hbar j(j+1)}{2r^2}} (2j+1) P_j(\cos\theta^*) \quad (5.3.10)$$

gdzie N jest czynnikiem normalizacyjnym zależnym od parametrów stanu.

5.3.4 Porównanie obydwu konstrukcji stanów koherentnych na sferze

Stany przedstawione w dwóch poprzednich podrozdziałach są takie same. Hall wspomina już w [17], że przedstawiony przez niego stan koherentny na S^2 zgadza się ze stanem znalezionym w [38], jednak pomyłka we wzorze ([17], wz. (42)) sprawiała, że wyniki te po prostu się nie zgadzały. (Błąd ten został wychwycony też w [39].) Z drugiej strony dopiero wyrafinowanie wzoru ([38], 5.14) do postaci (5.3.3) pozwala łatwo zrzutować stan koherentny na bazę położeniową. (W [38] był on wyrażony w bazie $|j, m\rangle$.) Ostatecznie, wzory (5.3.4) i (5.3.10), choć otrzymane innymi drogami, okazują się takie same.

⁴¹ W cytowanej pracy we wzorze (42) podano czynnik $\sqrt{2j+1}$, podczas gdy powinno być $2j+1$. Łatwo sprawdzić zgodność z (5.3.7), czy też przetestować dla kilku zestawów parametrów.

Należy zaznaczyć, że stany przedstawione w podrozdziałach 5.3.1, 5.3.2 i 5.3.3 są nieunormowane. Współczynnik normalizacyjny N ze wzoru (5.3.10) zależy od parametrów stanu $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)$ i nie wyraża się prostym wzorem.

5.3.5 Właściwości stanów koherentnych na sferze

Oznaczmy $|\mathbf{c}\rangle \equiv |\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0\rangle \equiv |\theta_0, \phi_0, l_0, \sigma_0\rangle$ – zgodnie z parametryzacją wprowadzoną w podrozdziale 5.1.2.

5.3.5.1 Niezmienniczość

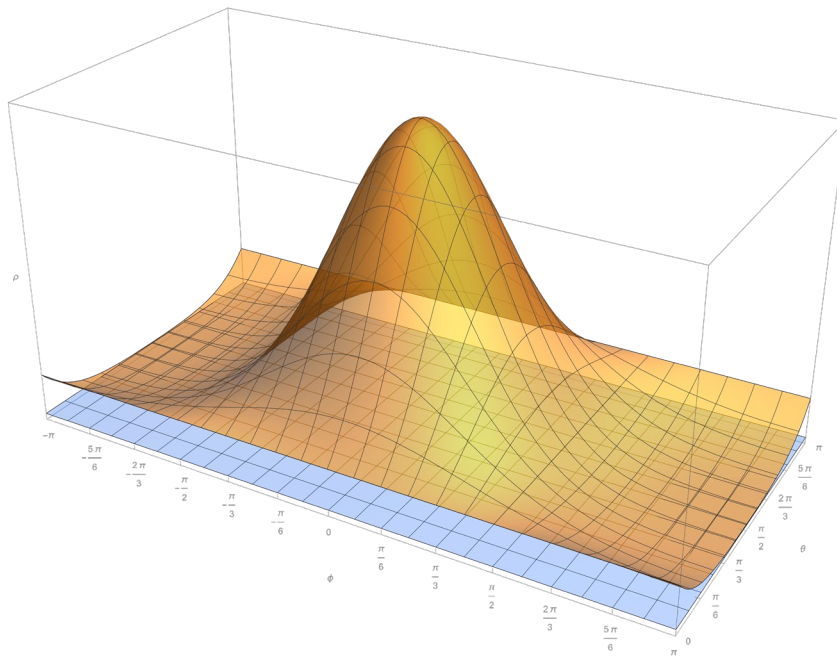
Funkcja falowa stanu koherentnego na sferze (5.3.4) lub (5.3.10) zależy od położenia na sferze \mathbf{x} i parametrów stanu $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)$ poprzez iloczyn skalarny.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \cosh l_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0 - i \frac{\sinh l_0}{l_0} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{l}_0 \times \mathbf{x}_0) = \cosh l_0 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0 - i \frac{\sinh l_0}{l_0} \mathbf{l}_0 \cdot (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x})$$

Obrót w \mathbb{R}^3 nie może zmienić jego wartości. Stany koherentne na sferze są niezmiennicze na obroty w \mathbb{R}^3 (translacje w S^2). Właściwość ta została odnotowana w [38].

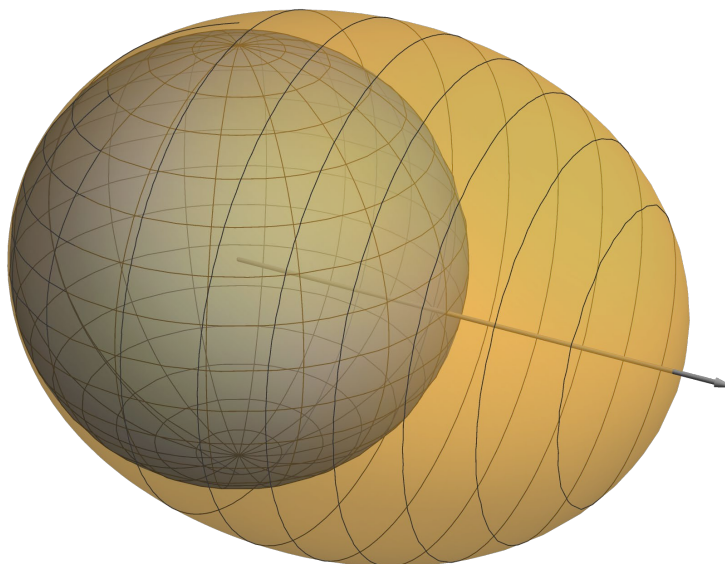
5.3.5.2 Prawdopodobieństwa w przestrzeni położeniowej

Gęstość prawdopodobieństwa stanu koherentnego w przestrzeni położenia $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ w najprostszym przypadku ma postać, którą ilustruje Wykres 22.



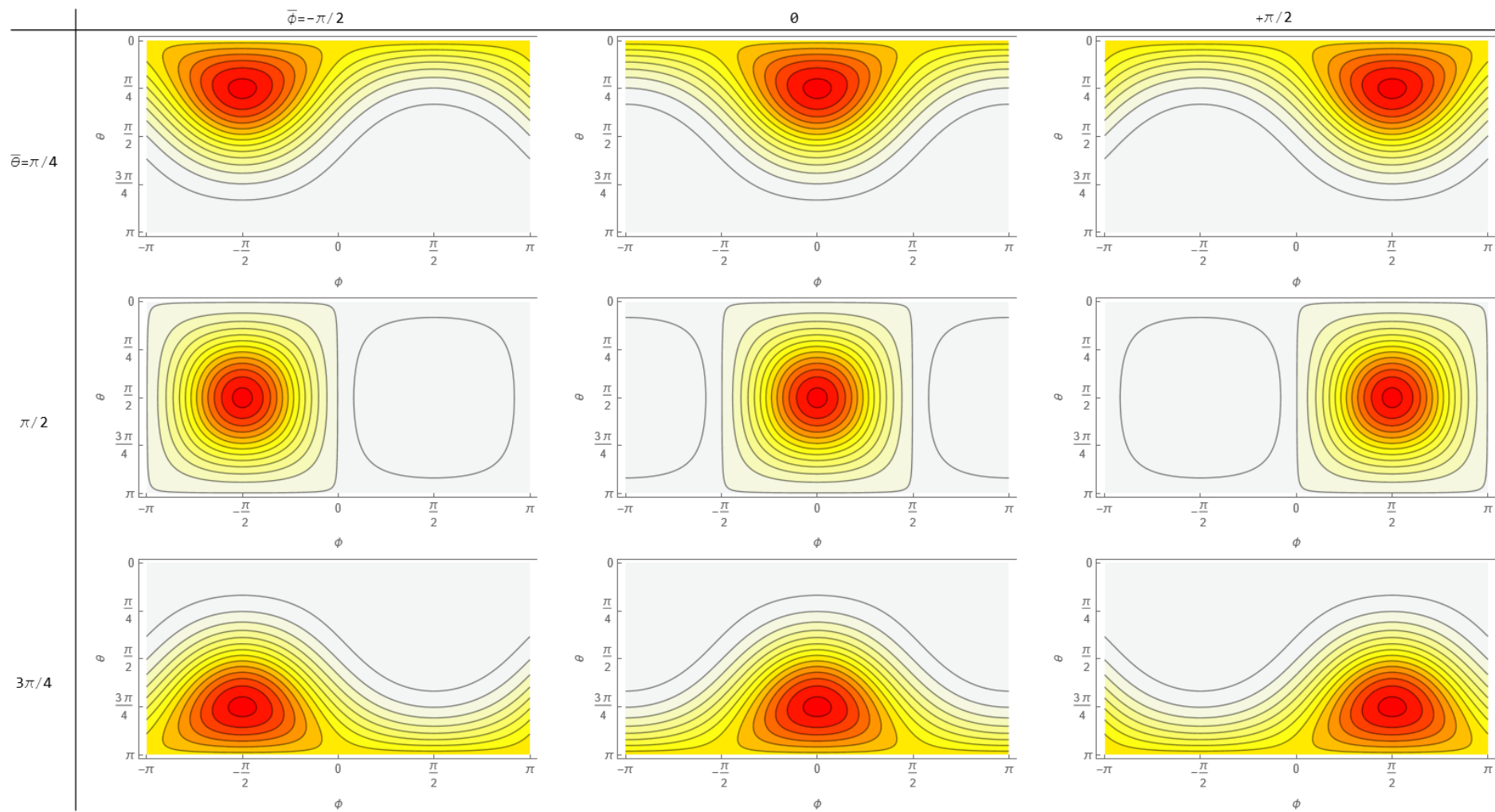
Wykres 22 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanie koherentnym na sferze o parametrach $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 0]$ i $\mathbf{l}_0 = 0$

Symetrię stanu lepiej widać przy odwzorowaniu rozkładu gęstości prawdopodobieństwa nad przestrzenią argumentów o właściwej geometrii, co przedstawia Wykres 23.

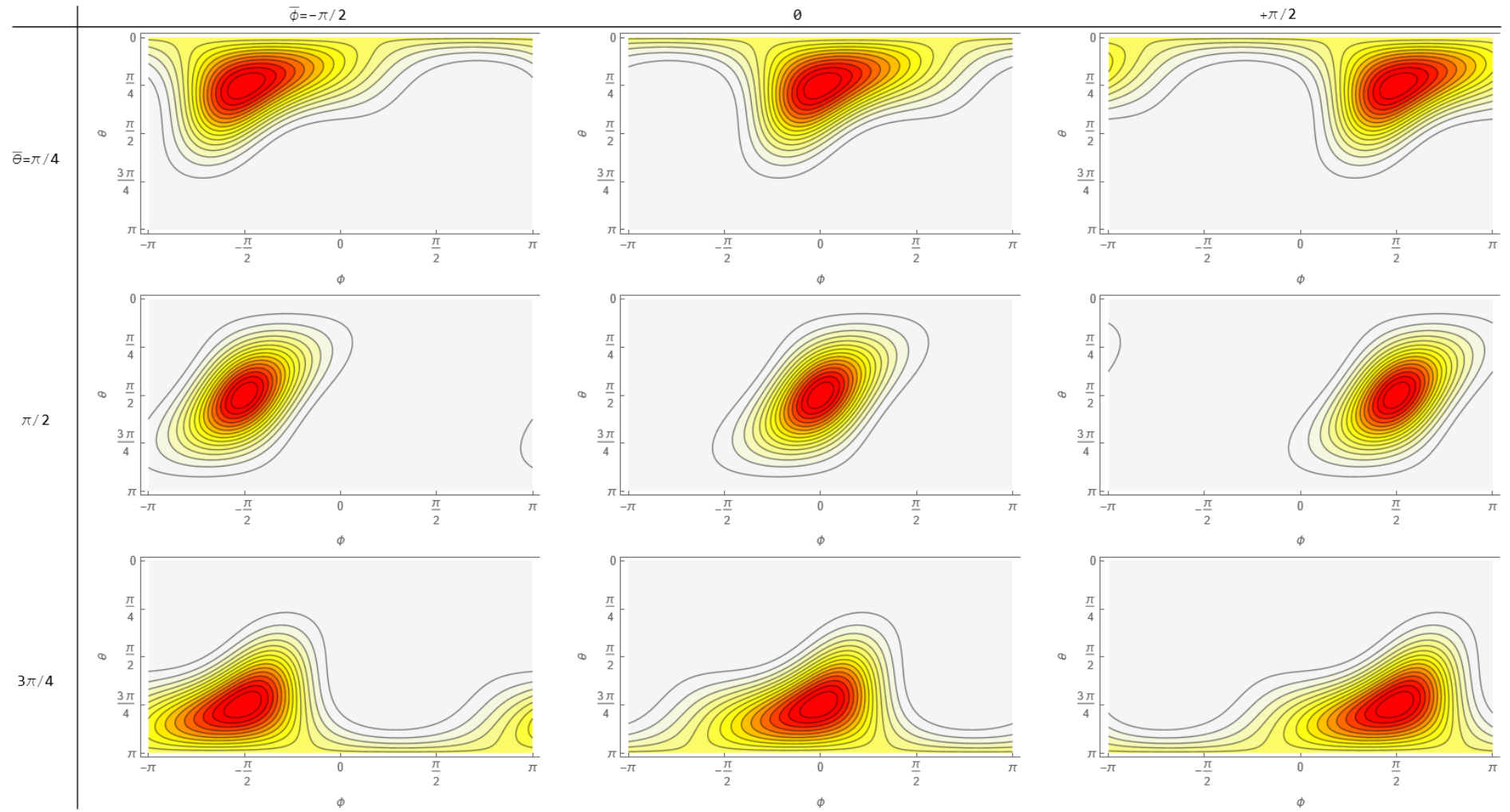


Wykres 23 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanie koherentnym na sferze o parametrach $\mathbf{x}_0 = [1,0,0]$ i $\mathbf{l}_0 = 0$ wykreślona jako wysokość nad powierzchnią sfery

Rozkłady gęstości stanów koherentnych o innych parametrach $\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0$ przedstawiają następujące tablice.



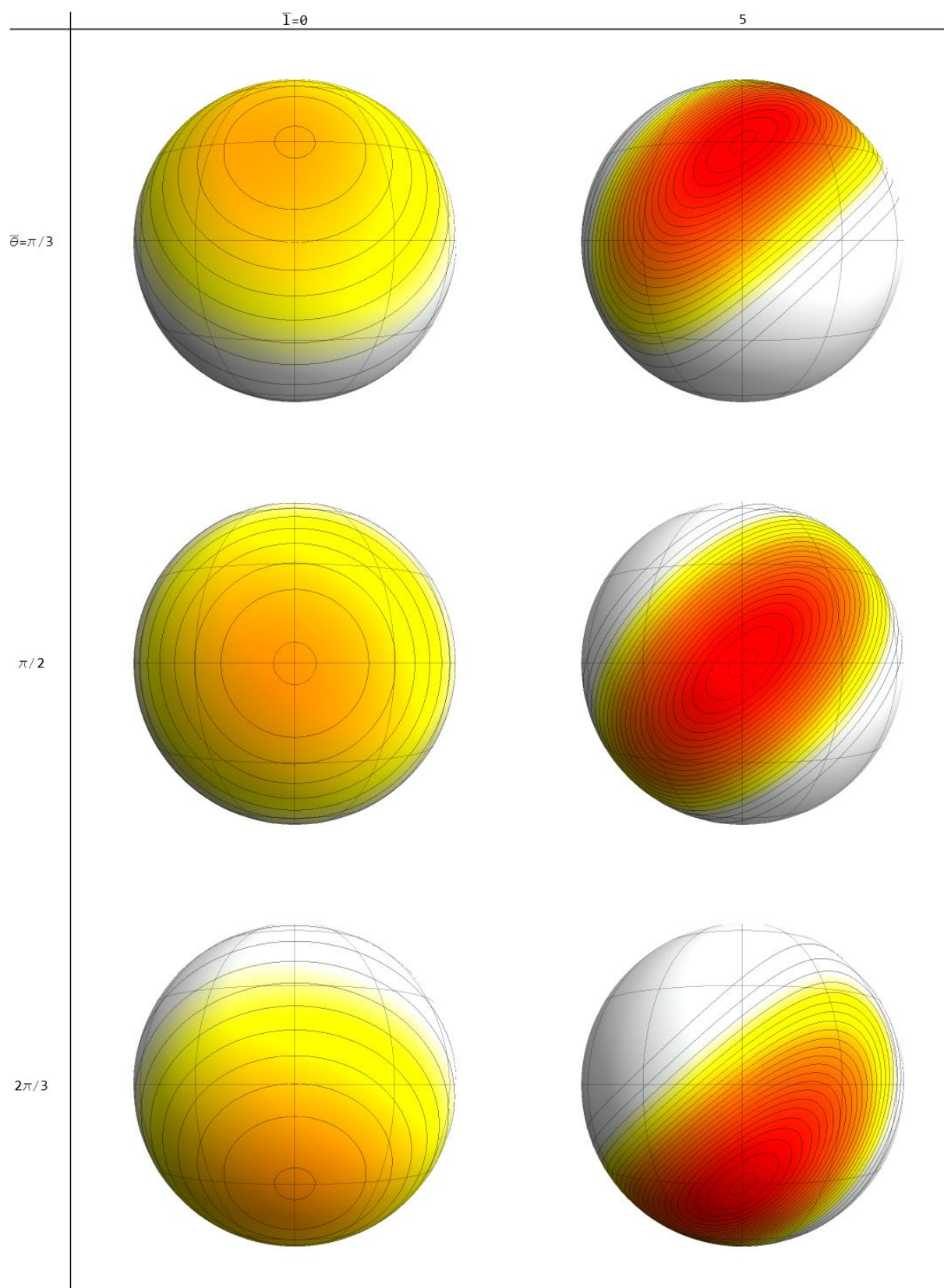
Wykres 24 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanach koherencych na sferze o momencie pędu $l_0 = 0$ i różnych wartościach θ_0, ϕ_0 .



