prof. dr hab. Jacek Jachymski
Instytut Matematyki,
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki
i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej,
ul. Wólczańska 215, 90-924 Łódź

Łódź, 04.06.2021 r.

Recenzja w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego Panu dr. Dariuszowi Wardowskiemu

OCENA OSIĄGNIĘĆ NAUKOWYCH

Dr Dariusz Wardowski przedstawił, jako swoje osiągnięcie naukowe, cykl ośmiu prac zatytułowany "*Zastosowania punktów stałych w rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień egzystencjalnych*". Prace [H2], [H3], [H6] i [H7] (według numeracji ze str. 2 autoreferatu) są współautorskie (z udziałem trzech autorów – z Polski, Rumunii i Włoch), pozostałe zaś są napisane samodzielnie przez Habilitanta. Cały ten materiał liczy łącznie 88 stron. Prace wchodzące w skład tego cyklu ukazały się w latach 2012–2020, w tym po jednej w roku 2012 i w kolejnych latach od 2015 do 2019 oraz dwie w roku 2020. Wszystkie artykuły zostały opublikowane w czasopismach z listy JCR: dwie w *Journal of Fixed Point Theory and Applications* (100 pkt.[1]), dwie w *Fixed Point Theory and Applications* (70 pkt.) i po jednej w *Proceedings of the American Mathematical Society* (100 pkt.), *Results in Mathematics* (100 pkt.), *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A, Matematicas – RACSAM* (100 pkt.) i *Topological Methods in Nonlinear Analysis* (70 pkt.).

Prace wchodzące w skład omawianego cyklu uzyskały w bazie MathSciNet 136 cytowań, zaś w bazie Web of Science (WoS) 474 cytowania (według stanu na dzień 20 maja 2021 r.), co jest wynikiem wyjątkowym. W szczególności, według bazy WoS cytowania tych prac przedstawiają się następująco: [H1] – 387, [H5] – 35, [H2] – 27, [H3] – 14, [H4] – 6 i [H6] – 5. Prace [H7] i [H8] nie mają jeszcze cytowań, ale ukazały się całkiem niedawno – w 2020 r. Artykuły [H1] i [H5] uzyskały w bazie WoS status *Highly Cited Paper*, co oznacza, że należą do 1% najczęściej cytowanych prac wśród innych opublikowanych w tej samej dziedzinie i w tym samym roku. Te dane dają wstępnie bardzo pozytywny obraz prac [H1]–[H8]: ukazały się one w dość wysoko punktowanych czasopismach (5x100 pkt. i 3x70 pkt.) i mają imponujące cytowania. Jednak bardziej szczegółowa lektura tych artykułów nieco mnie rozczarowała w stosunku do pozytywnych wrażeń jakie miałem po pobieżnym przejrzeniu tego materiału.

Przechodzę do omówienia prac stanowiących osiągnięcie naukowe dra Wardowskiego, przedstawiając w pierwszej kolejności artykuły, wobec których mam pewne uwagi krytyczne.

[1] Punktacja według wykazu czasopism naukowych z przypisaną liczbą punktów, opublikowanego w dniu 9 lutego 2021 r.

Praca [H1]. Załóżmy, że (X,d) jest przestrzenią metryczną i $T\colon X \to X$. Zauważmy, że klasyczny warunek zwężania,

$$d(Tx,Ty) \leqslant \alpha d(x,y) \ \text{ dla dowolnych } \ x,y \in X \ \text{ i pewnego } \ \alpha \in (0,1),$$

można równoważnie zapisać w postaci:

$$\tau + \ln d(Tx,Ty) \leqslant \ln d(x,y) \ \text{ dla dowolnych } \ x,y \in X \ \text{ takich, że } \ Tx \neq Ty,$$

gdzie $\tau := -\ln \alpha$ (wtedy $\tau > 0$). Zapewne ta prosta obserwacja zainspirowała dra Wardowskiego do sformułowania następującej definicji ([H1, Definition 2.1]): T jest F-kontrakcją, jeśli istnieje takie $\tau > 0$, że

