prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Poznań, 9 czerwca 2021

Ocena dorobku naukowego doktora Dariusza Wardowskiego w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Pan dr Dariusz Wardowski stopień doktora nauk matematycznych uzyskał na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego w 2009 roku, na podstawie rozprawy doktorskiej „Punkty stałe jednowartościowych i wielowartościowych odwzorowań w przestrzeniach metrycznych i metrycznych stożkowych", napisanej pod kierunkiem prof. dr hab. Kazimierza Włodarczyka. Od października 2005 roku do grudnia 2009 roku był zatrudniony na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego na stanowisku asystenta, a od stycznia 2010 roku jest zatrudniony na stanowisku adiunkta na tym samym Wydziale.

Rozprawa habilitacyjna dra Wardowskiego pt. *Zastosowania punktów stałych w rozwiązywaniu nieliniowych zagadnień egzystencjalnych* składa się z następujących ośmiu artykułów:

[H1] D. Wardowski, *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **94** (2012), 6 pp.

[H2] D. Klim, D. Wardowski, *Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), no. 1, 132–139.

[H3] N. A. Secelean, D. Wardowski, *ψF-contractions: not necessarily nonexpansive Picard operators*, Results Math. **70** (2016), no. 3-4, 415–431.

[H4] D. Wardowski, *Mixed monotone operators and their application to integral equations*, J. Fixed Point Theory Appl. **19** (2017), no. 2, 1103–1117.

[H5] D. Wardowski, *Solving existence problems via F-contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 4, 1585–1598.

[H6] C. Vetro, D. Wardowski, *Krasnoselśkii-Schaefer type method in the existence problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **54** (2019), no. 1, 131–139.

[H7] N. A. Secelean, D. Wardowski, *Expansive mappings on bounded sets and their application to rational integral equations*, RACSAM **114** (2020), no. 3, Paper No. 134, 9 pp.

[H8] D. Wardowski, *Family of mappings with an equicontractive-type condition*, J. Fixed Point Theory Appl. **22** (2020), no. 3, Paper No. 55, 9 pp.

Z załączonych oświadczeń Habilitanta oraz współautorów artykułów [H2], [H3], [H6] i [H7] wynika, że Habilitant był pomysłodawcą badań i miał istotny wkład w powstanie wymienionych współautorskich prac. Kluczową rolę w badaniach dra Wardowskiego odgrywa rodzina $\mathcal{F}$ rosnących funkcji $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełniających warunki: $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy (α_n) jest dodatnim ciągiem z c_0; istnieje stała $k = k(F) \in (0,1)$ taka, że $\lim_{\alpha\to 0+} \alpha^k F(\alpha) = 0$.

Ze względu na nieco złożoną terminologię oraz liczne założenia w pewnych twierdzeniach omówię tylko najbardziej wartościowe rezultaty, które w mojej opinii wnoszą wkład do teorii punktów stałych oraz mają ciekawe zastosowania. W dalszym ciągu przy omawianiu prac zakładamy, że $X = (X,d)$ oznacza zupełną przestrzeń metryczną, natomiast $C(X)$ rodzinę wszystkich niepustych i domkniętych podzbiorów w X.

Krótka praca [H1] dotyczy teorii punktów stałych odwzorowań $T\colon X \to X$ zwanych F-kontrakcjami, tzn. takich, dla których istnieje funkcja $F \in \mathcal{F}$ oraz $\tau > 0$ takie, że $\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$ dla wszystkich $x,y \in X$, spełniających warunek $Tx \neq Ty$. Habilitant dowodzi (Theorem 2.1), że każda F-kontrakcja $T\colon X \to X$ ma dokładnie jeden punkt stały i dla dowolnego $x_0 \in X$ ciąg iteracji $(T^n x_0)$ jest zbieżny w X do tego punktu stałego. Użyteczność powyższego rezultatu wynika z faktu, że przy odpowiednim wyborze funkcji F z rodziny $\mathcal{F}$ Habilitant otrzymuje niektóre wcześniej znane w literaturze warunki zwężania dla odwzorowań na przestrzeniach metrycznych. Łatwo zauważyć, że dowolna kontrakcja na przestrzeni metrycznej jest F-kontrakcją dla $F(t) = \ln t$ dla $t > 0$. Zatem uzyskany wynik uogólnia znaną zasadę odwzorowań zwężających Banacha.