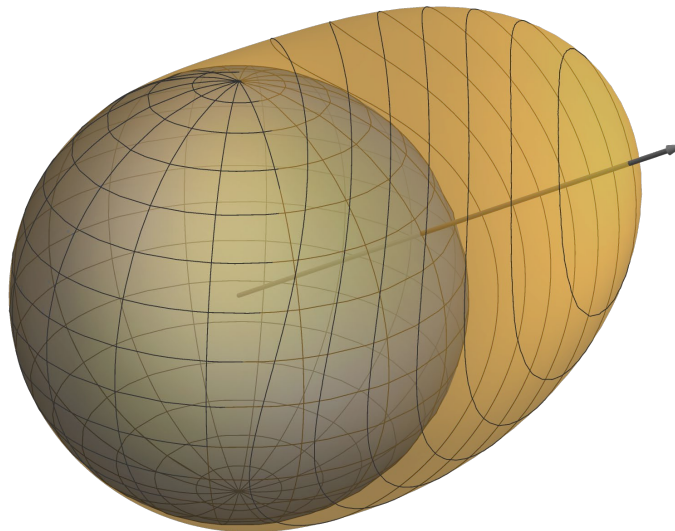
Wykres 25 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanach koherencych na sferze o parametrach $l_0 = 3$, $\alpha_0 = \pi/4$ i różnych wartościach θ_0, ϕ_0 .

Maksimum gęstości prawdopodobieństwa, inaczej dominanta jego rozkładu występuje zawsze w punkcie (θ_0, ϕ_0) parametryzującym stany koherentne.

Wyraźnie widać, że rozkład prawdopodobieństwa zachowuje swój kształt przy obrocie wokół osi z . Niezmienniczość na obroty wokół pozostałych osi lepiej widać przy odwzorowaniu rozkładów gęstości prawdopodobieństwa nad powierzchnią sfery, co przedstawia Wykres 26.



Wykres 26 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanach koherencych o parametrach $\alpha_0 = \pi/4$, $\phi_0 = 0$ i różnych wartościach θ_0 i l_0



Wykres 27 – Gęstość prawdopodobieństwa w stanie koherentnym o parametrach $\theta_0 = \pi/3$, $\phi_0 = 0$, $l_0 = 0$, $\alpha_0 = \pi/4$ wykreślona jako wysokość nad powierzchnią sfery

5.3.5.3 Dominanta i średnie

Ze względu na symetrię stanów koherentnych na sferze wokół wektora \mathbf{x}_0 , zachodzi równość:

- Dominanty D
- Średniej wewnętrznej IM
- Średniej zewnętrznej EM
- Wektora \mathbf{x}_0 parametryzującego stany koherentne.

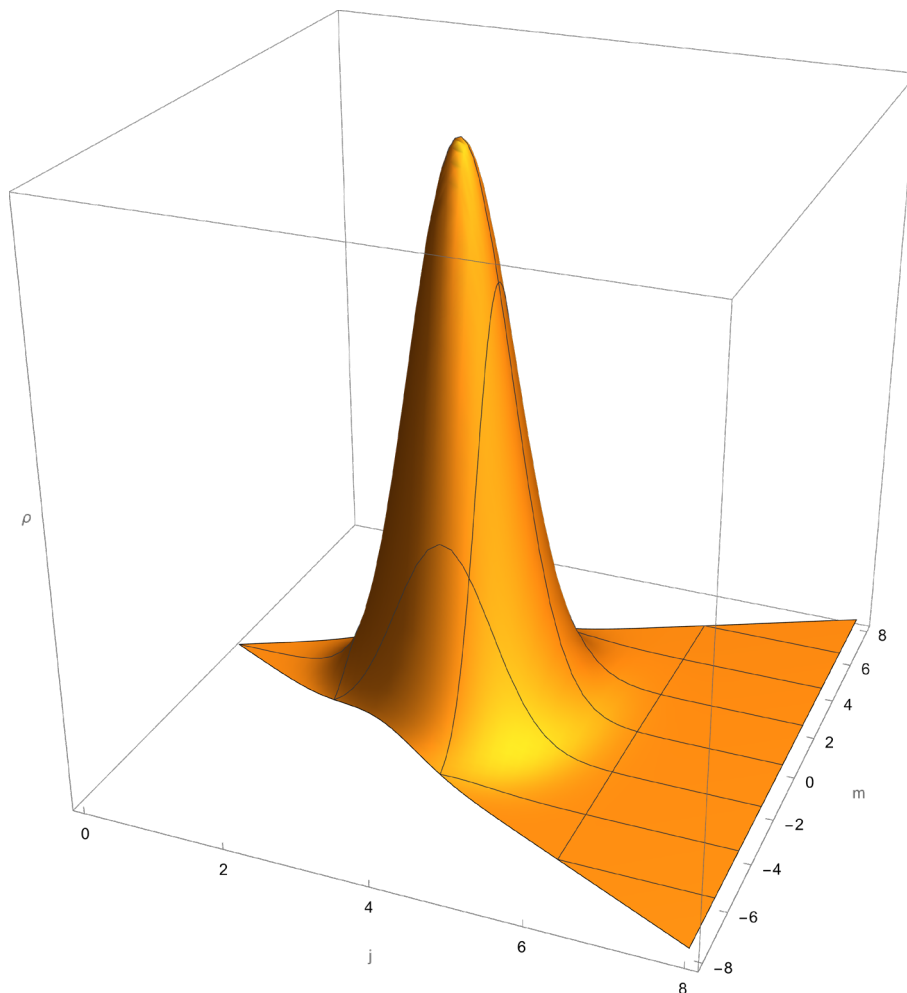
$$D = IM = EM = \mathbf{x}_0 \quad (5.3.11)$$

Analogiczny związek zachodzi dla stanów koherentnych na okręgu. W podrozdziale 4.3.9.4 zastrzeżono, że dotyczy to stanów koherentnych w chwili $t = 0$, nie zaś stanów ewoluujących w czasie. W niniejszej pracy nie badano ewolucji stanów koherentnych na sferze. Należy jednak podkreślić, że związek (5.3.11) dotyczy stanów koherentnych na sferze w chwili początkowej (lub stanów w obrazie Heisenberga).

5.3.5.4 Prawdopodobieństwa w przestrzeni $|j, m\rangle$

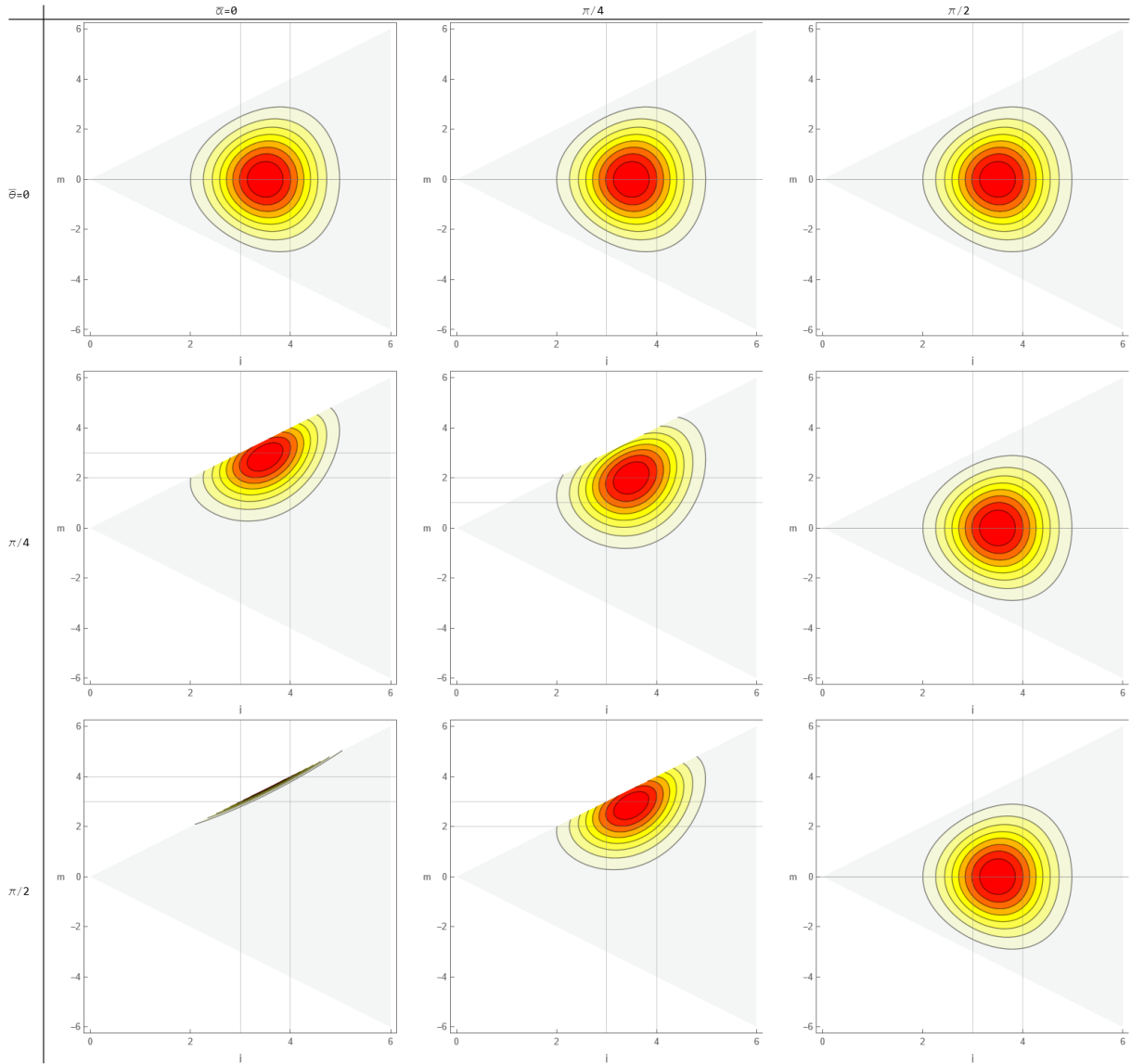
W przypadku sfery przestrzeń fazowa nie ma struktury produktowej, a jest wiązką nietrywialną. Uniemożliwia to skonstruowanie przestrzeni pędowej komplementarnej do przestrzeni położeniowej na takiej zasadzie jak w \mathbb{R}^n czy S^1 . Najbliższym jej substytutem jest przestrzeń wskaźników j, m związanych z wartościami własnymi odpowiadającymi wspólnym wektorom własnym operatorów L^2 i L_z .

Zmienne j i m są dyskretne. Dla takich też wartości zdefiniowano harmoniki sferyczne we wzorze (5.3.2). Zilustrowanie stanów koherentnych nad taką dziedziną mogłoby być mało czytelne. Toteż skorzystano z uogólnionej definicji harmonik sferycznych dla $j, m \in \mathbb{R}$ (vide uzup. 9.1).



Wykres 28 – $|f(j, m, l, \alpha_0, \theta_0, \phi_0)|^2$ jako funkcja $j \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq j$, dla ustalonych $l_0 = 4, \alpha_0 = \pi/2, \theta_0, \phi_0$ (z których θ_0, ϕ_0 nie odgrywają roli)

Wykres ten wygląda identycznie dla dowolnych θ_0, ϕ_0 , ale jego postać zależy od l_0, α_0 .



Wykres 29 – Gęstość prawdopodobieństwa $\rho(j, m, l_0, \alpha_0, \theta_0, \phi_0)$ jako funkcja $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leq j$, dla kilku różnych θ_0 , α_0 i ustalonego $l = 4$.

5.3.5.5 Maksima w przestrzeni j, m

Naturalne przyrównanie wartości własnej operatora J^2 do kwadratu klasycznej wartości momentu pędu $l^2 \approx j(j+1)$ pozwala przypuścić, że rozkład gęstości stanu koherentnego powinien być skupiony w pobliżu

$$j_t = \frac{\sqrt{4l^2 + 1} - 1}{2} \quad (5.3.12)$$

$$j_t(l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} l - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right) \quad (5.3.13)$$

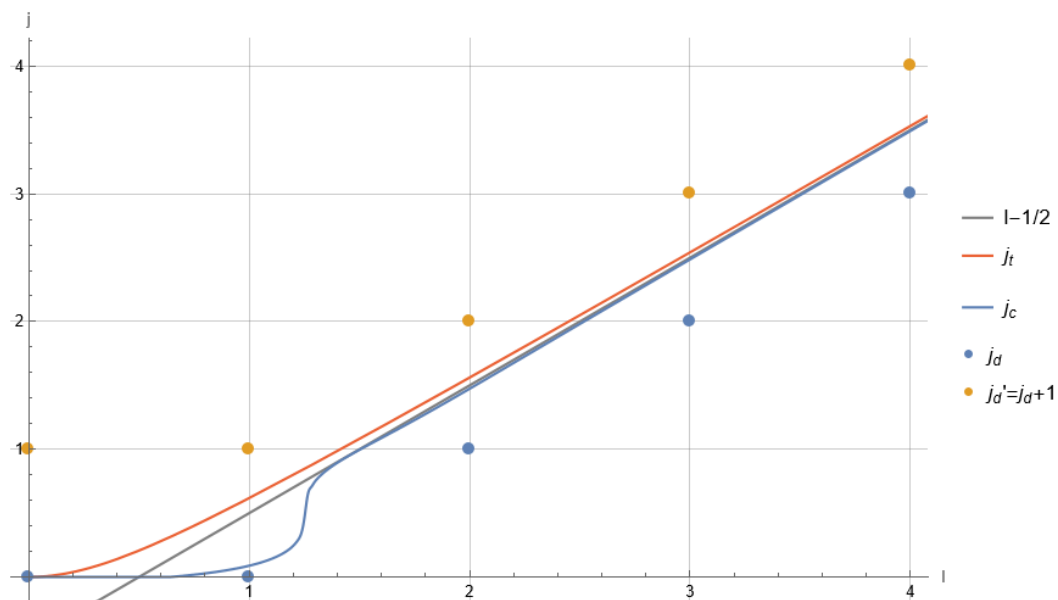
Dokładne obliczenia numeryczne pokazują, że faktyczne maksimum szybko zbliża się do wartości danej tym wzorem w miarę wzrostu l .

$$j_c \approx j_t$$

gdzie j_c jest wartością j maksymalizującą gęstość prawdopodobieństwa po $j, m \in \mathbb{R}$

Rozbieżność wynosi dla $l_0 = 1$, 0.1, dla $l_0 = 4$, 0.04, a dla $l_0 = 16$, 0.008 w liczbach bezwzględnych lub odpowiednio 0.1, 0.01, 0.0005 we względnych. Dla $l_0 = 0$, rozbieżność jest zerowa. Biorąc pod uwagę, że fizycznie znaczące wartości j są dyskretne, rozbieżność ta nie gra roli i wzór (5.3.12) stanowi wystarczające przybliżenie położenia maksimum. W istocie zastąpienie (5.3.12) rozwinięciem (5.3.13) jest najzupełniej wystarczające dla $l > 1$.

Poniżej przedstawiono położenie maksimum prawdopodobieństwa zarówno po ciągłych jak i dyskretnych argumentach j, m .



Wykres 30 – Wartość j maksymalizująca po ciągłych i dyskretnych j, m funkcję gęstości prawdopodobieństwa w stanie koherentnym jako funkcja parametru l_0

Maksimum występuje w punktach j oznaczonych na niebiesko, ale wartość w $j' = j + 1$ (oznaczonych na pomarańczowo) jest tylko minimalnie niższa.

Powyższy wykres ma identyczną postać dla dowolnych parametrów $\alpha_0, \theta_0, \phi_0$. Dyskretne maksima obliczono jako faktyczne maksima funkcji prawdopodobieństwa po dyskretnych zmiennych (j, m). (Nie zaś jako zaokrąglenie maksimum obliczanego po przestrzeni ciągłej do najbliższej wartości całkowitej, gdyż, dla rozkładów nie całkiem symetrycznych wokół swojego maksimum, to nie to samo.)

$$j_d = \max(0, l - 1) = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ l - 1 & l \geq 1 \end{cases}$$

Wartość m maksymalizująca prawdopodobieństwo w stanie $|\theta, \phi, l, \alpha\rangle$ zależy od wartości j dla której to maksimum występuje. Nie powinno to dziwić, skoro m ma interpretację rzutu wektora momentu pędu na „trzecią oś” $l_3 = l \cos \alpha \sin \theta$.