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leqslant F(d(x,y)) \ \text{ dla dowolnych } \ x,y \in X \ \text{ takich, że } \ Tx \neq Ty,$$

gdzie funkcja $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:
(F1) F jest ściśle rosnąca;
(F2) dla dowolnego ciągu (t_n) liczb dodatnich,

$$t_n \to 0 \ \Leftrightarrow \ F(t_n) \to -\infty;$$

(F3) istnieje takie $k \in (0,1)$, że $\lim_{t\to 0^+} t^k F(t) = 0$.
Zauważmy teraz, że z kolei tę definicję można upodobnić do klasycznego warunku zwężania, zapisując ją równoważnie w postaci:

$$G(d(Tx,Ty)) \leqslant \alpha G(d(x,y)) \ \text{ dla dowolnych } \ x,y \in X,$$

gdzie $G(t) := e^{F(t)}$ dla $t > 0$, $G(0) := 0$ i $\alpha := e^{-\tau}$ (wtedy $\alpha \in (0,1)$). Wówczas funkcja G spełnia warunki:
(G1) G jest ściśle rosnąca;
(G2) dla dowolnego ciągu (t_n) liczb dodatnich,

$$t_n \to 0 \ \Leftrightarrow \ G(t_n) \to 0;$$

(G3) istnieje takie $k \in (0,1)$, że $\lim_{t\to 0^+} t^k \ln G(t) = 0$.
Jedynym rezultatem pracy [H1] jest twierdzenie orzekające, że każda F-kontrakcja T określona na przestrzeni metrycznej zupełnej ma dokładnie jeden punkt stały x_*, przy tym dla dowolnego $x \in X$, $T^n x \to x_*$. Ten wynik jest jednak bardzo szczególnym przypadkiem twierdzenia z mojej pracy opublikowanej 3 lata wcześniej:

J. Jachymski, *Remarks on contractive conditions of integral type*, Nonlinear Anal. 79 (2009), 1073–1081.

W twierdzeniu 9 z tej pracy zakłada się jedynie, że funkcja G spełnia warunek (G2); równoważnie, wystarcza, że funkcja F rozważana przez Habilitanta spełnia warunek (F2). Co więcej, w twierdzeniu 9 pojawia się ogólniejszy warunek zwężania postaci

$$G(d(Tx,Ty)) \leqslant \varphi(G(d(x,y))) \ \text{ dla dowolnych } \ x,y \in X,$$

gdzie funkcja $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest niemalejąca, prawostronnie półciągła z góry i taka, że $\varphi(t) < t$ dla $t > 0$[2].

[2] Funkcję φ o takich własnościach rozważał F. Browder w 1968 r. w pracy z *Indagationes Math.* dowodząc, że każda φ-kontrakcja (T jest φ-kontrakcją, gdy $d(Tx,Ty) \leqslant \varphi(d(x,y))$ dla $x,y \in X$) ma dokładnie jeden punkt stały.

W pracy [H1] znajdujemy ponadto przykład (Example 2.5) pokazujący, że istnieją F-kontrakcje niebędące kontrakcjami Banacha. Dr Wardowski nie odniósł się jednak do relacji między F-kontrakcjami, a dobrze znanymi z literatury φ-kontrakcjami. Tymczasem F-kontrakcja opisana w jego przykładzie jest kontrakcją Browdera (zob. przypis na dole str. 2) – wynika to z twierdzenia 2 z cytowanej wyżej pracy, gdy uwzględnić, że funkcja F określona w tym przykładzie jest ciągła. Co więcej, twierdzenie z pracy [H1] nie uogólnia twierdzenia Browdera, gdyż, jak wynika z dowodu tego twierdzenia, każda F-kontrakcja T ma tę własność, że dla dowolnego $x \in X$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} d(T^n x, T^{n+1} x)$ jest zbieżny, podczas gdy istnieją φ-kontrakcje, które tej własności nie posiadają.

Praca [H2]. Tu Habilitant, wspólnie z dr Dorotą Klim, uogólnia twierdzenia z pracy [H1] na przypadek odwzorowań wielowartościowych. Nowością jest także zastąpienie stałej τ w definicji F-kontrakcji przez $\tau(d(x,y))$ – teraz τ jest pewną funkcją na $(0,\infty)$ o wartościach dodatnich. Moim zdaniem definicja wielowartościowej F-kontrakcji jest jednak bardzo techniczna i trudna do zweryfikowania w konkretnych sytuacjach. W dalszej części pracy Autorzy zajmują się już tylko jednowartościowymi F-kontrakcjami w tym nowym sensie, formułując dla nich dwa wnioski (Corollary 3.1 i 3.2) o istnieniu punktów stałych. Następnie prezentują przykład, który ma pokazywać, że użycie funkcji τ zamiast stałej znacząco rozszerza możliwości zastosowań nowego twierdzenia w stosunku do wyniku pracy z artykułu [H1]. Tymczasem funkcja τ określona w tym przykładzie jest taka, że $\tau(t) \geqslant 2$ dla dowolnego $t > 0$ i w rezultacie składnik $\tau(d(x,Tx))$ w warunku zwężania można zastąpić przez 2.

Ostatnim rezultatem jest twierdzenie 5.1 podające warunek dostateczny na istnienie rozwiązań pewnego równania funkcyjnego. Ma ono ilustrować możliwości zastosowań drugiego z wniosków (Corollary 3.2) w tzw. programowaniu dynamicznym – mamy tu odsyłacz do artykułu [9]. Jednak założenia tego twierdzenia prowadzą do sprzeczności: nie istnieje funkcja $C\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, która spełniałaby jednocześnie warunki

$$\liminf_{s \to t^+} C(s) > 0 \text{ dla dowolnego } t \geqslant 0 \text{ i } C(t) < t \text{ dla dowolnego } t > 0.$$

Istotnie, przypuśćmy, że zachodzą oba te warunki. Mamy, że $0 < C(t) < t$ dla dowolnego $t > 0$, skąd wynika, że $\lim_{t \to 0^+} C(t) = 0$, co daje sprzeczność z warunkiem pierwszym. Nie wydaje się, żeby można tu było mówić o błędzie drukarskim, gdyż założenie dotyczące powyższej granicy dolnej obejmuje przypadek $t = 0$ także w twierdzeniu 3.1 oraz wnioskach 3.1 i 3.2, a w autoreferacie nie znalazłem żadnego sprostowania. Analiza dowodu twierdzenia 3.1 pokazuje jednak, że wystarczy założyć, że $\liminf_{s \to t^+} C(s) > 0$ dla dowolnego $t > 0$, a to pozwala na uniknięcie powyższej sprzeczności.

Praca [H3]. Habilitant, wspólnie z N. Seceleanem, otrzymał tu m.in. uogólnienie rezultatu z pracy [H1] eliminując warunek (F3) i osłabiając (F1) – o funkcji F zakłada się teraz, że jest ograniczona z góry na zbiorach ograniczonych. (Jak już wspomniałem, warunek (F1) można jednak całkowicie usunąć z założeń twierdzenia z artykułu [H1].) Osłabiony został także warunek zwężania – Autorzy rozważają tu szerszą klasę tzw. słabych ψF-kontrakcji (Definition 3.1), które nie muszą być ani nieoddalające, ani rozszerzające. Ilustrują to dwoma skomplikowanymi przykładami: w szczególności, analiza przykładu 3.3 zajmuje pełne trzy strony. Tymczasem można podać bardzo prostą konstrukcję ψF-kontrakcji o takiej własności. W tym celu rozważmy zbiór $X := \{0, 1, 2\}$ z metryką euklidesową i odwzorowanie T określone wzorem:

$$T0 := 0 =: T2 \ \text{ i } \ T1 := 2.$$

Wtedy $d(T0,T2) < d(0,2)$, więc T nie jest rozszerzające. Z kolei $d(T0,T1) > d(0,1)$, więc T nie jest nieoddalające. By pokazać, że T jest ψF-kontrakcją zauważmy, że gdy $Tx \neq Ty$ to $x = 1$ lub $y = 1$, przy tym $x \neq y$. Stąd $d(x,y) = 1$ i $d(Tx,Ty) = 2$. Wystarczy więc wskazać jakiekolwiek funkcje F i ψ spełniające warunki z definicji 3.1 tak, by zachodziła nierówność $F(2) \leqslant \psi(F(1))$. Możemy np. przyjąć $\psi(t) := t - 1$ dla $t \in R$ oraz

$$F(t) := -\frac{1}{t} + 3 \text{ dla } t \in (0,1], \ F(t) := 3 - t \text{ dla } t \in (1,2], \ F(t) := 1 \text{ dla } t > 1.$$

Ostatnie zdanie na str. 425 artykułu sugeruje, że być może Autorzy uważali, że dopiero użycie ich twierdzenia 3.1 o punktach stałych słabych ψF-kontrakcji pozwala wnioskować o zbieżności ciągu kolejnych iteracji odwzorowania T zdefiniowanego w przykładzie 3.3. To jednak dostajemy natychmiast z faktu, że obcięcie $T|_{[1,2]}$ jest kontrakcją Banacha ze stałą zwężania równą 1/2, zaś $T^{n+2}3 = 1$ i $T^{n+1}3.5 = 1$, skąd wynika, że w rezultacie ciągi $(T^n x)$ są zbieżne dla dowolnego $x \in [1,2] \cup \{3, 3.5\}$.