5.4 Funkcja Wignera na sferze

5.4.1 Konstrukcja funkcji Wignera na sferze

W tym podrozdziale omawiamy konstrukcję i właściwości funkcji Wignera przedstawionej we wspólnej pracy autora z K. Kowalskim [7].

W analogii do przypadku okręgu (4.4.7) zaproponowano w [7] następującą postać operatora gęstości

$$\widehat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{T_{\boldsymbol{\xi}}S^2} d\nu(\boldsymbol{\lambda}) e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot (\hat{\mathbf{J}} - \mathbf{l}) + i\boldsymbol{\lambda} \cdot (\widehat{\mathbf{X}} - \mathbf{x})} \quad (5.4.1)$$

gdzie

$$d\mu(\boldsymbol{\xi}) = d\psi d\tau \sin \tau \quad (5.4.2)$$

$$d\nu(\boldsymbol{\xi}) = d\lambda d\beta \quad (5.4.3)$$

Operator pod całką w (5.4.1) podlega rozkładowi na czynniki zgodnie ze szczególnym przypadkiem wzoru Zassenhausa (*vide* uzupełnienie 9.4).

Gdy $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = cY$, $[Y, Z] = 0$, $c \in \mathbb{C}$

$$e^{X+Y} = e^X e^{\frac{\sinh \sqrt{c}}{\sqrt{c}} Y + \frac{1 - \cosh \sqrt{c}}{c} Z} \quad (5.4.4)$$

Istotnie, algebra (5.1.4) zapewnia spełnienie tych warunków dla $X = i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ i $Y = i\boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{X}}$ ze współczynnikiem $c = -1$.

$$\begin{aligned} [i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}, i\boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{X}}] &= -i(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}} \\ [i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}, -i(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}}] &= -i\boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{X}} \\ [i\boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{X}}, -i(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}}] &= 0 \\ e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}} + i\boldsymbol{\lambda} \cdot \widehat{\mathbf{X}}} &= e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}} e^{i(\sin 1\boldsymbol{\lambda} + (1 - \cos 1)\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}}} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Dalej, z wykorzystaniem rozkładu jedności w reprezentacji położeniowej generowanej przez wektory $|\mathbf{x}'\rangle$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\ &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{T_{\boldsymbol{\xi}}S^2} d\nu(\boldsymbol{\lambda}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{l}} e^{-i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}} \times \\ &\times e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}} |\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'| e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}} e^{i(\sin 1\boldsymbol{\lambda} + (1 - \cos 1)\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}}} \end{aligned} \quad 42 \quad (5.4.6)$$

Operator $e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}}$ działa na wektory bazy położeniowej jako operator obrotu o kąt $-\gamma$ wokół wektora jednostkowego $\boldsymbol{\xi}$.

$$e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}} |\mathbf{x}\rangle = |R_{\boldsymbol{\xi}}(-\gamma)\mathbf{x}\rangle$$

gdzie $R_{\boldsymbol{\xi}}(\gamma)$ są macierzami obrotu o kąt γ wokół wektora jednostkowego $\boldsymbol{\xi}$. Rezultat obrotu wektora \mathbf{x} można obliczyć przy użyciu wzoru Rodriguesa.

$$R_{\boldsymbol{\xi}}(\gamma)\mathbf{x} = \cos \gamma \mathbf{x} + \sin \gamma \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \gamma)(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\xi}$$

42 Operator rzutowy $|\mathbf{x}'\rangle \langle \mathbf{x}'|$ można też umieścić pomiędzy $e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\mathbf{J}}}$ a $e^{i(\sin 1\boldsymbol{\lambda} + (1 - \cos 1)\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdot \widehat{\mathbf{X}}}$, jednak wówczas wynik będzie mniej symetryczny.

Natomiast operator $e^{i\mathbf{v}\cdot\widehat{\mathbf{X}}}$ (dla dowolnego wektora \mathbf{v}) działa na wektory bazy położeniowej w następujący sposób: $e^{i\mathbf{v}\cdot\widehat{\mathbf{X}}}|\mathbf{x}\rangle = e^{i\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}|\mathbf{x}\rangle$, co można natychmiast wykazać rozwijając funkcję wykładniczą operatora w postaci szeregu.

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\ &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{T_{\boldsymbol{\xi}}S^2} d\nu(\boldsymbol{\lambda}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{l}} e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}} e^{-i2\sin\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}'} \times \\ &\times |R_{\boldsymbol{\xi}}(-\frac{1}{2})\mathbf{x}\rangle \langle R_{\boldsymbol{\xi}}(+\frac{1}{2})\mathbf{x}| \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Dla dowolnego wektora \mathbf{v} , w parametryzacji opisanej w podrozdziale 5.1.1 zachodzi

$$\int_{T_{\boldsymbol{\xi}}S^2} d\nu(\boldsymbol{\lambda}) e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta e^{c_x \cos\beta + c_y \sin\beta} \quad (5.4.8)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_x &= i\lambda(-\cos\psi \cos\tau v_1 - \sin\psi \cos\tau v_2 + \sin\tau v_3) \\ c_y &= i\lambda(-\sin\psi v_1 + \cos\psi v_2) \end{aligned}$$

Oznaczmy $c_x = c \cos\gamma$, $c_y = c \sin\gamma$. Wówczas $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = i\lambda\sqrt{v^2 - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta e^{c_x \cos\beta + c_y \sin\beta} = \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta e^{c(\cos\gamma \cos\beta + \sin\gamma \sin\beta)}$$

Wynik całkowania funkcji 2π -okresowej po całym okręgu nie zależy od punktu początkowego (a zarazem końcowego – w sensie modularnym) przedziału kątów (punktu „rozcięcia” okręgu). Obracamy układ współrzędnych tak że $\sin\gamma = 0$.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\beta e^{c \cos\beta} = 2 \int_0^{\pi} d\beta e^{c \cos\beta} = 2\pi I_0(c)$$

na mocy tożsamości $\int_0^{\pi} d\beta e^{c \cos\beta} = \pi I_0(c)$, $c \in \mathbb{C}$ [40], gdzie $I_0(c)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju (*vide* uzup. 9.1). Następnie z wykorzystaniem tożsamości $I_0(ir) = J_0(r)$, $r \in \mathbb{R}$ ([3], wz. 03.02.27.0002.01), gdzie $J_0(c)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju (*vide* uzup. 9.1) i $\int_0^{\infty} dr J_0(rc) = \frac{1}{c}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (z przekształcenia [3], wz. 03.01.21.0075.01).

$$\int_{T_{\boldsymbol{\xi}}S^2} d\nu(\boldsymbol{\lambda}) e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}} = 2\pi \int_0^{\infty} d\lambda J_0(\lambda\sqrt{v^2 - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}) = \frac{2\pi}{\sqrt{v^2 - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\xi})^2}}$$

Ostatecznie, operator gęstości ma postać

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\ &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{l}}}{\sqrt{(2\sin\frac{1}{2}\mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 - ((2\sin\frac{1}{2}\mathbf{x}' - \mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\xi})^2}} \times \\ &\times |R_{\boldsymbol{\xi}}(-\frac{1}{2})\mathbf{x}'\rangle \langle R_{\boldsymbol{\xi}}(+\frac{1}{2})\mathbf{x}'| \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Natomiast funkcja Wignera $W_f(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \langle f|\widehat{W}(\mathbf{x}, \mathbf{l})|f\rangle$ jest dana wzorem

$$\begin{aligned}
 W_f(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\
 &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{l}}}{\sqrt{(2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 - ((2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi})^2}} \times \\
 &\quad \times f(R_{\boldsymbol{\xi}}(-\frac{1}{2})\mathbf{x}')^* f(R_{\boldsymbol{\xi}}(+\frac{1}{2})\mathbf{x}')
 \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

gdź $\langle \mathbf{x} | f \rangle = f(\mathbf{x})$. Ta postać funkcji Wignera nie jest unormowana.

5.4.2 Właściwości funkcji Wignera na sferze

W pierwszym rzędzie należy sprawdzić czy znaleziona funkcja Wignera na sferze zachowuje podstawowe właściwości znane z przypadku \mathbb{R}^n i utrzymane w S^1 (*vide* podrozdz. 4.4.2), mianowicie: rzeczywistość, normalizację i ograniczoność.

5.4.2.1 Rzeczywistość

Funkcja podcałkowa we wzorze (5.4.1) ma postać $e^{i\boldsymbol{\xi} \cdot (\hat{J} - \mathbf{l}) + i\boldsymbol{\lambda} \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x})}$. Jej sprzężenie zespolone jest równoważne przekształceniu $\boldsymbol{\xi} \rightarrow -\boldsymbol{\xi}$ i $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow -\boldsymbol{\lambda}$. Miara $d\mu(\boldsymbol{\xi})d\nu(\boldsymbol{\lambda})$ jest niezmiennicza na tę transformację. Zatem operator gęstości \widehat{W} jest hermitowski i w konsekwencji, funkcja $W = \langle f | \widehat{W} | f \rangle$ jest rzeczywista.

5.4.2.2 Normalizacja

Funkcja W dana wzorem (5.4.10) nie jest znormalizowana. Jej całka po przestrzeni fazowej jest jednak skończona, więc zawsze można wprowadzić współczynnik normalizacyjny. Współczynnik ten zależy od stanu f i zdaje się nie wyrażać prostą funkcją.

5.4.2.3 Ograniczoność

Ograniczoność funkcji Wignera jest związana z nieoznaczonością położenia i pędu. Funkcja Wignera nie może przyjmować dowolnie dużych wartości, co wyklucza dowolnie wąskie zlokalizowanie rozkładu prawdopodobieństwa.

Wykazanie ograniczoności funkcji Wignera dla sfery w ogólności wydaje się zadaniem trudnym. Można jednak pokazać jej ograniczoność w stanach koherentnych (5.3.10). Ma to sens o tyle, że jeśli stany koherentne na sferze są również stanami o minimalnej nieoznaczoności, to ograniczoność funkcji Wignera w tych stanach pociąga za sobą jej ograniczoność w ogólności. W ([7], rozdz. 4) przedstawiono dowód, że istotnie

$$|W_{a,l}(x, j)| \leq \frac{\pi^2}{1 - 2 \sin \frac{1}{2}}$$

Natomiast w stanach $|l, m\rangle$

$$|W_{l,m}(x, j)| \leq \frac{\pi^2(2l + 1)}{1 - 2 \sin \frac{1}{2}}$$

Dla $l \rightarrow \infty$ rozkład kwaziprawdopodobieństwa może przyjmować dowolnie duże wartości, jak w przypadku klasycznym. Może jednak przyjmować też dowolnie duże wartości ujemne.

Warto zauważyć, że ograniczenie to znaleziono dla stanów koherentnych otrzymanych z (5.3.9) przez wybór $\tau = \hbar/r^2 = \hbar$. Jak wiemy z przypadku okręgu (por. podrozdz. 4.3.9.2), wybór τ związany jest z dyspersją stanu w zmiennej położeniowej. Choć znalezione ograniczenie nie zależy od parametrów stanu a, l , to może zależeć od owej dyspersji.

5.4.3 Funkcja Wignera w stanach koherentnych na sferze

Wykonano obliczenia numeryczne⁴³ funkcji Wignera (5.4.10) w stanach koherentnych na sferze (5.3.4) z parametrami (5.3.5) danej wzorem

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\ &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{l}}}{\sqrt{(2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 - ((2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi})^2}} \times \\ &\times \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0 | R_{\boldsymbol{\xi}}(-\frac{1}{2}) \mathbf{x}' \rangle \langle R_{\boldsymbol{\xi}}(+\frac{1}{2}) \mathbf{x}' | \mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0 \rangle f \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Choć badana przestrzeń konfiguracyjna jest zwykłą dwuwymiarową sferą, przestrzeń fazowa jest już czterowymiarowa, więc wizualizacja funkcji zdefiniowanych na tej przestrzeni jest kłopotliwa. Pewien wgląd w zachowanie takich funkcji zapewniają przekroje całej przestrzeni argumentów uzyskane przez ustalenie dwóch z czterech argumentów. Szczególnie istotne są przekroje zdefiniowane przez płaszczyzny przechodzące przez środek rozkładu W . Zachowanie funkcji Wignera w stanach koherentnych przedstawiono na kilka sposobów w dwóch wybranych stanach: z zerowym momentem pędu i niezerowym (ale dalekim od granicy klasycznej). Wybrano następujące stany⁴⁴:

- A. $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \phi_0 = 0, l_0 = 0$ (α_0 – dowolne) i
- B. $\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \phi_0 = 0, l_0 = 8, \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$

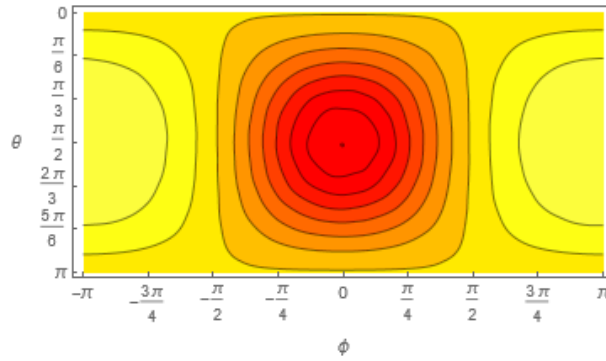
5.4.3.1 Funkcja Wignera we współrzędnych położenia dla ustalonych l i σ .

Wykreślono rozkład W w funkcji argumentów θ, ϕ na przekroju przestrzeni argumentów dla ustalonych $l = l_0$ i $\alpha = \alpha_0$.

Należy pamiętać, że ze względu na nietrywialną strukturę wiązki stycznej, taki przekrój przestrzeni argumentów w ogólności nie odpowiada globalnemu przekrojowi wiązki. Jedynym globalnym przekrojem wiązki stycznej TS^2 nad sferą S^2 jest przekrój zerowy, czyli przekrój dla $l = 0$.

⁴³ Należy wspomnieć, że poziom złożoności obliczeniowej przywoływanych obliczeń numerycznych jest znaczny. Wynika to głównie z konieczności całkowania w wielu wymiarach, także funkcji szybkozmiennych względem zmiennej całkowania. W celu wykonania niezbędnych obliczeń w rozsądnym czasie, wykorzystano komputer dużej mocy.

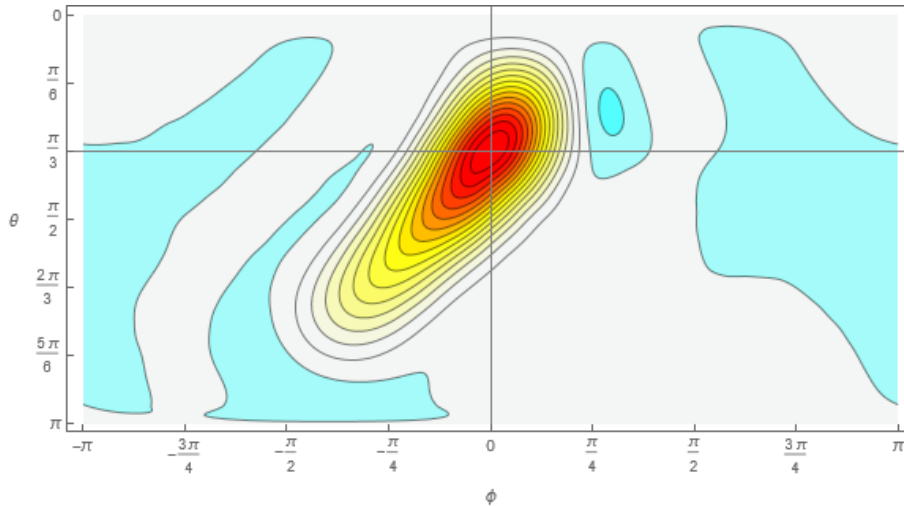
⁴⁴ Ponieważ symetria na obroty w ϕ jest jawna, wybór ϕ_0 do przykładu nie ma znaczenia. θ_0 wybrano tak aby punkt \mathbf{x}_0 nie znalazł się w wyróżnionych położeniach: na biegunach lub równiku. Kąt α_0 wybrano tak żeby ani wektor momentu pędu ani kierunek ruchu na powierzchni sfery nie pokrywał się z południkiem.



Wykres 31 – Funkcja Wignera w stanie koherentnym na sferze o parametrach $\theta_0 = \pi/2, \phi_0 = 0, l_0 = 0$ we współrzędnych sferycznych dla ustalonego $l = l_0$

Obserwujemy wyraźne maksimum w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ parametryzującym stan koherentny. Funkcja jest dodatnia na całym przekroju $l = l_0$.

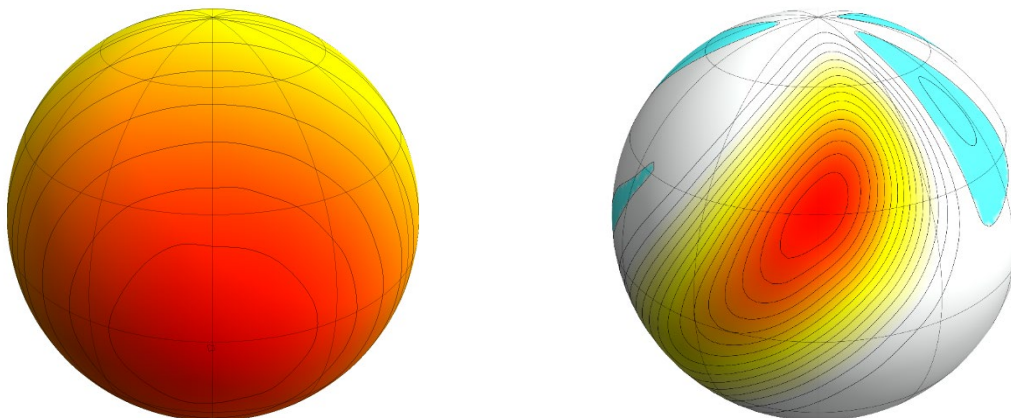
Z wykresem tym warto porównać Wykres 24 w podrozdziale 5.3.5.2 przedstawiający kwadrat modułu funkcji falowej stanów koherentnych na sferze.