W treści twierdzenia 3.1 znalazłem niefortunne sformułowanie: "there exists $x_0 \in X$ such that the sequence $(T^n x_0)$ is bounded (in particular T is bounded)." Może sugerować ono, że dla ψF-kontrakcji ograniczoność pewnej orbity implikuje ograniczoność odwzorowania. Należało raczej napisać w nawiasach: "in particular, this condition holds if T is bounded".

Jak wynika z oświadczeń współautorów, rozdział 4. *Applications*, został opracowany samodzielnie przez Habilitanta. Głównym rezultatem jest tu twierdzenie 4.1 podające warunek dostateczny na istnienie rozwiązań pewnego równania całkowego typu Volterry. Moja pierwsza wątpliwość dotyczy już samego początku dowodu, gdy Autor stwierdza, że warunek (C1) (ciągłość funkcji K i H) implikuje ograniczoność (nieliniowego) operatora T. Ta ograniczoność powinna być rozumiana jako ograniczoność zbioru $T(C([0,T]))$, by można było skorzystać z twierdzenia 3.1. Tymczasem T nie musi być ograniczony: gdy np. $K(t,s,u) := u$ i $h(t) := 0$ dla $t,s \in [0,T]$ i $u \in \mathbb{R}$ to łatwo sprawdzić, że $\|Tu_n\|_\lambda \to \infty$, gdy $u_n(t) := e^{nt}$ dla $t \in [0,T]$. Powstaje więc pytanie czy warunek (C2) pozwala wykazać ograniczoność operatora T. Okazuje się, że tak, ale niestety warunek (C2) jest na tyle silny, że wynika z niego iż K jest funkcją stałą względem trzeciej zmiennej, a w konsekwencji operator T jest stały! W efekcie rozważane równanie (9) trywializuje się przybierając postać:

$$u(t) = \int_0^t K(t,s,0)ds + h(t).$$

Istotnie, ustalmy chwilowo liczby $t \in (0,1]$, $s \in [0,1]$ i $u \in \mathbb{R}$. Z (C2) wynika, że ciąg $(1/\tau_n)$ jest niemalejący i dąży do ∞. Zatem istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $1/\tau_n \geqslant |u|$ dla dowolnego $n \geqslant k$. Dla takich n możemy wnioskować z (C2), że

$$|K(t,s,u) - K(t,s,0)| \leqslant \frac{\lambda}{2\tau_n} \exp\left\{\left(1 - \frac{1}{\tau_{n+1}}\right)\lambda t\right\}|u| \leqslant \frac{\lambda e^{\lambda t}|u|}{2} \frac{e^{-\frac{\lambda t}{\tau_{n+1}}}}{\tau_{n+1}}.$$

Oznaczmy $r_n := 1/\tau_{n+1}$. Skoro $r_n \to \infty$ to

$$\frac{e^{-\frac{\lambda t}{\tau_{n+1}}}}{\tau_{n+1}} = \frac{r_n}{e^{\lambda t r_n}} \to 0 \ \text{ przy } \ n \to \infty.$$

W konsekwencji, z powyższej nierówności wynika po przejściu z n do ∞, że $K(t,s,u) = K(t,s,0)$. Pokazaliśmy, że ta równość zachodzi dla $(t,s,u) \in (0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ więc z ciągłości K zachodzi również przy $t = 0$. Tak więc, twierdzenie 3.1, chociaż prawdziwe, jest całkowicie trywialne.

Praca [H5]. Jest to samodzielna praca Habilitanta, która ukazała się w czasopiśmie *Proc. Amer. Math. Soc.* w 2018 r. Jak już wspomniałem, mimo krótkiego czasu od jej opublikowania, ma już 35 cytowań i uzyskała w bazie WoS status *Highly Cited Paper*. Mam jednak do tej pracy poważne zastrzeżenia. Odnotuję wpierw mniej istotną uwagę, że definicja tzw. 'dużych kontrakcji' podana przez Burtona jest tu niepoprawnie sformułowana (zob. str. 1587 artykułu). Istotnie, łatwo pokazać, że jedynym odwzorowaniem T spełniającym podany w pracy warunek

$$\text{dla dowolnego } \ \varepsilon > 0 \text{ i } \ x, y \in X, \ d(x,y) \geqslant \varepsilon \ \text{ implikuje, że } \ d(Tx, Ty) < \varepsilon$$

jest odwzorowanie stałe.

Jednym z głównych wyników pracy jest twierdzenie 2.1 o punkcie stałym tzw. (φ, F)-kontrakcji (zob. str. 1587 artykułu), uogólniające rezultat z pracy [H2] poprzez eliminację założenia (F3). Dla zasadności rozważań (φ, F)-kontrakcji z funkcją φ zamiast stałej, jak to miało miejsce w artykule [H1], dr Wardowski podał twierdzenie (zob. Theorem 3.1) ponownie dotyczące równania całkowego typu Volterry. Założenia te, na pierwszy rzut oka, wydają się nieco trudne do weryfikacji w konkretnych sytuacjach i pewnie dlatego Habilitant napisał w autoreferacie na str. 9, że "*w moim zamyśle twierdzenie to miało jedynie zobrazować nietrywialne zastosowanie (φ, F)-kontrakcji, tzn. z niestałą funkcją φ oraz funkcją F generującą warunek zwężania niedający się sprowadzić do znanych nierówności kontrakcyjnych typu Banacha lub jego najbardziej znanych rozszerzeń*". Jednak ten rezultat ma dokładnie ten sam defekt, co twierdzenie 4.1 z pracy [H3]: założenia o funkcji K implikują, że jest ona stała jako funkcja względem trzeciej zmiennej i w konsekwencji, tak jak poprzednio, rozważane równanie jest całkowicie trywialne. Istotnie, podobnie jak wcześniej można uzyskać, uwzględniając tu, że $\alpha_n e^T \to \infty$ (zob. str. 1592–1593 artykułu [H5]), iż dla $t \in (0,T]$, $s \in [0,T]$ i $u \in \mathbb{R}$

$$|K(t,s,u) - K(t,s,0)| \leqslant \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})} e^{-t\alpha_n} |u| \leqslant \frac{\alpha_n}{e^{t\alpha_n}} |u|.$$

(Druga z nierówności wynika z faktu, że $\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1}) > 0$, gdyż $\alpha_n > 0$ i ciąg (α_n) jest ściśle rosnący.) Przechodząc z n do ∞ uzyskamy stąd, że $K(t,s,u) = K(t,s,0)$ i ponownie z ciągłości funkcji K wnosimy, że ta równość zachodzi też przy $t = 0$.

Praca [H7]. Ta praca, napisana wspólnie z N. Seceleanem, opiera się dość ściśle na materiale z artykułu Xianga i Yuana (pozycja [18] w bibliografii pracy [H7]), w którym otrzymano twierdzenie typu Krasnosielskiego dla sumy operatorów, z których jeden jest kondensujący, a drugi rozszerzający. Autorzy pracy [H7] wprowadzają pewien nowy typ odwzorowań rozszerzających (zob. str. 134, warunek (A)) i uzyskują dla nich twierdzenie o punkcie stałym (zob. Theorem 2.1). Dowód jest standardowy i opiera się na prostej obserwacji, że odwzorowanie odwrotne spełnia wtedy warunek zwężania opisany wcześniej we wniosku 1.1. Autorzy, by otrzymać ten wniosek, odwołują się do twierdzenia 2.1 z pracy [H5], ale nie ma takiej potrzeby, gdyż opisane we wniosku odwzorowanie jest φ-kontrakcją, gdzie $\varphi(t) := t/(ct+1)$ więc wniosek 1.1 wynika bezpośrednio ze wspomnianego na str. 3 recenzji twierdzenia Browdera z 1968 r. Głównym rezultatem pracy [H7] jest twierdzenie 2.2 będące pewnym wariantem twierdzenia

Xianga i Yuana [18, Theorem 2.6] o punktach stałych operatora $S+T$. Z jednej strony, w [H7] zakłada się ogólniej, że operator T jest rozszerzający w sensie opisanym wyżej, ale z kolei od S wymaga się, aby był zwarty, podczas gdy w [18] operator S jest kondensujący. Podobnie jak [18], praca [H7] kończy się twierdzeniem o istnieniu rozwiązań okresowych pewnego równania całkowego z opóźnieniem.

Praca [H8]. Dr Wardowski wprowadza tu pojęcie rodziny odwzorowań *jednakowo kontraktywnej w sposób osobliwy.* Znów wstępnie można odnieść wrażenie, że jest to warunek, który nie był dotąd rozważany w literaturze, ale po prostych przekształceniach można go zapisać w postaci:

$$\|T(x,p)-T(y,p)\| \leqslant \varphi(\|x-y\|) \quad \text{dla} \quad x,y\in A \quad \text{i} \quad p\in C(A),$$