Wykres 32 - Funkcja Wignera w stanie koherentnym na sferze o parametrach $\theta_0 = \pi/3, \phi_0 = 0, l_0 = 8, \sigma_0 = \pi/4$ we współrzędnych sferycznych dla ustalonego $l = l_0$

Obserwujemy wyraźne maksimum w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ parametryzującym stan koherentny. Pojawiają się obszary, gdzie funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Ponieważ zmienne θ, ϕ parametryzują położenie na sferze, naturalnym sposobem przedstawienia funkcji zdefiniowanej na tej przestrzeni argumentów jest odwzorowanie wartości funkcji nad powierzchnią sfery.



a. $\theta_0 = \pi/2, \phi_0 = 0, l_0 = 0$

b. $\theta_0 = \pi/3, \phi_0 = 0, l_0 = 8, \sigma_0 = \pi/4$

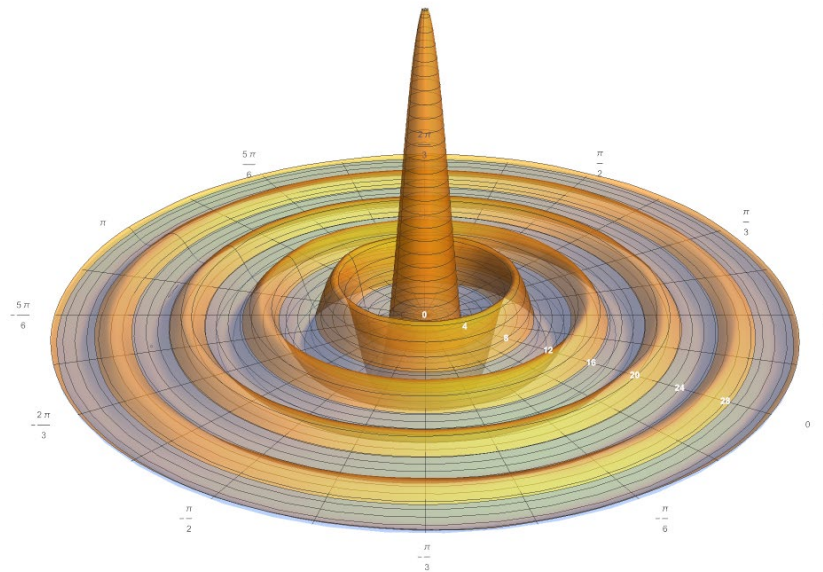
Wykres 33 – Funkcja Wignera w dwóch stanach koherencych na sferze o podanych parametrach wykreślona na powierzchni sfery dla ustalonych $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$

Rozkład Wignera jest skupiony wokół punktu $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. W przypadku stanów z niezerowym momentem pędu można zauważyć rozciągnięcie rozkładu w kierunku prostopadłym do wektora momentu pędu (w kierunku ruchu na powierzchni sfery). Rozkład (we współrzędnych θ, ϕ) nie pozwala na rozróżnienie ruchów w przeciwnych kierunkach. Stopień rozciągnięcia rozkładu rośnie wraz z wartością momentu pędu l_0 parametryzującego stan.

5.4.3.2 Funkcja Wignera w przestrzeni pędów dla ustalonego położenia

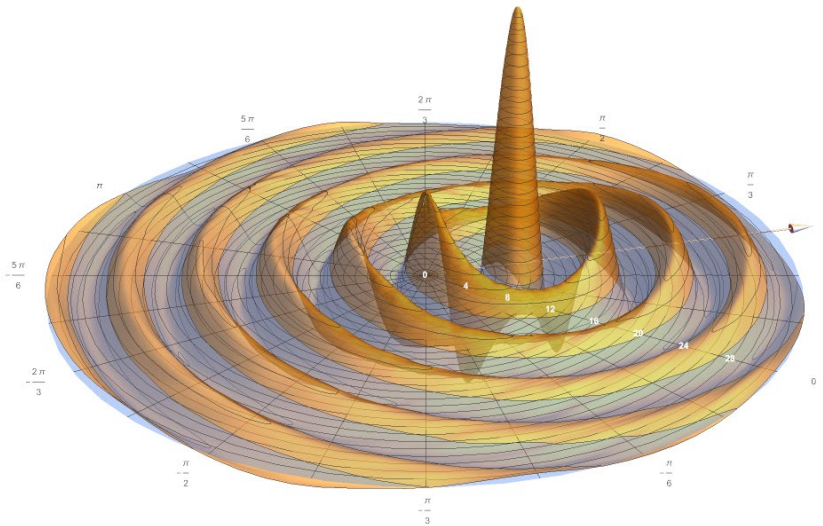
Rozkład Wignera został wykreślony w funkcji argumentów l, α parametryzujących przestrzeń styczną w punkcie $\theta = \theta_0, \phi = \phi_0$.

W przeciwieństwie do przekroju przestrzeni argumentów dla stałych l, α , przekrój ten, zdefiniowany dla stałych θ, ϕ , ma prosty sens geometryczny. Jest to pojedyncze włókno wiązki, a dokładniej pojedyncza przestrzeń wektorowa $T_{\mathbf{x}}S^2$ styczna do S^2 w punkcie $\mathbf{x}(\theta, \phi)$. Przypadek z zerowym momentem pędu przedstawia Wykres 34.



Wykres 34 – Funkcja Wignera w stanie koherentnym o zerowym momencie pędu na sferze wykreślony na przestrzeni stycznej do sfery w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ (parametryzowanej zmiennymi l i α).

Postać tego wykresu nie zależy od \mathbf{x}_0 . Obserwujemy ostre maksimum w punkcie $l = 0$. Występują oscylacje w postaci współśrodkowych pierścieni wokół maksimum. Przypadek z $l_0 \neq 0$ ilustruje Wykres 35.

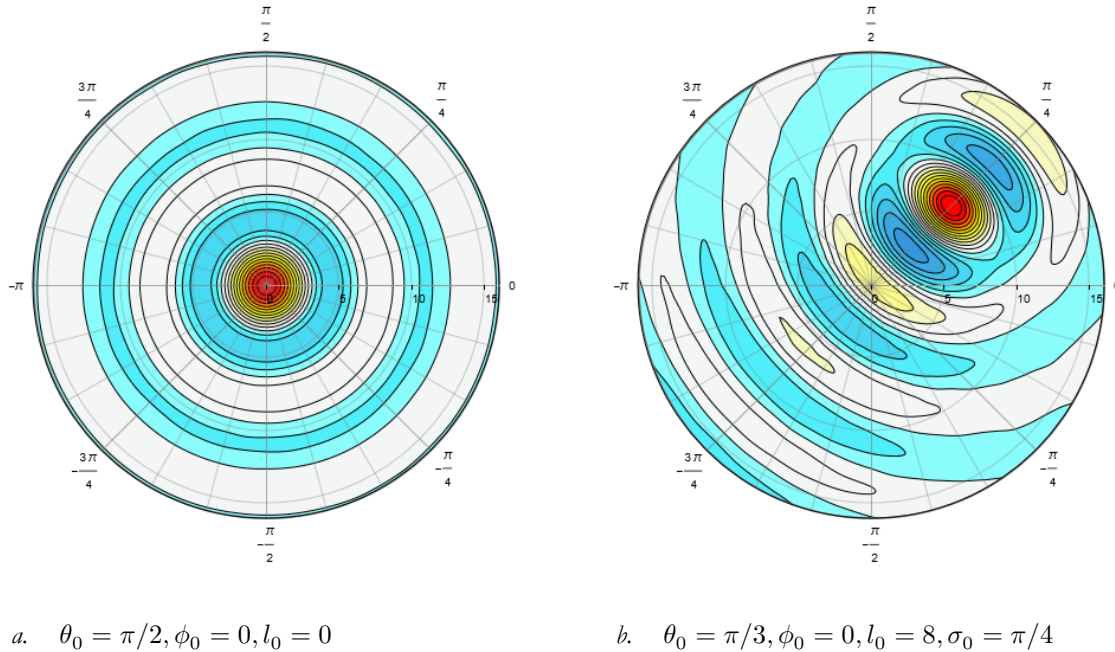


Wykres 35 – Funkcja Wignera w stanie koherentnym o $l_0 = 8$, $\sigma_0 = \pi/4$ na sferze wykreślony na przestrzeni stycznej do sfery w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ (parametryzowanej zmiennymi l i α)

Maksimum występuje dla $l \approx l_0$, dokładniej, dla $\alpha = \alpha_0$ i $l \approx l_0$, przy czym błąd bezwzględny jest mniejszy niż 0.5 dla $l_0 = 1$ i maleje ze wzrostem l_0 , tak że dla $l_0 = 8$ wynosi już

mniej niż 0.1⁴⁵. Oscylacje również mają postać pierścieni wokół maksimum z tym, że są nieco silniejsze wzdłuż kierunku α_0 .

Tę samą treść można przedstawić być może jeszcze bardziej przejrzysto za pomocą wykresów konturowych które zawiera Wykres 36.



Wykres 36 – Funkcja Wignera w dwóch stanach koherentnych na sferze o podanych parametrach wykreślona na przestrzeni stycznej do sfery w punktach $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ (parametryzowanej zmiennymi l i α)

5.4.4 Funkcja Wignera w stanach $|j, m\rangle$

Wykonano obliczenia numeryczne funkcji Wignera w stanach $|j, m\rangle$ mającej postać

$$\begin{aligned}
 W_{j,m}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) &= \\
 &= \int_{S^2} d\mu(\boldsymbol{\xi}) \int_{S^2} d\mu(\mathbf{x}') \frac{e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{l}}}{\sqrt{(2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x})^2 - ((2 \sin \frac{1}{2} \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi})^2}} \times \\
 &\times \langle j, m | R_{\boldsymbol{\xi}}(-\frac{1}{2} \mathbf{x}') \rangle \langle R_{\boldsymbol{\xi}}(+\frac{1}{2} \mathbf{x}') | j, m \rangle
 \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

gdzie rzut stanu $|j, m\rangle$ na bazę położeniową wyraża się harmonikami sferycznymi $\langle x | j, m \rangle = Y_j^m(x)$ zdefiniowanymi w uzupełnieniu 9.1.

5.4.4.1 Położenie maksimum

Zawsze występuje wyraźne maksimum lokalne dla $\theta = \frac{\pi}{2}$. Wzdłuż ϕ nie obserwujemy zmienności wartości funkcji Wignera (5.4.12). Maksimum przyjmuje postać okręgu parametryzowanego przez ϕ . Współrzędna l maksimum znajduje się w przedziale $l_{\max} \in (j, j+1)$. Sprawdzona numerycznie współrzędna σ maksimum zgadza się (na ile pozwala dokładność numeryczna) z relacją $l_z = l \cos \alpha \sin \theta$ wynikającą wprost ze związku $\vec{l} \cdot \vec{x} = 0$ i parametryzacji tych wektorów.

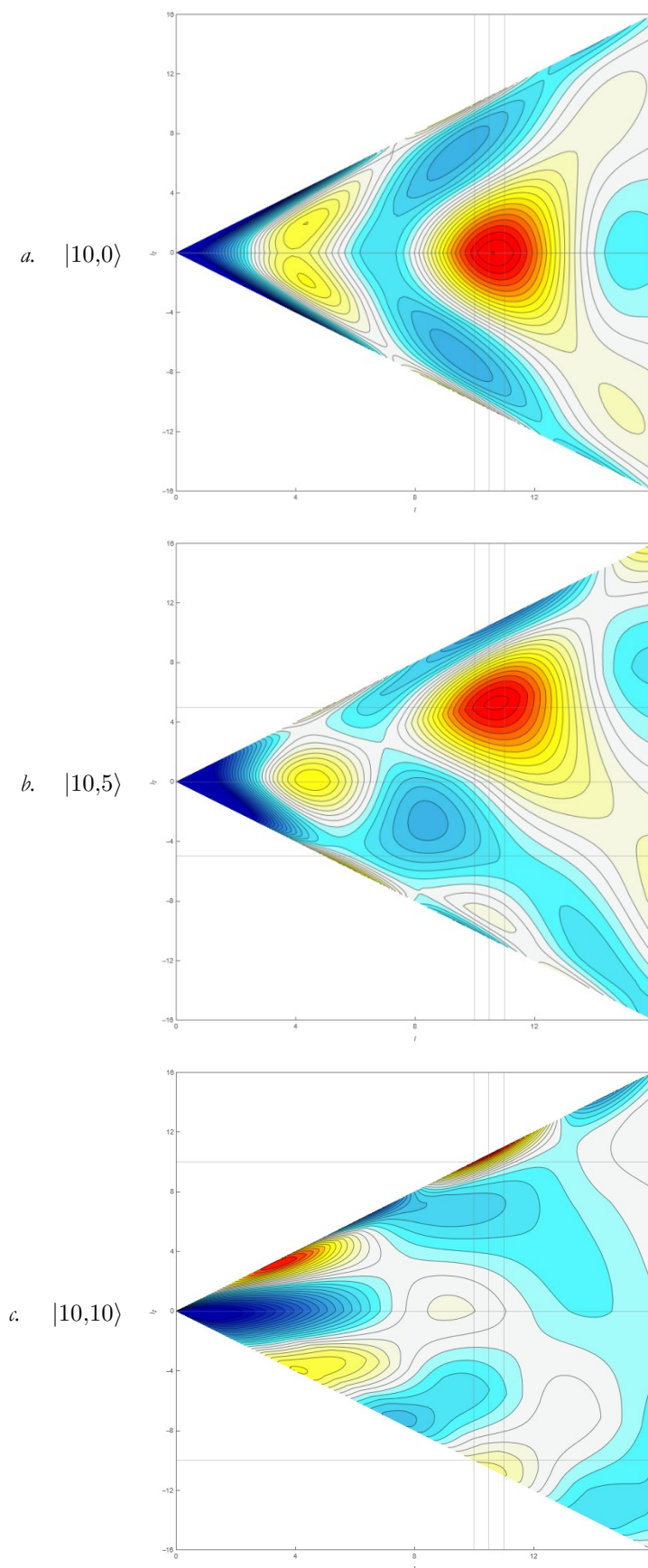
⁴⁵ Błąd względny jest wówczas rzędu 0.01.

Mianowicie maksimum funkcji Wignera obserwujemy dla $\alpha = \pm \arccos(l_z/l \sin \theta)$, gdy za l_z podstawimy m , a za l podstawimy l_{\max} , zaś θ wybierzemy równe $\pi/2$ (wartość maksymalizująca). Maksimum to ma następujące właściwości:

- Występuje w 2 kopiach o przeciwnych współrzędnych σ (oczywiście z wyłączeniem przypadku, gdy $\alpha = 0$ lub π , który zachodzi dla $m = \pm j$; wówczas maksimum to jest pojedyncze).
- Jest rozciągnięte wzdłuż ϕ na cały przedział zmienności ϕ .
- Towarzyszą mu (przeważnie znacznie niższe) maksima w innych położeniach.
- W większości zbadanych przypadków maksimum to jest maksimum globalnym, ale dla niektórych wartości parametrów j, m pojawia się też dodatkowe, nawet wyższe maksimum dla $\alpha = 0$ lub π . Wygląda ono na efekt szczególnej interferencji wspomnianych maksimów towarzyszących. Na tej samej zasadzie dla $\alpha = 0$ lub π obserwujemy też głębokie minima.

5.4.4.2 Rozkład Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ w przestrzeni l, l_z

Wykres 37 przedstawia rozkład Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ na przestrzeni l, l_z .

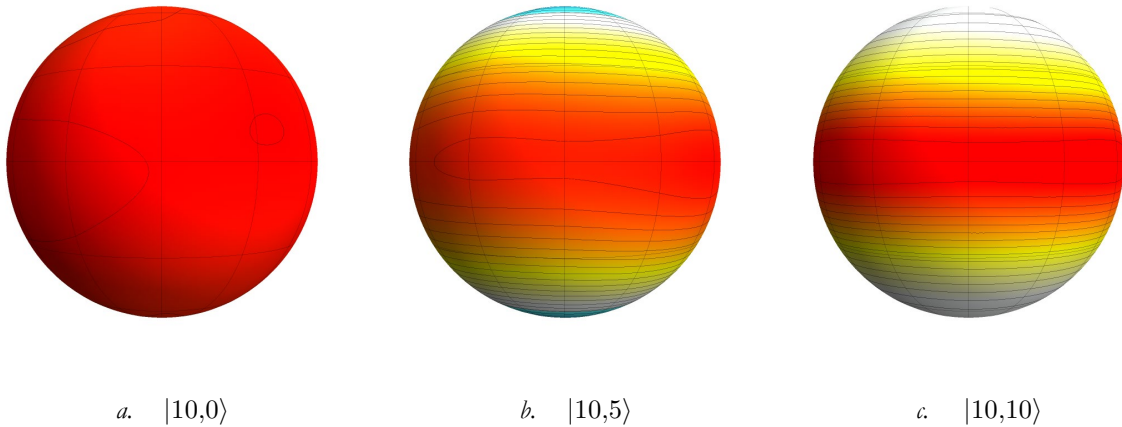


Wykres 37 – Rozkład Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ w przestrzeni l, l_z

Warto porównać te wykresy z wykresami kwadratu modułu stanów koherentnych na sferze w przestrzeni j, m (Wykres 29 w podrozdz. 5.3.5.4).