gdzie $\varphi(t):=t/(ct+1)$ dla $t\geqslant 0$, A jest podzbiorem przestrzeni Banacha, a $C\colon A\to M$, przy tym M jest przestrzenią metryczną. Oznacza to, że rodzina $\{T(\cdot,p): p\in C(A)\}$ jest rodziną φ-kontrakcji z tą samą funkcją φ określoną wyżej. Takie rodziny były badane już w 1978 r. przez Dugundji'ego i Granasa, którzy otrzymali dla nich twierdzenie o ciągłej zależności punktów stałych od parametru przy założeniu, że φ jest dowolną funkcją o własnościach opisanych we wspomnianym twierdzeniu Browdera oraz odwzorowanie $p\mapsto x_p$ jest lokalnie ograniczone, gdzie x_p jest punktem stałym odwzorowania $T(\cdot,p)$. To ostatnie, raczej techniczne założenie udało nam się zastąpić przez dodatkowy warunek[3] na funkcję φ postaci

$$\liminf_{t\to\infty}(t-\varphi(t))>0,$$

który jest spełniony dla φ zdefiniowanej wyżej. Odpowiednie twierdzenie znajduje się w pracy

J. Jachymski, I. Jóźwik, *Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems*, Fixed point theory and its applications, 123–146, Banach Center Publ., 77, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007.

(Zob. Theorem 11 i Remark 11.) W konsekwencji twierdzenie 2.1 Habilitanta, uogólniające wcześniejszy wynik Karakostasa, można znacząco rozszerzyć rozważając dowolną rodzinę φ-kontrakcji z jakąkolwiek funkcją φ o opisanych wyżej własnościach. Ponadto takie rozszerzenie twierdzenia 2.1 jest prostą konsekwencją wspomnianego rezultatu z naszej pracy – o ciągłej zależności punktów stałych od parametru. Istotnie, przy oznaczeniach z pracy [H8], ciągłość operatora S (jej wykazanie zajmuje większą część dowodu w pracy [H8]) wynika natychmiast z tego rezultatu, zaś istnienie punktu stałego odwzorowania $S\circ C$ gwarantuje nam bezpośrednio twierdzenie Schaudera w wersji zaprezentowanej np. w monografii Dugundji'ego i Granasa (w nowym wydaniu tej książki znajduje się ono na str 119).

Praca [H6]. Zwykłe φ-kontrakcje, z taką samą funkcją φ jak ta, która pojawia się w artykułach [H7] i [H8], występują też w pracy [H6] w głównym twierdzeniu 2.4, które jest swego rodzaju kombinacją twierdzeń Krasnosielskiego i Schaefera. Nie jest to jednak całkiem oryginalny pomysł – Habilitant i C. Vetro w dużej mierze bazują na ideach artykułu Burtona i Kirka (pozycja [2] bibliografii [H6]), którzy uzyskali tego typu twierdzenie używając kontrakcji Banacha. Ponadto Autorzy dla prezentacji zastosowania głównego wyniku artykułu [H6]

[3] W późniejszej pracy pokazałem, że ten warunek można pominąć.

analizują identyczne równanie całkowe jak w pracy [2]. Oczywiście szczegóły techniczne są inne, ale główne idee z artykułu [2] zostały zachowane.

Praca [H4] wychodzi poza tematykę artykułów z omawianego cyklu i dotyczy operatorów o własności tzw. mieszanej monotoniczności wprowadzonych w 1987 r. przez Guo i Lakshmikanthama. Dr Wardowski wprowadził tu pojęcie operatora (e, u)-wklęsło-wypukłego, określonego na iloczynie kartezjańskim przesunięcia pewnego podzbioru stożka w przestrzeni Banacha i uzyskał dwa twierdzenia (zob. Theorems 2.1 i 2.2) o punktach stałych takich operatorów. Twierdzenie 2.2 jest wspólnym uogólnieniem dwóch twierdzeń innych autorów z artykułów [6] i [7] oraz zostało zastosowane przez Habilitanta do wykazania istnienia i jednoznaczności rozwiązań pewnego nieliniowego równania całkowego. Z autoreferatu dowiadujemy się, że twierdzenie 2.2 zostało wykorzystane przez innych matematyków przy badaniu nieliniowego równania różniczkowego ułamkowego rzędu – ich praca ukazała się w 2019 r. w czasopiśmie *Topol. Methods Nonlinear Anal.*

Jak widać skupiłem się wyżej głównie na samych uwagach krytycznych, odnotowując przy tym pewne istotne wpadki Habilitanta. Najważniejsze z nich to trzy trywialne twierdzenia z prac [H2], [H3] i [H5], które miały ilustrować możliwości zastosowań wprowadzonych narzędzi. Jestem przy tym zaskoczony, że nikt z licznie cytujących go autorów nie zauważył tych defektów. Dopuszczam możliwość, że to ja się mylę i dlatego chciałbym, aby pozostali Członkowie Komisji zweryfikowali poprawność mojej argumentacji przed naszym posiedzeniem.

Z drugiej strony, muszę przyznać, że te prace czytałem z pewnym zainteresowaniem dostrzegając możliwości dalszego rozszerzania niektórych rezultatów. Artykuły Habilitanta są napisane starannie i dobrze prezentują się na tle prac innych autorów z tej tematyki. Widać, że dr Wardowski posiada niezłą sprawność rachunkową i ma pewien potencjał naukowy, chociaż nie zawsze podąża najkrótszą drogą do celu. W przypadku pracy [H1], tej najczęściej cytowanej, sądzę, że Habilitant nie znał mojego artykułu z Nonlinear Anal. z 2009 r. i uzyskał główny wynik – w mniej ogólnej wersji niż mój – niezależnie, stosując przy tym całkiem inną metodę dowodzenia. Dane dotyczące cytowań prac [H1]-[H8], które przytoczyłem na początku recenzji, niewątpliwie pokazują, że te prace wywarły duży wpływ na rozwój dyscypliny, w której pracuje Habilitant. Dlatego w zasadzie mogę uznać, że spełniony jest wymóg określony w punkcie 2, ustęp 1 artykułu 219 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r., "Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce".

OCENA ISTOTNEJ AKTYWNOŚCI NAUKOWEJ

Dr Dariusz Wardowski jest autorem 21 publikacji – wszystkie z nich znajdują się w bazach *MathSciNet* i WoS. W tej pierwszej bazie prace te są cytowane 284 razy przez 261 autorów; indeks Hirscha wynosi 8. Z kolei według bazy WoS artykuły Habilitanta zebrały 931![4] cytowań, w tym 900 bez autocytowań, co daje świetny wynik jeśli chodzi o średnią liczbę cytowań przypadających na jedną pracę: 44,33. Indeks Hirscha w tej bazie wynosi 11. Te dane pokazują, że prace Habilitanta wywarły znaczny wpływ na rozwój dziedziny, w której pracuje: metrycznej i topologicznej teorii punktów stałych. Warto podkreślić, że te cytowania odnoszą się zwykle do **konkretnych** rezultatów dra Wardowskiego – nie są to cytowania typu „podobną tematyką

[4] Wykrzyknik nie oznacza tu jednak silni.

zajmowano się w pracach [...]...". W bazie MathSciNet, po wpisaniu w wyszukiwarce w pozycji '*Title*' nazwiska *Wardowski*, pojawia się lista 17 prac, w tytułach których znajdujemy frazy postaci: '*Wardowski type fixed point theorem*', '*Wardowski function*', '*Wardowski type contraction*' czy też '*Wardowski type mapping*'. W 2020 r. ukazała się w czasopiśmie *Journal of Fixed Point Theory and Applications* obszerna (58 stron), przeglądowa praca E. Karapınara i in., poświęcona omówieniu wyników dotyczących F-kontrakcji Wardowskiego i ich zastosowań (tytuł: *A survey: F-contractions with related fixed point results*). Świadczy to o tym, że wyniki Habilitanta są wysoko cenione przez innych specjalistów pracujących w tej dziedzinie.

Udało mi się ustalić, chociaż tej informacji nie ma w autoreferacie, że w grudniu 2020 r. dr Wardowski znalazł się na liście prestiżowego *The World's Top 2% Scientists* wśród naukowców z całego świata, których prace były najczęściej cytowane w 2019 r. (pozycja 70982 na 161441 sklasyfikowanych, a więc nawet w pierwszym procencie). Dało mu to 11. miejsce wśród 44 naukowców z łódzkich uczelni, w tym 3. wśród 15 pracowników Uniwersytetu Łódzkiego. W tej ostatniej grupie nie było żadnego, innego matematyka.

Trzynaście prac Habilitanta, które nie weszły w skład cyklu stanowiącego osiągnięcie naukowe, zostało opublikowanych także w czasopismach z listy JCR. Cztery prace, powstałe przed uzyskaniem stopnia doktora, ukazały sie w czasopismach *Nonlinear Analysis* (140 pkt.; 2 prace) i *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (70 pkt.; 2 prace). Pozostałe 9 zostało wydrukowanych w czasopismach *Applied Mathematics Letters* (100 pkt.), *Fuzzy Sets and Systems* (140 pkt.), *Fixed Point Theory and Applications* (70 pkt.), *Demonstratio Mathematica* (20 pkt.), *Carpathian Journal of Mathematics* (40 pkt.), *Advances in Difference Equations* (40 pkt.; 2 prace), *Results in Mathematics* (100 pkt.) i *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* (40 pkt.).