5.4.4.3 Rozkład W w stanach $|j, m\rangle$ w przestrzeni położenia

Poniżej zilustrowano rozkład Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ na przestrzeni położenia, czyli na powierzchni sfery.



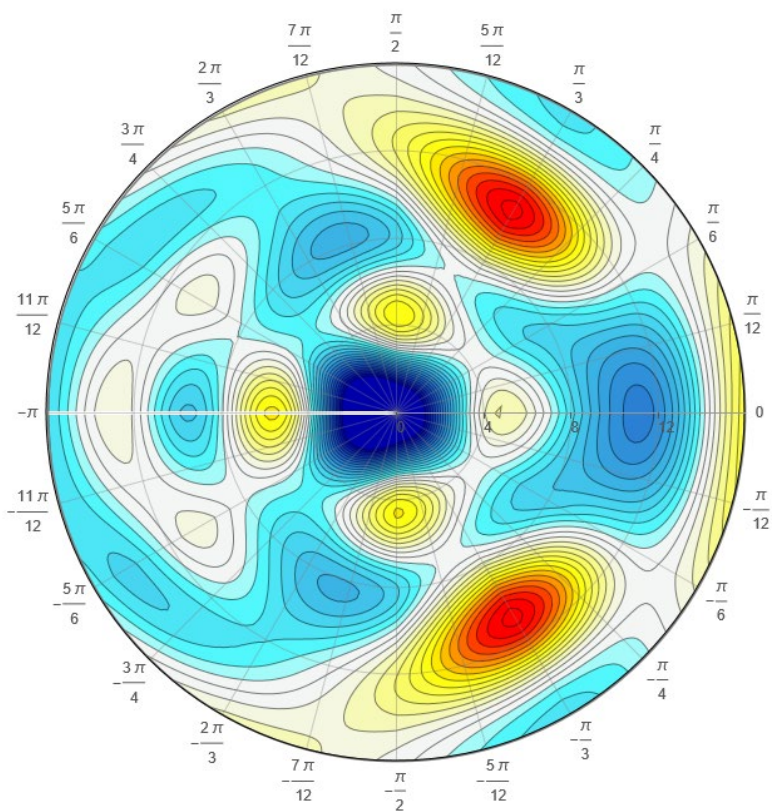
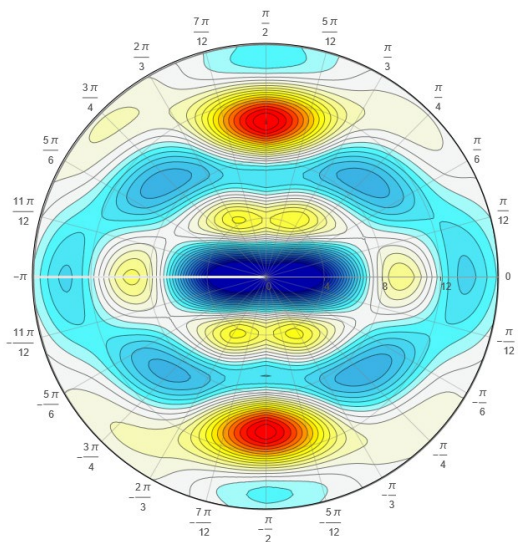
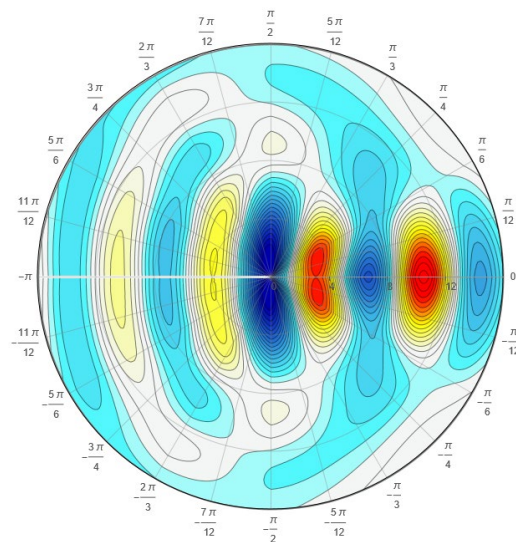
Wykres 38 – Rozkład W w wybranych stanach $|l, m\rangle$ na powierzchni sfery

W stanach $|j, 0\rangle$ funkcja Wignera jest funkcją stałą na powierzchni sfery. W stanach $|j, m\rangle, |m| > 0$, maksimum osiągnięte jest dla $\theta = \pi/2$ i rozciąga się w postaci okręgu dla $\phi \in [-\pi, +\pi)$.

5.4.4.4 Położenie maksimów w stanach $|j, m\rangle$ w przestrzeni momentów pędu

Jak wyjaśniono w podrozdziale 5.4.3, w przypadku sfery nie istnieje przestrzeń pędowa, taka jak w przypadku \mathbb{R}^n czy S^1 , gdyż wiązka TS^2 nie ma struktury iloczynowej. Nie przeszkadza to jednak w badaniu rozkładu W na przestrzeniach $T_x S^2$ stycznych do S^2 w wybranym punkcie x .

Wykres 39 przedstawia wartości funkcji Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ na przestrzeni stycznej do sfery w punkcie $\theta = \pi/2$, ϕ – dowolne.

b. $|10,5\rangle$ a. $|10,0\rangle$ c. $|10,10\rangle$

Wykres 39 – Wartości funkcji Wignera w wybranych stanach $|j, m\rangle$ na przestrzeni stycznej do sfery w punkcie $\theta = \frac{\pi}{2}$, ϕ – dowolne

Funkcja Wignera stanu $|j, m\rangle$ osiąga maksimum dla $l \in [j, j + 1]$ i $l_3 \approx m$. Biorąc pod uwagę, że $j(j + 1)$ jest wartością własną operatora $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\sqrt{j(j + 1)}$ można interpretować jako klasyczną wartość momentu pędu. Wartość ta faktycznie należy do przedziału $[j, j + 1]$ tak jak l maksymalizujące funkcję Wignera.

5.4.5 Alternatywne podejścia do konstrukcji funkcji Wignera dla sfery

5.4.5.1 *Podejście Alonso, Pogosayana i Wolfa*

Jedynym do czasu opublikowania wyników [7], znanym autorowi podejściem do skonstruowania funkcji Wignera na sferze jest propozycja Alonso, Pogosayana i Wolfa [36]. Ich funkcja Wignera jest funkcją położenia na sferze $x \in S^n$ i specyficznie skonstruowanej zmiennej pędowej ([36], podrozdz. II D). Zmienne te jednak nie parametryzują klasycznej przestrzeni fazowej dla cząstki na sferze. Jest to zatem koncepcja istotnie odmienna od funkcji Wignera znanej z \mathbb{R}^n czy S^1 , które określone są na przestrzeni fazowej, tj. wiązce stycznej do przestrzeni konfiguracyjnej.

5.4.5.2 *Perspektywa wykorzystania metody obejmującej transformację Segala-Bargmanna, funkcję Husimiego i odwrotną transformację Gaussa-Weierstrassa*

Zastosowanie uogólnionej metody znajdowania funkcji Wignera zaproponowanej przez autora w rozdziale I, wiodącej poprzez transformację Segala-Bargmanna, funkcję Husimiego i (uogólnioną) odwrotną transformację Gaussa-Weierstrassa do przypadku sfery wydaje się obiecującym tematem dalszych badań. Otrzymanie funkcji Husimiego przez odpowiednią w przypadku sfery transformację Segala-Bargmanna funkcji falowej ([17], prop. 6) nie stanowi problemu. Dalej, przedstawiona metoda wymaga odplecenia (dekonwolucji) jądra cieplnego właściwego w przypadku sfery (*vide* podrozdz. 5.3.3) od otrzymanej funkcji Husimiego. W przypadkach \mathbb{R}^n oraz S^1 osiągnięto to poprzez twierdzenie o splocie i (odpowiednie) transformacje Fouriera. Znalezienie właściwego sposobu przeprowadzenia tego kroku dla sfery i innych rozmaitości oraz zbadanie właściwości otrzymanej funkcji będzie przedmiotem dalszych prac.

VI Uogólniona konstrukcja funkcji Wignera dla nietrywialnych rozmaitości

za pomocą transformacji Segala-Bargmanna, funkcji Husimiego i odwrotnej transformacji Gaussa-Weierstrassa

Istnieje jeszcze inna droga otrzymania funkcji Wignera na rozmaitościach innych niż \mathbb{R}^n . Konstrukcję tę, zamieszczono w osobnym rozdziale, gdyż jest, o ile autorowi wiadomo, rzeczą nową. Co do zasady może być zastosowana w dowolnych przestrzeniach symetrycznych. Konkretna jej realizacja w poszczególnych przestrzeniach może się jednak istotnie różnić. Metodę tę przetestowano w przypadku \mathbb{R}^n i S^1 uzyskując, dla \mathbb{R}^n , wyniki zgodne ze standardowymi i, dla S^1 , z wynikami [6] oraz [34] przedstawionymi w podrozdziale 4.3.10.

6.1 Ogólny zarys metody

W celu znalezienia funkcji Wignera należy przeprowadzić transformację Segala-Bargmanna funkcji falowej, na jej podstawie wyznaczyć rozkład kwaziprawdopodobieństwa Q Husimiego i wreszcie odpleść (wykonać de-konwolucję) od niego odpowiednik gaussianu w danej przestrzeni (w istocie jądro cieplne), który wygładzał funkcję Wignera czyniąc z niej funkcję Husimiego.

Uogólnienie transformacji Segala-Bargmanna i rozkładu kwaziprawdopodobieństwa Husimiego na dowolną sferę S^n opracował Hall [11]; natomiast przekształcenie rozkładu Husimiego na sferze S^n w rozkład Wignera przed odplecenie jądra cieplnego, które jest, w dobrze uzasadnionym sensie, uogólnieniem rozkładu normalnego (*vide* podrozdz. 4.2.6) na nietrywialne dziedziny stanowi propozycję autora i wedle jego wiedzy jest nowe.

Podsumowując, do znalezienia funkcji Wignera potrzebne są następujące kroki:

1. Transformacja Segala-Bargmanna funkcji falowej f określonej w przestrzeni położeniowej do funkcji F na przestrzeni fazowej.
2. Rozkład kwaziprawdopodobieństwa Husimiego jako kwadrat modułu F (z odpowiednią miarą).
3. De-konwolucja (via transformacje Fouriera).

6.2 Szczegółowa droga obliczeń

2. Etap pierwszy ([28]; [11], rozdz. 9)
 - a. Punktem wyjścia jest określona rozmaitość K pełniąca rolę przestrzeni konfiguracyjnej.
 - b. Określamy w niej odpowiedni laplasjan Δ , zapisujemy równanie przewodnictwa cieplnego, uwzględniamy warunki brzegowe, warunki okresowości i znajdujemy jądro

- cieplne. Dla wielu interesujących przestrzeni odpowiednie jądra ciepłne są znane, np. dla sfer znajdziemy je w pracy [17].
- c. Traktujemy jądro ciepłne wzięte dla $\tau = 1$ ⁴⁶ jako miarę μ na przestrzeni K
 - d. Znajdujemy przedłużenie analityczne μ do dziedziny zespolonej: μ_{AC} .
 - e. Wykonujemy kompleksyfikację $K: K_{\mathbb{C}}$. Dla wielu interesujących przestrzeni, w tym \mathbb{R}^n i S^n , postać $K_{\mathbb{C}}$ jest znana.
 - f. Określamy w niej laplasjan $\Delta_{\mathbb{C}}$, zapisujemy równanie przewodnictwa ciepłnego, uwzględniamy warunki brzegowe, warunki okresowości i znajdujemy jądro ciepłne na $K_{\mathbb{C}}$.
 - g. Traktujemy jądro ciepłne wzięte dla $\tau = 1$ jako miarę $\mu_{\mathbb{C}}$ ⁴⁷ na $K_{\mathbb{C}}$. Co ważne, funkcja ta jest jednocześnie jądrem (uogólnionej) transformacji Weierstrassa na $K_{\mathbb{C}}$.
 - h. Całkujemy $\mu_{\mathbb{C}}$ po K , tak że otrzymana miara ν na $K_{\mathbb{C}}$ zależy tylko od zmiennych w kierunku urojonym.
 - i. Bierzemy funkcję falową w przestrzeni położeniowej f wybranego stanu.⁴⁸ Jeśli pracujemy ze stanem koherentnym HKCS, to ma on postać dokładnie taką jak μ (na K).⁴⁹
 - j. Przeprowadzamy transformację Segala-Bargmanna⁵⁰, czyli wykonujemy spłot (konwolucję)⁵¹ na K funkcji f z przedłużoną analitycznie miarą μ_{AC} .

$$F(z) = (f * \mu_{AC})(z) = \int_K d\lambda(x) f(x) \mu_{AC}(x - z) \quad (6.2.1)$$

$z \in \mathbb{C}^d$,⁵²

- k. Otrzymujemy F – funkcję falową w przestrzeni fazowej. Dla $f(q)$, $F(\chi)$, gdzie $z = q + ip$, przy czym p ma interpretację pędu sprzężonego do q . $F(\chi) \in \mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}}, \nu)$

⁵³

46 Gdzie „1” jest w istocie pewną stałą bezwymiarową powstałą z kombinacji stałych fizycznych ustanawiających skalę w danym zagadnieniu. W wybranym tu układzie jednostek $\tau = \hbar/r^2$.

47 Nie jest to to samo co μ_{AC}

48 Najłatwiej zrobić to dla stanów koherentnych typu jądro ciepłne, HKCS, gdyż same mają strukturę matematyczną podobną do używanych miar oraz korzystne własności przy całkowaniu i transformacji Fouriera i można liczyć na poważne uproszczenia.

49 Dla sfer dowolnego wymiaru stany te są znane. W wymiarach 2, 4, 6, ... mają jednak złożoną formę matematyczną. Dotyczy to też miary opartej o jądro ciepłne (heat kernel measure). Przypadek S^3 wydaje się łatwiejszy od S^2 .

50 Hall przedstawia 3 wersje tej transformacji oznaczane w pracy [11] literami A, B i C. Korzystam z wersji C, którą Hall wskazuje jako najdogodniejszą dla uogólnień. $F: L^2(\mathbb{R}^d, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^d, \nu)$. W przestrzeni $\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}^d, \nu)$ obowiązuje metryka ν , zatem to względem niej powinno odbywać się całkowanie funkcji F . Przy późniejszym definiowaniu funkcji Husimiego, miarę tę wciąga się do definicji, aby funkcja Husimiego określała rozkład gęstości kwaziprawdopodobieństwa (innego niż w przypadku funkcji Wignera) na przestrzeni fazowej ze standardową miarą Haara.

51 Wykonalność, sens i sposób konwolucji zależy od K .

52 W zapisie multiplikatywnym: $\int_K d\lambda(\phi) f(\phi) \mu_{AC}(\phi \chi^{-1})$.

53 $\mathcal{H}L^2(X, \mu)$ jest przestrzenią całkwalnych z kwadratem względem miary μ funkcji holomorficznnych $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ([11] def. 2.1)

1. Obliczamy rozkład kwaziprawdopodobieństwa Husimiego⁵⁴ jako kwadrat modułu F , pomnożony przez ν aby miał sens gęstości przy naturalnej mierze Haara na $K_{\mathbb{C}}$.

$$Q = |F(z^*)|^2 \nu \quad (6.2.2)$$

3. Etap drugi – wykonujemy de-konwolucję Q „odplatając” od niej $\mu_{\mathbb{C}}$.⁵⁵ Osiągamy to z użyciem twierdzenia o konwolucji⁵⁶.
 - a. Wykonujemy transformację Fouriera funkcji Q .
 - b. Przeprowadzamy transformację Fouriera funkcji $\mu_{\mathbb{C}}$ (jako jądra transformacji Weierstrassa, tzw. jądra Gaussa-Weierstrassa).
 - c. Dzielimy $\mathcal{F}Q$ przez $\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}$
 - d. Wykonujemy transformację odwrotną

$$W = \mathcal{F}^{-1} \left(k \frac{\mathcal{F}Q}{\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}} \right) \quad (6.2.3)$$

gdzie stała k koryguje stałą związaną z transformacją \mathcal{F} (która w ilorazie ulega skróceniu, podczas gdy powinna pozostać dla skompensowania stałej wprowadzanej przez transformację odwrotną).

W ten sposób otrzymujemy rozkład kwaziprawdopodobieństwa Wignera na przestrzeni fazowej $K_{\mathbb{C}}$.

6.3 Realizacja zaproponowanej metody dla okręgu

Obliczenia wykonano dla stanów koherentnych (HKCS) na okręgu jak i dla stanów własnych operatora momentu pędu (a zarazem hamiltonianu swobodnego).