W ostatnim czasie dr Wardowski wraz z N. Seceleanem napisali rozdział w monografii *Recent Advances in Fixed Point Theory and Applications*, który został przyjęty do druku, a monografia zostanie wkrótce opublikowana przez wydawnictwo Springer. Można więc uznać, że Habilitant znajduje się wciąż na 'fali wznoszącej'.

Podsumowując tą część recenzji, jestem skłonny uznać, że dr Wardowski wykazuje się istotną aktywnością naukową, realizowaną także we współpracy z uczelniami zagranicznymi. W związku z tym, moim zdaniem, jest spełniony wymóg określony w punkcie 3, ustęp 1 artykułu 219 wspomnianej Ustawy.

OCENA DOROBKU DYDAKTYCZNEGO I POPULARYZATORSKIEGO ORAZ WSPÓŁPRACY MIĘDZYNARODOWEJ

Nie znalazłem informacji o wykładach prowadzonych przez dra Wardowskiego. Jest on natomiast bardzo aktywny jako promotor prac dyplomowych – miał 6 licencjatów i 38 magistrantów, z których jeden został laureatem konkursu organizowanego przez Fundację UŁ. Prowadził autorskie szkolenia dla nauczycieli i brał udział w kilku kursach mających doskonalić umiejętności dydaktyczne, w tym np. w kursie języka migowego. Brał udział w organizacji konkursów matematycznych i targów edukacyjnych.

Habilitant wykazuje też aktywność w zakresie w popularyzacji nauki. Prowadził wykłady popularno-naukowe z matematyki dla dzieci i młodzieży, wykłady podczas Festiwali Nauki, Techniki i Sztuki, wykłady w szkołach średnich promujące matematykę i informatykę, i inne zajęcia opisane na str. 22. autoreferatu.

Dość dobrze prezentuje się też współpraca międzynarodowa dra Wardowskiego. Szczególnie owocna okazała się współpraca z prof. N.-A. Seceleanem z Lucian Blaga University of Sibiu w Rumunii, a także ostatnio z prof. C. Vetro z Uniwersytetu w Palermo, u którego dwukrotnie gościł na tygodniowych pobytach badawczych. Wcześniej Habilitant napisał dwa artykuły wspólnie z prof. N.V. Dungiem z Wietnamu, a ostatnio jeden z prof. S. Mathew z Indii. Recenzował dwie prace doktorskie realizowane na dwóch uczelniach w Indiach. Od 2016 r. jest członkiem komitetu redakcyjnego czasopisma *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* (od 2018 r. jest też członkiem komitetu redakcyjnego polskiego czasopisma *Demonstratio Mathematica*). Słabo natomiast wypada jego aktywność konferencyjna: po uzyskaniu stopnia doktora uczestniczył tylko w jednej konferencji międzynarodowej, ale za to w Australii. Dr Wardowski jest natomiast często powoływany na recenzenta artykułów naukowych – lista międzynarodowych czasopism dla których pisał recenzje liczy 19 pozycji (zob. str. 5 wykazu osiągnięć naukowych). Od 2019 r. jest też recenzentem w Mathematical Reviews.

KONKLUZJA

Pomimo dość wielu uwag krytycznych, które przedstawiłem w pierwszej części recenzji, uważam, że prace stanowiące osiągnięcie naukowe Habilitanta wnoszą istotny wkład wiedzy w metryczną teorię punktów stałych. Z drugiej strony, należy wziąć pod uwagę, że teoria ta jest daleka od głównego nurtu badań w matematyce, chociaż zajmuje się nią duża grupa badaczy. Prace z omawianego cyklu prezentują dobry poziom na tle artykułów innych autorów pracujących w tej dziedzinie i wzbudzają duże zainteresowanie. Pozostały dorobek twórczy Habilitanta również prezentuje się nieźle – te prace ukazały się w większości w dość wysoko punktowanych czasopismach. Gorzej wypada jego aktywność konferencyjna, ale z kolei dobrze można ocenić współpracę międzynarodową. Biorąc więc pod uwagę ocenę całości jego dorobku, jestem skłonny, chociaż z pewnymi wahaniami, przychylić się do poparcia wniosku o nadanie dr. Dariuszowi Wardowskiemu stopnia doktora habilitowanego.

Jacek Jachymski

J. Jachymski