6.3.1 Miary związane z jądrem cieplnym na przestrzeni konfiguracyjnej

Przytoczymy tu wyniki z podrozdziału 4.3.5.1

$$\rho(\alpha, \phi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \theta_3 \left(\frac{\phi - \alpha}{2}, e^{-\frac{\tau}{2}} \right)$$

$$\rho_{AC}(a, x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \theta_3 \left(\frac{\chi}{2}, e^{-\frac{\tau}{2}} \right)$$

$$\tau \rightarrow \hbar/r^2$$

Argumentem funkcji określającej miarę jest odległość geodezyjna pomiędzy punktami α, ϕ czy też \mathbf{a}, \mathbf{x}

$$\mu(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar/r^2}} \theta_3 \left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right)$$

54 Funkcja ta nie tylko ma wszystkie wady kwaziprawdopodobieństw (niespełnienie 1 i 3 aksjomatu Kolmogorowa), ale też nie daje prawidłowych rozkładów brzegowych!

55 Związek funkcji Husimiego i Wignera omówiono w przypadku trywialnym w podrozdziale 2.6.

56 Twierdzenie o konwolucji w podstawowej formie zachodzi dla grup lokalnie zwartych, abelowych. Rolę harmonik pełni wówczas charakter (ten z teorii grup). Zachodzi też wówczas dualność Pontriagina. Dla grup nieabelowych twierdzenie Petera-Weyla wskazuje sposób zamiany konwolucji na iloczyn punktowy.

$$\mu_{AC}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar/r^2}} \theta_3 \left(\frac{\chi}{2}, e^{-\frac{\hbar}{2r^2}} \right)$$

$\chi \in \mathbb{C}$

6.3.2 Miary związane z jądrem cieplnym na przestrzeni fazowej

$K_{\mathbb{C}}$ utożsamiamy z przestrzenią fazową przy parametryzacji pędów przez liczby urojone.

Laplasjan na $S_{\mathbb{C}}$ ma postać

$$\Delta_{S_{\mathbb{C}}} = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial j^2} \quad (6.3.1)$$

Zagadnienie przewodnictwa cieplnego na $S_{\mathbb{C}}$ przyjmuje postać⁵⁷

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta_{S_{\mathbb{C}}} f(\phi, j, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} f(\phi, j, \tau) \\ f(\phi, j, \tau) &= f(\phi + 2\pi, j, \tau) \\ \lim_{\tau \rightarrow 0^+} f(\phi, j, \tau) &= \delta(\phi, j) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Jego rozwiązanie fundamentalne to jądro cieplne na $S_{\mathbb{C}}$

$$\rho_{\mathbb{C}}(\phi, j, \tau) = \frac{e^{-\frac{j^2}{\tau}}}{2\pi\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}} \theta_3 \left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{\tau}{4}} \right) \quad (6.3.3)$$

Zatem miara związana z jądrem cieplnym (*heat kernel measure*) na $S_{\mathbb{C}}$ jest dana wzorem

$$\mu_{\mathbb{C}}(\phi, j) = \frac{e^{-j^2}}{2\pi\sqrt{\pi}} \theta_3 \left(\frac{\phi}{2}, e^{-\frac{1}{4}} \right) \quad (6.3.4)$$

Zaś miara $\mu_{\mathbb{C}}$ scalkowana po S to

$$\nu(j) = \frac{e^{-j^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (6.3.5)$$

Przedstawiony formalizm działa dla dowolnych stanów. W przypadku stanów koherentnych jednak można liczyć na istotne uproszczenia wzorów.

6.3.3 Wyniki na przykładzie stanu koherentnego

Poniżej przedstawiono wyniki kolejnych kroków obliczeń na przykładzie stanu koherentnego. Transformata Segala-Bargmanna funkcji falowej wyraża się wzorem

$$F(\chi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\theta_3(0, e^{-1})}} \theta_3 \left(\frac{\chi}{2}, e^{-1} \right) \quad (6.3.6)$$

gdzie $\chi \in \mathbb{C}$, natomiast jako funkcja zmiennych ϕ i j

$$F(\phi, j) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\theta_3(0, e^{-1})}} \theta_3 \left(\frac{\phi + ij}{2}, e^{-1} \right) \quad (6.3.7)$$

⁵⁷ Zmiana współczynnika związana jest z definicją zmiennej zespolonej $\chi = \phi + ij$. Dla $\chi = (\phi + ij)/\sqrt{2}$ pozostałby współczynnik 1/2.

Wówczas funkcja Husimiego wyraża się wzorem

$$Q(\phi, j) = \frac{e^{-j^2}}{4\pi^2\sqrt{\pi}\theta_3(0, e^{-1})} \theta_3\left(\frac{\phi + ij}{2}, e^{-1}\right) \theta_3\left(\frac{\phi - ij}{2}, e^{-1}\right) \quad (6.3.8)$$

gdzie $j \in \mathbb{Z}$, $\phi \in T \simeq S^1$.

Teraz znajdujemy transformatę Fouriera funkcji Husimiego

$$\begin{aligned} \mathcal{F}Q(\phi', j') &= \\ &= \frac{e^{-j'^2}}{4\pi^2\sqrt{\pi}\theta_3(0, e^{-1})} \theta_3\left(\frac{\phi' + ij'}{2}, e^{-1}\right) \theta_3\left(\frac{\phi' - ij'}{2}, e^{-1}\right) \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

i transformatę Fouriera miary na $S_{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}(\phi', j') = \frac{e^{-j'^2/4}}{2\pi\sqrt{\pi}} \theta_3\left(\frac{\phi'}{2}, e^{-1}\right) \quad (6.3.10)$$

gdzie $j' \in \mathbb{Z}$, $\phi' \in T \simeq S^1$.

Obliczamy iloraz $\mathcal{F}Q / \mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}$

$$\frac{\mathcal{F}Q}{\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}}(\phi', j') = \frac{2\pi}{\theta_3(0, e^{-1})} e^{-j'^2/4} \theta_{a(j')} \left(\frac{\phi'}{2}, e^{-1}\right) \quad (6.3.11)$$

gdzie $a(j') = \begin{cases} 3 & \text{dla } j' = 2l \\ 2 & \text{dla } j' = 2l - 1 \end{cases}$, $l \in \mathbb{Z}$

Na koniec przez odwrotną transformację Fouriera znajdujemy funkcję Wignera

$$W(\phi, \psi) = \mathcal{F}^{-1} \left(k \frac{\mathcal{F}Q}{\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}} \right)$$

$k = \frac{1}{2\pi}$ – przy wybranych normalizacjach transformacji.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} W_{00}(\phi, j) &= \\ &= \frac{1}{\theta_3(0, e^{-1})} \left(\theta_3(\phi, e^{-1}) e^{-j^2} + \right. \\ &\quad \left. + \theta_2(\phi, e^{-1}) \sum_n e^{-(n+\frac{1}{2})^2} \text{sinc} \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} + j \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Dokładnie jak w (4.4.15) z $\hbar/r^2 \rightarrow 1$. Stany inne niż $|00\rangle$ łatwo otrzymujemy podstawiając: $\phi \rightarrow \phi - \alpha$, $j \rightarrow j - l$.

6.3.4 Wyniki na przykładzie stanu własnego operatora momentu pędu

Poniżej przedstawiono wyniki dla stanów własnych operatora momentu pędu (a za razem hamiltonianu swobodnego) w krokach analogicznych do opisanych w podrozdziale 6.3.3.

$$f_l(\phi) = \frac{e^{il\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.3.13)$$

Transformata Segala-Bargmanna funkcji falowej:

$$F(\chi) = \frac{e^{-i^2/2} e^{i\chi}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \quad (6.3.14)$$

$$F(\phi, j) = \frac{e^{-\frac{l^2}{2}} e^{il(\phi+ij)}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \quad (6.3.15)$$

Funkcja Husimiego:

$$Q(\phi, j) = \frac{e^{-(j-l)^2}}{8\pi^3\sqrt{\pi}} \quad (6.3.16)$$

Transformata Fouriera funkcji Husimiego:

$$\mathcal{F}Q(\phi', j') = \frac{e^{-il\phi'}}{8\pi^3\sqrt{\pi}} \theta_3\left(\frac{\phi'}{2}, e^{-1}\right) \quad (6.3.17)$$

Iloraz $\mathcal{F}Q / \mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}$:

$$\frac{\mathcal{F}Q}{\mathcal{F}\mu_{\mathbb{C}}}(\phi', j') = \frac{e^{\frac{j'^2}{4}} e^{-il\phi'}}{4\pi^2} \quad (6.3.18)$$

Funkcja Wignera:

$$W(\phi, j) = \text{sinc}(\pi(j-l)) \quad (6.3.19)$$

dla $j, l \in \mathbb{Z}$, $W(\phi, j) = \delta_{j,l}$. Wówczas warunek normalizacji i rozkłady brzegowe mają postać

$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \delta_{j,l} = 1$, $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta_{j,l} = 1$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \delta_{j,l} = \delta_{j,l}$, jak należało oczekiwać.

VII Inne przestrzenie konfiguracyjne

W rozdziale tym krótko omawiamy perspektywę rozszerzenia konstrukcji mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej na układy, dla których przestrzenia konfiguracyjne są różnymi nietrywialnymi topologicznie innymi niż okrąg i sfera będącymi głównym przedmiotem zainteresowania w tej pracy.

7.1 Walec i hiperboloida

Hiperboloida jednopowłokowa często analizowana jest w analogii do sfery. Istotnie można ją rozpatrywać jako sferę o urojonym promieniu zanurzoną w przestrzeni Minkowskiego. Jak pokazały rozdziały IV i V, dla możliwości skonstruowania obiektów czy narzędzi takich jak stany koherentne, transformacja Segala-Bargmanna, czy funkcja Wignera w nietrywialnej przestrzeni, kluczowa jest jej topologia. Kwestia topologii w przestrzeni Minkowskiego nie jest jednak jednoznaczna⁵⁸. Tymczasem hiperboloida zanurzona w przestrzeni euklidesowej z topologią indukowaną z tejże przestrzeni jest topologicznie równoważna walcowi. Oczywiście, struktura metryczna hiperboloidy różni się od struktury walca, jednak co do zasady możliwe jest uwzględnienie jej w postaci odpowiedniej gęstości określonej na walcu.

Walec jest iloczynem okręgu i prostej rzeczywistej $S^1 \times \mathbb{R}$. Przestrzeń styczna do walca jest w każdym punkcie iloczynem przestrzeni stycznych do S^1 i \mathbb{R} , czyli $T_x(\mathbb{R} \times S^1) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wiązka styczna jest wiązką trywialną, zatem $T(S^1 \times \mathbb{R}) = S^1 \times \mathbb{R}^3$, gdzie jedna kopia prostej rzeczywistej parametryzuje (wraz z okręgiem) przestrzeń podstawową wiązki, a dwie pozostałe – (modelowe) włókno.

Z topologicznego punktu widzenia przypadek ten nie wprowadza rzeczy istotnie nowych w stosunku do tych rozważanych w rozdziale IV traktującym o okręgu. Topologicznie przypadek sfery rozważany w rozdziale V jest o wiele ciekawszy, jako że przestrzeń fazowa związana ze sferą jako przestrzenią konfiguracyjną jest wiązką nietrywialną, co, ma poważne konsekwencje.

W przypadku walca, zagadnienie konstrukcji stanów koherentnych, transformacji Segala-Bargmanna i funkcji Wignera sprowadza się do konsekwentnego zastosowania metod z rozdziału IV w połączeniu ze standardowymi metodami mechaniki kwantowej w przestrzeni euklidesowej. Przypadek hiperboloidy będzie wymagał ponadto uwzględnienia odpowiedniej gęstości miary. Zagadnienia te można traktować na poziomie koncepcyjnym jako rozwiązane.

Niemniej jednak już przypadek okręgu ujawnił ciekawe zachowanie, w szczególności nieoczywistą ewolucję swobodną stanów koherentnych (*vide* podrozdz. 4.3.10). Należy oczekiwać, że ewolucja stanów na powierzchni walca jak i hiperboloidy będzie jeszcze ciekawsza, gdyż ewolucja wzdłuż okręgu połączy się z ruchem wzdłuż tworzącej. Zagadnienie to wydaje się warte zbadania i będzie przedmiotem przyszłej pracy.

⁵⁸ Pseudometryka Minkowskiego, w odróżnieniu od metryk (dodatnio określonych) nie indukuje topologii [46].

7.2 Hipersfera

S^n , $n \geq 3$. Część konstrukcji zastosowanych w rozdziale V dotyczącym sfery S^2 ma naturalne uogólnienie na sfery dowolnego wymiaru. W szczególności znane są stany koherentne na S^n [17]. Podobnie jak w niższych wymiarach, wyrażają się przez jądro ciepłne w danej przestrzeni. Na przykład dla S^3 jądro ciepłne ma postać

$$\rho_3(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \tau) = \frac{e^{\frac{\tau}{2}}}{(2\pi\tau)^{\frac{3}{2}} \sin \theta^*} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\theta^* - k2\pi) e^{-\frac{(\theta^* - k2\pi)^2}{2\tau}} \quad (7.2.1)$$

gdzie $\theta^* = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$ jest odległością geodezyjną na powierzchni (hiper)sfery.

Warto porównać ten wzór z (5.3.6) – dla S^2 . Jest on znacząco prostszy, gdyż nie obejmuje całkowania. Okazuje się, że stanowi to wyraz ogólniejszej reguły. Mianowicie wzory na jądro ciepłne dla sfer wymiaru nieparzystego są znacząco prostsze niż te w wymiarze parzystym. Hall w [17] podaje nie tylko wzory dla trzech pierwszych n , ale także wzór rekurencyjny pozwalający znajdować stany koherentne dla sfer wymiaru $n + 2$ w oparciu o ich postać na sferach wymiaru n

$$\rho_{n+2}(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \tau) = -\frac{e^{\frac{n\tau}{2}}}{2\pi \sin \theta^*} \frac{d}{d\theta^*} \rho_n(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \tau) \quad (7.2.2)$$

([17], rozdz. 5)

Na przykład wykorzystując (7.2.2) i (5.3.9), otrzymujemy jądro ciepłne na S^4 postaci

$$\begin{aligned} \rho_4(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \tau) &= \\ &= -\frac{e^{\tau}}{2\pi(\sin \theta^*)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\tau \frac{j(j+1)}{2}} j(j+1) (P_{j+1}(\cos \theta^*) - P_{j-1}(\cos \theta^*)) \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

(z wykorzystaniem tożsamości ([40], 05.03.17.0003.01) przy czym dla $j < 0$, $P_j(x) = P_{-j-1}(x)$).

VIII Podsumowanie

8.1 Uzyskane wyniki

W kolejnych rozdziałach pracy zrealizowano cele postawione w podrozdz. 1.2. Najważniejszymi uzyskanymi wynikami są:

- Konstrukcja funkcji Wignera dla sfery (podrozdz. 5.4.1, publ. [7]).
- Propozycja ogólnej metody znajdowania funkcji Wignera dla rozmaitości nietrywialnych topologicznie (rozdział I).
- Wyniki związane z zastosowaniem metod statystyki kierunkowej do opisu statystycznych właściwości stanów kwantowych (podrozdział 4.3.9)

8.2 Komentarze

Według najlepszej wiedzy autora, przedstawiona propozycja funkcji Wignera dla sfery, jest jedynym dotychczas opublikowanym przykładem funkcji Wignera określonej na przestrzeni fazowej będącej wiązką nietrywialną. Jedyne znane autorowi wcześniejsze podejście do tego zagadnienia wymagało rezygnacji z określenia funkcji Wignera na przestrzeni fazowej będącej wiązką styczną do przestrzeni konfiguracyjnej.

8.2.1 Perspektywiczne kierunki badań

Naturalnym kierunkiem dalszych badań mogą być zagadnienia mechaniki kwantowej na przestrzeni fazowej dla kolejnych nietrywialnych rozmaitości, wspomnianych w rozdziale I.

Interesującym problemem jest uogólnienie funkcji Wignera na sferze tak, aby była określona na wiązce włóknistej nad sferą, lecz już niekoniecznie wiązce stycznej, to jest dla $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{X}} \neq 0$. Strukturę taką niektórzy autorzy stosują do opisu cząstki naładowanej na sferze w obecności pola magnetycznego [41], [42].

W opinii autora metoda znajdowania funkcji Wignera dla rozmaitości nietrywialnych topologicznie zaproponowana w rozdziale I jest warta dalszych badań. W szczególności ciekawe wydaje się zastosowanie jej do przypadku sfery i porównanie wyniku z funkcją Wignera przedstawioną w niniejszej pracy a otrzymaną inną metodą. Naturalne wydaje się również zastosowanie tej metody w przypadku innych rozmaitości o nietrywialnej strukturze.

Wreszcie, obiecująca wydaje się przedstawiona w tej pracy koncepcja zastosowania metod statystyki na rozmaitościach, w szczególności statystyki kierunkowej, do opisu statystycznych właściwości stanów kwantowych na rozmaitościach nietrywialnych topologicznie.

IX Uzupełnienia

9.1 Konwencje i oznaczenia

W tym uzupełnieniu zebrano pewne konwencje i oznaczenia mające zastosowanie w niniejszej pracy.

1. Uogólniony symbol kongruencji z przesunięciem prowadzący kąt do wybranego przedziału:

$$[\phi]_{[a,b)} := [\phi]_{b-a} + a$$

W szczególności $[\phi]_{[-\pi,+\pi)} = [\phi]_{2\pi} - \pi$

2. Oznaczenia pewnych grup:

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	grupa liczb rzeczywistych z przedziału $[0,1)$ z dodawaniem modulo 1
$\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$	grupa liczb rzeczywistych z przedziału $[0,2\pi)$ z dodawaniem modulo 2π
$\mathbb{R} \setminus r\mathbb{Z}$	grupa liczb rzeczywistych z przedziału $[0,r)$ z dodawaniem modulo r , $r \in \mathbb{R}$
\mathbb{T}	grupa liczb zespolonych o module 1 z mnożeniem
$U(1)$	grupa macierzy unitarnych 1×1 z mnożeniem macierzowym (jeśli przyjmujemy utożsamienie macierzy jednoelementowej z jej (jedynym) elementem $[a] = a$, to $U(1) = \mathbb{T}$)
$SO(2)$	grupa macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1 wymiaru 2×2 (macierzy obrotu na płaszczyźnie) z mnożeniem macierzowym
$\mathbb{R} \setminus r\mathbb{Z} \cong \mathbb{T} \cong U(1) \cong SO(2)$	gdzie \cong oznacza izomorfizm grup. Zatem jako grupy, struktury te są równe.

S^1 – okrąg – zależnie od kontekstu: jako grupa, różniczkowalność riemannowska lub grupa Liego. Jako grupa $S^1 = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ itd.

3. Funkcja *sinus cardinalis*, czyli regularyzowany stosunek $\sin x/x$

$$\text{sinc}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\sin x'}{x'} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

4. Dwuargumentowa funkcją *arcus tangens* $\text{atan2}(x, y)$, zwracająca kąt na podstawie współrzędnych x, y , uwzględniająca nie tylko ich stosunek, ale też kwadrant układu współrzędnych do którego należy dany punkt ([40], ArcTan2).
5. Funkcja *sza* (*sza*), grzebień Diraca (*Dirac comb*)

$$\mathfrak{W}_T(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x + kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{2\pi}{T}x}$$

gdzie $\delta(x)$ jest deltą Diraca.

6. Uogólniona funkcja *sza* z fazą

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_{\tau,\lambda}(t) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) e^{i\lambda \frac{2\pi t}{\tau}} = \mathfrak{W}_{\tau}(t) e^{i\lambda \frac{2\pi t}{\tau}} = \\ &= \frac{1}{\tau} e^{i\lambda \frac{2\pi t}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{n2\pi t}{\tau}} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{(n+\lambda)2\pi t}{\tau}}\end{aligned}$$

τ – pseudookres, λ – faza (liczona w obrotach) dodawana po każdym pseudo-okresie.

7. Funkcja *theta* Jacobiego typu 3

$$\theta_3(z, q) \equiv \theta_3(z|\tau) := \sum_k q^{n^2} e^{i2nz}$$

gdzie $q = e^{i\pi\tau}$

8. Funkcja *theta* Jacobiego typu 2

$$\theta_2(z, q) \equiv \theta_2(z|\tau) := \sum_k q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i2(n+\frac{1}{2})z}$$

Właściwości funkcji *theta* Jacobiego:

([43], rozdz. 20; [40], EllipticTheta3, EllipticTheta2)

9. Przestrzeń $\mathcal{H}L^2(X, \mu)$ – przestrzeń całkowalnych z kwadratem względem miary μ funkcji holomorficzych $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ([11], def. 2.1).

10. Harmoniki sferyczne

$$Y_j^m(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(j-m)!}{(j+m)!}} e^{im\phi} P_j^m(\cos \theta)$$

gdzie $j \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}$: $|m| \leq j$; $\theta, \phi \in \mathbb{C}$. Gdy $|m| > j$, $Y_j^m(x) = 0$. ([40], podstr. SphericalHarmonicY). W definicji nie uwzględniono czynnika fazowego Condon-Shortleya $(-1)^m$ ([44], podstr. Condon-ShortleyPhase), gdyż ten włączono do definicji funkcji Legendre’a. Przez $Y_j^m(x)$ należy rozumieć $Y_j^m(\theta(x), \phi(x))$. Funkcje te są znormalizowane jak funkcje falowe, tj. $\int_{S^2} dx |Y_j^m(x)|^2 = 1$.

11. Funkcja Legendre’a $P_j^m(z)$

Dokładniej stowarzyszona funkcja Legendre’a pierwszego rodzaju, typu 2 (*associated Legendre function of first kind of type 2*) zdefiniowana z uwzględnieniem czynnika fazowego Condon-Shortleya ([40], LegendreP2General).

Należy podkreślić, że $\theta, \phi \in \mathbb{C}$. Wówczas $x \in \mathbb{C}^3$: $x^2 = 1$.

Jakkolwiek w niniejszej pracy rozważano jedynie dyskretne, fizycznie znaczące, wartości wskaźników j, m w harmonikach sferycznych (i pokrewnych funkcjach), na potrzeby interpolacji posłużono się też uogólnioną ich definicją, w której $j, m \in \mathbb{C}$ ([40], SphericalHarmonicYGeneral).

12. Funkcja Gegenbauera $C_\nu^\lambda(s)$ – uogólnienie wielomianów ultraspektralnych ([40], GegenbauerC3General).

13. Funkcja Olversa, renormalizowana funkcja hipergeometryczna ${}_2F_1$

$${}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c & s \end{matrix} \right) := \frac{1}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c & s \end{matrix} \right)$$

14. Funkcja Bessela pierwszego rodzaju $J_0(z)$ ([3], Bessel)

15. Zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju $I_0(z)$ ([3], Bessel)

9.2 Charakteryzacja okręgu i jego wiązki stycznej

Dla przejrzystości, w tym uzupełnieniu przyjęto promień $r = 1$.

9.2.1 Okrąg i jego wiązka styczna jako rozmaitość riemannowska

Okrąg jako rozmaitość można opisać następująco:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: |\mathbf{x}| = 1\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\} \quad (9.2.1)$$

Tę parametryzację będziemy nazywać rzeczywistą.

Natomiast w parametryzacji zespolonej⁵⁹

$$S = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} = \{e^{i\phi}: \phi \in \mathbb{R}\} \quad (9.2.2)$$

Ewentualnie punkty okręgu można utożsamić z obrotami⁶⁰.

$$S = \{R(\phi): \phi \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\}$$

Każda z tych parametryzacji wymaga odpowiedniego do niej opisu wiązki stycznej.

9.2.1.1 Przestrzeń styczna

Przestrzeń styczna do okręgu w punkcie x to przestrzeń wektorowa postaci

$$T_x S = (\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0\}, (\mathbb{R}), +, \cdot)$$

$\{ \} =: T_x S$ – sam zbiór, bez relacji oznaczamy tak samo, gdy nie prowadzi to do nieporozumień.

$$\mathbf{v} = vR\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{x} = v \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = v \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

$$v \geq 0$$

9.2.1.2 Wiązka styczna

Wiązka styczna do okręgu jest sumą rozłączną przestrzeni stycznych w punktach x po wszystkich $x \in S$.

$$TS = \bigsqcup_{\mathbf{x} \in S} T_{\mathbf{x}} S = \bigcup_{\mathbf{x} \in S} \{\mathbf{x}\} \times T_{\mathbf{x}} S$$

$$TS = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}): \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| = 1, \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

⁵⁹ Moduł $|\cdot|$ użyty jest tu w oczywiscie w sensie modulu liczby zespolonej.

⁶⁰ W przypadku okręgu zachodzi wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy jego automorfizmami a jego punktami. Dzięki temu okrąg jest rozmaitością grupową (grupą Liego). Nie zachodzi to np. dla sfery.

9.2.1.3 Riemannowskie odwzorowanie wykładnicze

Dla sfer dowolnego wymiaru istnieje odwzorowanie ([37], rozdz. 3).⁶¹

$$\Phi: TS \rightarrow S$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \exp_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \cos v \mathbf{x} + \operatorname{sinc} v \mathbf{v} = \cos v \mathbf{x} + \sin v \hat{\mathbf{v}}$$

Jakobian tego odwzorowania to

$$j(\exp_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) = \operatorname{sinc} v^{n-1} = 1$$

przy czym wzór z n obowiązuje dla sfer dowolnego wymiaru ([37], rozdz. 3).

9.2.2 Okrąg i jego wiązka styczna jako grupa Liego

9.2.2.1 Grupa i algebra Liego

Za definiującą reprezentację grupy okręgu przeważnie przyjmuje się tę opartą o zespoloną parametryzację rozmaitości.

$$S^1 = (S, \cdot, 1) = (\{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}\}, \cdot, 1 = e^{i0})$$

Wówczas algebra Liego

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \\ [\cdot, \cdot] &= 0 \end{aligned}$$

9.2.2.2 Odwzorowanie wykładnicze Liego

$$\Phi: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} (z, Y) \mapsto \exp_z Y &= e^Y z = e^{i\alpha} z = (\cos \alpha + i \sin \alpha) z = \\ &= \cos \alpha z + \sin \alpha iz = e^{i(\phi+\alpha)} \end{aligned}$$

^{62 63}

Płaszczyzna zespolona jest tu przestrzenią konfiguracyjną. „Kierunek urojony” nie może zatem służyć zmiennym pędowym (które zamierzamy dalej wprowadzić)! Lepiej użyć rzeczywistej parametryzacji przestrzeni konfiguracyjnej a pozostawić liczby urojone do wskazywania zmiennych pędowych. Jeśli jednak chcemy pozostać przy tej parametryzacji, zauważmy, że okrąg sam w sobie jest jednowymiarowy a na płaszczyźnie pozostaje jeszcze zmienna radialna, którą można przeznaczyć do reprezentowania pędów. Na tym zasadza się znana reprezentacja przestrzeni fazowej nad przestrzenią konfiguracyjną okręgu w postaci „nakłutej” płaszczyzny zespolonej. Tej sztuczki nie można wykonać dla sfer wyższych wymiarów, gdyż zmienna radialna jest zawsze jedna a zmiennych pędowych potrzebujemy tyle ile wynosi wymiar sfery, a więc np. dla zwykłej sfery $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ – dwóch.

9.2.2.3 Grupa, algebra Liego i odwzorowanie wykładnicze w parametryzacji rzeczywistej

$$S^1 = (\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| = 1\}, \odot, \mathbf{x}_0) = \left(\left\{ \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\}, \odot, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{bmatrix} \right)$$

61 Symbol $\exp_{\mathbf{x}} v$ nie oznacza tu standardowej funkcji wykładniczej a właśnie riemannowskie odwzorowane wykładnicze.

62 Pierwsza równość zachodzi dla dowolnych przestrzeni symetrycznych

63 Analogiczny wzór obowiązuje dla S^n .

gdzie $\begin{bmatrix} \cos a \\ \sin a \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \cos a' \\ \sin a' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \cos(a + a') \\ \sin(a + a') \end{bmatrix}$

$$\mathfrak{g} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} a \mid \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} b = 0_2$$

$$(x(\phi), Y) \mapsto \exp_{x(\phi)} Y = e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \alpha) \\ \sin(\phi + \alpha) \end{bmatrix}$$

Oczywiście możliwe są też inne parametryzacje.

9.2.3 Kompleksyfikacja okręgu

Idea jest taka, że kompleksyfikację przestrzeni konfiguracyjnej $S_{\mathbb{C}}$ *utożsamiamy* z przestrzenią fazową przy parametryzacji zmiennych pędowych przez liczby urojone.

Z omówionych wcześniej powodów na potrzeby kompleksyfikacji wybrano taką parametryzację rozmaitości będącej przestrzenią konfiguracyjną, która sama nie angażuje liczb zespolonych.

Wykorzystujemy zmodyfikowane riemannowskie odwzorowanie wykładnicze.

$$\Phi: TS \rightarrow S_{\mathbb{C}}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \exp_{\mathbf{x}} i\mathbf{v} = \operatorname{ch} v \mathbf{x} + i \frac{\operatorname{sh} v}{v} \mathbf{v} = \operatorname{ch} v \mathbf{x} + i \operatorname{sh} v \hat{\mathbf{v}}$$

([37], rozdz. 3)

$$\exp_{\mathbf{x}} i\mathbf{v} = \operatorname{ch} v \mathbf{x} + i \operatorname{sh} v R\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos(\phi + iv) \\ \sin(\phi + iv) \end{bmatrix}$$

Jakobian tego odwzorowania to

$$j(\exp_{\mathbf{x}} i\mathbf{v}) = \left(\frac{\operatorname{sh} v}{v}\right)^{n-1} = 1$$

9.2.3.1 Kompleksyfikacja w języku grup

Poniżej wypisano analogiczne kroki zastosowane do okręgu jako grupy Liego.

$$\Phi: S \times \mathfrak{g} \rightarrow S_{\mathbb{C}}$$

$$(z, Y) \mapsto \exp_z(iY)$$

$$\exp_z(iY) = ze^{iY}$$

64

$$\mathfrak{g} = i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = i\mathbb{C} = \mathbb{C}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\phi} : \phi \in \mathbb{R}\} \rightarrow \{e^{i\chi} : \chi \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$S_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1) = (\{e^{i\chi} : \chi \in \mathbb{C}\}, \cdot, e^{i0}) =: \mathbb{C}^{\times}$$

$$j(\exp_z(iY)) = \left(\frac{\operatorname{sh}|Y|}{|Y|}\right)^{n-1} = 1$$

W tym przypadku, mimo iż parametryzacja przestrzeni konfiguracyjnej była zespolona, wyjątkowo możliwe było utożsamienie przestrzeni fazowej z kompleksyfikacją rozmaitości będącej

przestrzenią konfiguracyjną. Mamy bowiem związek $e^{i(\phi+i\psi)} = e^{i\phi}e^{-\psi}$, zgodnie z którym zmienna pędowa odwzorowywana jest (wykładniczo) wzdłuż promienia okręgu na płaszczyźnie zespolonej, czyli w kierunku ortogonalnym do samego okręgu parametryzującego położenie i zmienne te się nie mieszają. Tej sztuczki nie można wykonać dla sfer wyższych wymiarów.

Przestrzeń fazowa jest topologicznie cylindrem, ale można go odwzorować na „naklutej” płaszczyźnie zespolonej tak że powierzchnie boczne są „rozpłaszczone” na płaszczyźnie okręgu wzdłuż promieni.

9.3 Wyprowadzenia wzorów dotyczących stanu koherentnego na sferze

9.3.1.1 Wyprowadzenie wzoru (5.3.2)

[38], wz. 5.11

$$|z\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{n=0}^j \frac{\nu^n (j+n)!}{n! (j-n)!} e^{\gamma n} \sum_{k=0}^{j+n} \frac{\mu^k}{k!} \sqrt{\frac{(j-n+k)!}{(j+n-k)!}} |j, n-k\rangle$$

dla $\mu = \frac{z_1+iz_2}{1+z_3}$, $\nu = \frac{z_1-iz_2}{1+z_3}$, $\gamma = \ln \frac{1+z_3}{2}$

Oznaczmy $e^{\gamma} = c$.

$$\langle j, m|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{n=0}^j \frac{(\nu c)^n (j+n)!}{n! (j-n)!} \sum_{k=0}^{j+n} \frac{\mu^k}{k!} \sqrt{\frac{(j-n+k)!}{(j+n-k)!}} \delta_{m, n-k}$$

$$\delta_{m, n-k} = \delta_{k, n-m}$$

$$\langle j, m|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{n=0}^j \frac{(\nu c)^n (j+n)!}{n! (j-n)!} \frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} 1_{[m; \infty)}(n) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \mu^{-m} \sum_{n=\max(m, 0)}^j \frac{(\nu c \mu)^n (j+n)!}{n! (n-m)! (j-n)!}$$

Oznaczmy $\nu c \mu = A$.

Dla $m = 0$:

$$\langle j, 0|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sum_{n=0}^j \frac{A^n (j+n)!}{n! n! (j-n)!} = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} P_j(1+2A)$$

Oznaczmy $1+2A = B$.

Dla $m < 0$:

$$\langle j, m < 0|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \mu^{-m} \sum_{n=0}^j \frac{(\nu c \mu)^n (j+n)!}{n! (n-m)! (j-n)!} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \mu^{-m} \left(\frac{-A}{1+A} \right)^{\frac{m}{2}} P_j^m(B)$$

Wzór otrzymany dla $m < 0$ zgadza się ze wzorem dla $m = 0$, gdy za m podstawimy 0.

Oznaczmy $\frac{-A}{1+A} = C$, $\frac{\sqrt{C}}{\mu} = D$

Razem, dla $m \leq 0$:

$$\langle j, m \leq 0 | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} D^m P_j^m(B)$$

Dla $m > 0$

$$\begin{aligned} \langle j, m > 0 | z \rangle &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \mu^{-m} \sum_{n=m}^j \frac{A^n}{n!(n-m)!} \frac{(j+n)!}{(j-n)!} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \mu^{-m} A^m {}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} -j+m & 1+j+m \\ 1+m \end{matrix} \middle| -A \right) \end{aligned}$$

Gdzie ${}_2\tilde{F}_1$ jest regularyzowaną funkcją hipergeometryczną (jednego argumentu) typu 2–1.

Teraz warto skorzystać z postaci A, B, C dla wektora z

$$A = -\frac{z_1^2+z_2^2}{2(1+z_3)} = \frac{z_3+1}{2} \quad {}^{65}; \quad B = z_3; \quad C = \frac{1-z_3}{1+z_3}; \quad D = \frac{\sqrt{1-z_3}}{z_1+iz_2} = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1+iz_2} \quad {}^{66}$$

$$\langle j, m \leq 0 | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{z_1+iz_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \right)^{-m} P_j^m(z_3)$$

Zaś dla $m > 0$ potrzebne jest subtelniejsze przekształcenie funkcji F .

Punktem wyjścia jest tożsamość ([40], wz. 05.07.26.0001.01)

$${}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} -j & 1+j \\ 1-m \end{matrix} \middle| \frac{1-s}{2} \right) \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{m}{2}} = P_j^m(s)$$

Zamieńmy $m \leftrightarrow -m$.

$${}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} -j & 1+j \\ 1+m \end{matrix} \middle| \frac{1-s}{2} \right) \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{m}{2}} = P_j^{-m}(s) = (-1)^m \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(s)$$

Przekształcamy korzystając z ([40], wz. 07.24.16.0001.01)

$${}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} 1+j+m & -j+m \\ 1+m \end{matrix} \middle| \frac{1-s}{2} \right) \left(1 - \frac{1-s}{2} \right)^m \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^{\frac{m}{2}} = (-1)^m \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(s)$$

$${}_2\tilde{F}_1 \left(\begin{matrix} -j+m & 1+j+m \\ 1+m \end{matrix} \middle| \frac{1-s}{2} \right) = (-1)^m \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \left(\frac{1+s}{1-s} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{1+s} \right)^m P_j^m(s)$$

$\langle j, m > 0 | z \rangle =$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{1+z_3}{z_1+iz_2} \right)^m (-1)^m \left(\frac{z_3-1}{2} \right)^m \left(\frac{2}{1+z_3} \right)^m \left(\frac{1+z_3}{1-z_3} \right)^{\frac{m}{2}} P_j^m(z_3) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{1+z_3}{z_1+iz_2} \right)^m \left(\frac{1-z_3}{1+z_3} \right)^{\frac{m}{2}} P_j^m(z_3) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{\sqrt{1-z_3}}{z_1+iz_2} \right)^m P_j^m(z_3) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{z_1+iz_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \right)^{-m} P_j^m(z_3)$$

⁶⁵ Korzystając z konkretnej postaci z .

⁶⁶ Choć dla ogólnego unormowanego wektora zespolonego nie jest to prawdą, w przypadku z zachodzi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$

Identycznie jak w przypadku $m \leq 0$.

9.3.1.2 Wyprowadzenie wzoru (5.3.3)

Harmoniki sferyczne zdefiniowane są następująco:

$$Y_j^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} e^{im\phi} P_j^m(\cos \theta)$$

$j, m \in \mathbb{Z}; j \geq 0, -j \leq m \leq j; \theta, \phi \in \mathbb{C}$, czyli określone są w sferycznym układzie współrzędnych. Kartezjańska postać harmonik sferycznych zdefiniowana jest dla dowolnego wektora zespolonego $s = (s_1, s_1, s_3)$ następująco:

$$Y_j^m(s) = Y_j^m(\theta_s = \arccos s_3, \phi_s = \arctg(s_1, s_2))$$

gdzie $\arctg(s_1, s_2)$ jest dwuargumentową funkcją arcus-tangens (*atan2*) używaną przy transformacji współrzędnych z układu kartezjańskiego do biegunowego automatycznie uwzględniającą przynależność punktu (s_1, s_2) do określonej ćwiartki układu współrzędnych (*vide* uzup. 9.1).

Korzystamy z tożsamości

$$\arctg(s_1, s_2) = -i \ln \frac{s_1 + is_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$

Czyli

$$Y_j^m(s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} \left(\frac{s_1 + is_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} \right)^m P_j^m(s_3)$$

Zatem

$$\langle j, m | z \rangle = \sqrt{4\pi} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} (-1)^m Y_j^{-m}(z) = \sqrt{4\pi} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \overline{Y_j^m(\bar{z})}$$

A przy użyciu kątów (zespolonych) θ_z, ϕ_z

$$\langle j, m | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}} e^{-im\phi_z} P_j^m(\cos \theta_z) = \sqrt{4\pi} e^{-\frac{1}{2}j(j+1)} Y_j^m(\theta_z, -\phi_z)$$

gdzie $\cos \theta_z = z \cdot x_0 = z_3$

9.4 Faktoryzacja operatora gęstości

Faktoryzacja operatora w postaci funkcji wykładniczej e^{X+Y} według wzoru Zassenhaus'a ma postać

$$e^{X+Y} = e^X e^Y \prod_{n=2}^{\infty} e^{C_n(X,Y)}$$

gdzie $C_n(X, Y)$ są jednorodnymi wielomianami Liego stopnia n .

Pierwsze wyrazy rozwinięcia są następujące

$$C_2 = \frac{1}{2}[Y, X]$$

$$C_3 = \frac{1}{3}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{6}[X, [X, Y]]$$

$$C_4 = -\frac{1}{8}([Y, [Y, [X, Y]]] + [Y, [X, [X, Y]]) - \frac{1}{24}[X, [X, [X, Y]]]$$

Nie ma jednak wzoru jawnego na C_n .

Rekurencyjną procedurę obliczania kolejnych wyrazów do dowolnego rzędu podaje [45]:

Dla $n = 1, 2, 3$

$$f_{1,k} = (-1)^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!(k-j)!} [Y, _]^{k-j} [X, _]^j Y$$

gdzie $[Y, _]^k X := \overbrace{[Y, \dots [Y, X] \dots]}^k$, $[Y, _]^0 X = X$ ⁶⁷

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{1}{n+1} f_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!(n-j)!} [Y, _]^{n-j} [X, _]^j Y = \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!j!} [Y, _]^j [X, _]^{n-j} Y \end{aligned}$$

Po przenumerowaniu, dla $n = 2, 3, 4$

$$C_n = \frac{1}{n} f_{1,n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{(n-1-j)!j!} [Y, _]^j [X, _]^{n-1-j} Y$$

Natomiast dla $n \geq 4$

$$f_{n,k} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor - 1} \frac{(-1)^j}{j!} [C_n, _]^j f_{n-1, k-nj}$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+1} f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n}$$

$$f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n} = \sum_{j=0}^1 \frac{(-1)^j}{j!} [C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, _]^j f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor j} = f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n} - [C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}]$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+1} (f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n} - [C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, f_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}])$$

I po przenumerowaniu, dla $n \geq 5$

$$C_n = \frac{1}{n} f_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, n-1} = \frac{1}{n} (f_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, n-1} - [C_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}, f_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, n-1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}])$$

W szczególnym przypadku, gdy

$$[X, Y] = Z \quad [X, Z] = cY \quad [Y, Z] = 0$$

$$e^{X+Y} = e^X e^{\frac{\sinh \sqrt{c}}{\sqrt{c}} Y + \frac{1 - \cosh \sqrt{c}}{c} Z}$$

⁶⁷ $[Y, _]^k X$ – Taki lewostronnie składany komutator bywa zapisywany też $\text{ad}_Y^k(X)$ lub $[(A)^k, B]$, ale ten ostatni zapis ten może być mylący.

Literatura

- [1] E. Wigner, „On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium”, *Physical Review*, t. 40, nr 5, s. 749–759, cze. 1932, doi: 10.1103/PhysRev.40.749.
- [2] H. Weyl, „Quantenmechanik und Gruppentheorie”, *Zeitschrift für Physik*, t. 46, nr 1–2, s. 1–46, lis. 1927, doi: 10.1007/BF02055756.
- [3] J. E. Moyal, „Quantum mechanics as a statistical theory”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 45, nr 1, s. 99–124, sty. 1949, doi: 10.1017/S0305004100000487.
- [4] H. J. Groenewold, „On the principles of elementary quantum mechanics”, *Physica*, t. 12, nr 7, s. 405–460, paź. 1946, doi: 10.1016/S0031-8914(46)80059-4.
- [5] T. L. Curtright i C. K. Zachos, „Quantum Mechanics in Phase Space”, *Asia Pacific Physics Newsletter*, t. 01, nr 01, s. 37–46, maj 2012, doi: 10.1142/S2251158X12000069.
- [6] K. Kowalski i K. Ławniczak, „Wigner functions and coherent states for the quantum mechanics on a circle”, *J Phys A Math Theor*, t. 54, nr 27, lip. 2021, doi: 10.1088/1751-8121/AC019D.
- [7] K. Kowalski i K. Ławniczak, „Wigner function for the quantum mechanics on a sphere”, *Ann Phys (N Y)*, s. 169428, lip. 2023, doi: 10.1016/J.AOP.2023.169428.
- [8] W. B. Case, „Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians”, *Am J Phys*, t. 76, nr 10, s. 937–946, paź. 2008, doi: 10.1119/1.2957889.
- [9] L. Cohen, „The Weyl Operator”, w *The Weyl Operator and its Generalization*, Basel: Springer Basel, 2013, s. 25–46. doi: 10.1007/978-3-0348-0294-9_3.
- [10] M. J. Bastiaans i T. Alieva, „The Linear Canonical Transformation: Definition and Properties”, 2016, s. 29–80. doi: 10.1007/978-1-4939-3028-9_2.
- [11] B. C. Hall, „Holomorphic methods in analysis and mathematical physics”, 2000, s. 1–59. doi: 10.1090/conm/260/04156.
- [12] S. Twareque Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, i U. A. Mueller, „Coherent states and their generalizations: a mathematical overview”, *Reviews in Mathematical Physics*, t. 07, nr 07, s. 1013–1104, paź. 1995, doi: 10.1142/S0129055X95000396.
- [13] A. M. Perelomov, „Generalized coherent states and some of their applications”, *Soviet Physics Uspekhi*, t. 20, nr 9, s. 703–720, wrz. 1977, doi: 10.1070/PU1977v020n09ABEH005459.
- [14] R. Gilmore, „Geometry of symmetrized states”, *Ann Phys (N Y)*, t. 74, nr 2, s. 391–463, grudz. 1972, doi: 10.1016/0003-4916(72)90147-9.
- [15] A. O. Barut i L. Girardello, „New “Coherent” States associated with non-compact groups”, *Commun Math Phys*, t. 21, nr 1, s. 41–55, mar. 1971, doi: 10.1007/BF01646483.
- [16] K. Kowalski, J. Rembielinski, i L. C. Papaloucas, „Coherent states for a quantum particle on a circle”, *J Phys A Math Gen*, t. 29, nr 14, s. 4149–4167, lip. 1996, doi: 10.1088/0305-4470/29/14/034.
- [17] B. C. Hall i J. J. Mitchell, „Coherent states on spheres”, *J Math Phys*, t. 43, nr 3, s. 1211–1236, mar. 2002, doi: 10.1063/1.1446664.
- [18] H. A. Kastrup, „Wigner functions for the pair angle and orbital angular momentum”, *Phys Rev A (Coll Park)*, t. 94, nr 6, s. 062113, grudz. 2016, doi: 10.1103/PhysRevA.94.062113.

- [19] V. V. Albert, S. Pascazio, i M. H. Devoret, „General phase spaces: from discrete variables to rotor and continuum limits”, *J Phys A Math Theor*, t. 50, nr 50, s. 504002, grudz. 2017, doi: 10.1088/1751-8121/aa9314.
- [20] A. Brun, C.-F. Westin, M. Herberthson, i H. Knutsson, „Intrinsic and Extrinsic Means on the Circle - A Maximum Likelihood Interpretation”, w *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP '07*, IEEE, kwi. 2007, s. III-1053-III-1056. doi: 10.1109/ICASSP.2007.366864.
- [21] T. Hotz i S. Huckemann, „Intrinsic means on the circle: uniqueness, locus and asymptotics”, *Ann Inst Stat Math*, t. 67, nr 1, s. 177–193, luty 2015, doi: 10.1007/s10463-013-0444-7.
- [22] C. Ley i T. Verdebout, *Modern Directional Statistics*. Chapman and Hall/CRC, 2017. doi: 10.1201/9781315119472.
- [23] F. Nielsen i R. Bhatia, *Matrix Information Geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. doi: 10.1007/978-3-642-30232-9.
- [24] D. A. Trifonov, „On the position uncertainty measure on the circle”, *J Phys A Math Gen*, t. 36, nr 47, s. 11873–11879, lis. 2003, doi: 10.1088/0305-4470/36/47/013.
- [25] K. Kowalski i J. Rembieliński, „Reply to the Comment on On the uncertainty relations and squeezed states for the quantum mechanics on a circle”, *J Phys A Math Gen*, t. 36, nr 20, s. 5695–5698, maj 2003, doi: 10.1088/0305-4470/36/20/323.
- [26] B. C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*, t. 267. New York, NY: Springer New York, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-7116-5.
- [27] J. A. González i M. A. del Olmo, „Coherent states on the circle”, *J Phys A Math Gen*, t. 31, nr 44, s. 8841–8857, lis. 1998, doi: 10.1088/0305-4470/31/44/012.
- [28] B. C. Hall, „The Segal-Bargmann «Coherent State» Transform for Compact Lie Groups”, *J Funct Anal*, t. 122, nr 1, s. 103–151, maj 1994, doi: 10.1006/jfan.1994.1064.
- [29] M. B. Stenzel, „The Segal-Bargmann Transform on a Symmetric Space of Compact Type”, *J Funct Anal*, t. 165, nr 1, s. 44–58, cze. 1999, doi: 10.1006/jfan.1999.3396.
- [30] R. Bluhm, V. A. Kostelecký, i B. Tudose, „Elliptical squeezed states and Rydberg wave packets”, *Phys Rev A (Coll Park)*, t. 52, nr 3, s. 2234–2244, wrz. 1995, doi: 10.1103/PhysRevA.52.2234.
- [31] G. Chadzitaskos, P. Luft, i J. Tolar, „Quantizations on the circle and coherent states”, *J Phys A Math Theor*, t. 45, nr 24, s. 244027, cze. 2012, doi: 10.1088/1751-8113/45/24/244027.
- [32] K. Kowalski i J. Rembieliński, „Exotic behaviour of a quantum particle on a circle”, *Phys Lett A*, t. 293, nr 3–4, s. 109–115, sty. 2002, doi: 10.1016/S0375-9601(02)00007-5.
- [33] K. Kowalski i J. Rembieliński, „Quantum beats of the rigid rotor”, wrz. 2013.
- [34] I. Rigas, L. L. Sánchez-Soto, A. B. Klimov, J. Řeháček, i Z. Hradil, „Orbital angular momentum in phase space”, *Ann Phys (N Y)*, t. 326, nr 2, s. 426–439, luty 2011, doi: 10.1016/j.aop.2010.11.016.
- [35] H. A. Kastrup, „Wigner functions for the pair angle and orbital angular momentum”, *Phys Rev A (Coll Park)*, t. 94, nr 6, s. 062113, grudz. 2016, doi: 10.1103/PhysRevA.94.062113.
- [36] M. A. Alonso, G. S. Pogosyan, i K. B. Wolf, „Wigner functions for curved spaces. II. On spheres”, *J Math Phys*, t. 44, nr 4, s. 1472–1489, kwi. 2003, doi: 10.1063/1.1559644.
- [37] B. C. Hall, „The range of the heat operator”, 2006, s. 203–231. doi: 10.1090/conm/398/07488.

-
- [38] K. Kowalski i J. Rembielinski, „Quantum mechanics on a sphere and coherent states”, *J Phys A Math Gen*, t. 33, nr 34, s. 6035–6048, wrz. 2000, doi: 10.1088/0305-4470/33/34/309.
- [39] A. Rabeie i Z. Jalilian, „Comment on “Coherent states on spheres” [J. Math. Phys. 43, 1211 (2002)]”, *J Math Phys*, t. 52, nr 8, sie. 2011, doi: 10.1063/1.3626942.
- [40] Wolfram Research, „Wolfram Functions Site”. [Online]. Dostępne na: <https://functions.wolfram.com/>
- [41] B. C. Hall i J. J. Mitchell, „Coherent states for a 2-sphere with a magnetic field”, *J Phys A Math Theor*, t. 45, nr 24, s. 244025, cze. 2012, doi: 10.1088/1751-8113/45/24/244025.
- [42] R. Andrade e Silva i T. Jacobson, „Particle on the sphere: group-theoretic quantization in the presence of a magnetic monopole”, *J Phys A Math Theor*, t. 54, nr 23, s. 235303, cze. 2021, doi: 10.1088/1751-8121/abf961.
- [43] F. W. J. Olver *i in.*, *Digital Library of Mathematical Functions*, 1.1.10. 2023. [Online]. Dostępne na: <https://dlmf.nist.gov/>
- [44] E. Weisstein, „Wolfram MathWorld”. [Online]. Dostępne na: <https://mathworld.wolfram.com/>
- [45] F. Casas, A. Murua, i M. Nadinic, „Efficient computation of the Zassenhaus formula”, *Comput Phys Commun*, t. 183, nr 11, s. 2386–2391, lis. 2012, doi: 10.1016/j.cpc.2012.06.006.
- [46] E. C. Zeeman, „The topology of Minkowski space”, *Topology*, t. 6, nr 2, s. 161–170, kwi. 1967, doi: 10.1016/0040-9383(67)90033-X.