W pracy [H2] (wspólna z D. Klim) dla ustalonej funkcji $F \in \mathcal{F}$ autorzy badają wielowartościowe odwzorowania $T\colon X \to C(X)$ ze względu na dowolny proces dynamiczny (zwane również F-kontrakcjami) $(x_n) \in D(T,x_0) := \left\{(x_n)_{n=0}^{\infty};\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n \in Tx_{n-1}\right\}$ w punkcie $x_0 \in X$, dla których istnieje funkcja $\tau\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ taka, że $\tau(d(x_{n-1},x_n)) + F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_{n-1},x_n))$ dla wszystkich $n \geq 1$ spełniających warunek $d(x_n,x_{n+1}) > 0$. Główny wynik Theorem 3.1 z [H2] pokazuje, że jeśli $\liminf_{s\to t+} \tau(s) > 0$ dla każdego $t \geq 0$ oraz odwzorowanie $X \ni x \mapsto d(x,Tx)$ jest $D(T,x_0)$ dynamicznie półciągłe z dołu w każdym punkcie przestrzeni X, to F-kontrakcja $T\colon X \to C(X)$ ze względu na proces dynamiczny $(x_n) \in D(T,x_0)$ ma punkt stały. Autorzy otrzymują ciekawy wniosek (Corollary 3.2), który przy pewnych założeniach na funkcję τ oraz F-kontrakcję $T\colon X \to X$ zapewnia, że T ma punkt stały. Wniosek ten stosują do wykazania istnienia rozwiązania równania funkcyjnego generowanego przez ograniczone funkcje rzeczywiste określone na produktach przestrzeni Banacha.

W pracy [H3] (wspólna z N. A. Secelean) badane są odwzorowania $T\colon X \to X$ zwane (słabymi) ψF-kontrakcjami spełniającymi warunek $F(d(Tx,Ty)) \leq \psi(F(d(x,y)))$ dla wszystkich $x,y \in X$ takich, że $Tx \neq Ty$, gdzie funkcje F i ψ należą do pewnych rodzin funkcji rzeczywistych zdefiniowanych w pracy. Autorzy dowodzą (Theorem 3.1), że jeśli $T\colon X \to X$ jest słabą ψF-kontrakcją taką, że dla pewnego $x_0 \in X$ ciąg $(T^n x_0)$ jest ograniczony, to T jest operatorem Picarda. Podają przykład słabej ψF-kontrakcji Picarda z nieciągłą funkcją F, która nie jest odwzorowaniem nieoddalającym ani rozszerzającym. W pracy podano zastosowanie wspomnianego twierdzenia do wykazania, że przy pewnych warunkach na funkcje generujące równanie całkowe typu Voltery, istnieje jedyne rozwiązanie tego równania.

Rezultaty zawarte w pracy [H4] dotyczą odwzorowań $A\colon X \times X \to E$ posiadających własność mieszanej monotoniczności, gdzie E jest rzeczywistą przestrzenią Banacha i X jest podzbiorem E z częściowym porządkiem $\leq$ generowanym przez stożek normalny w E. Wspomniana własność oznacza, że operator $A(\cdot,x)$ jest niemalejący i operator $A(x,\cdot)$ jest nierosnący ze względu na częściowy porządek $\leq$. Dr Wardowski zdefiniował operatory (e,u)-wklęsło-wypukłe na produkcie

$X \times X$, gdzie $X = C_{e,u} := \{x \in E;\ \alpha e \leq x + u \leq \beta e$ dla pewnych $\alpha, \beta > 0\}$ jest przedziałem porządkowym określonym przez elementy $u \leq e$, $e \neq 0$ stożka P. Udowodnił (Theorem 2.2), że przy pewnych warunkach operator (e, u)-wklęsło-wypukły $A\colon C_{e,u} \times C_{e,u} \to C_{e,u}$ mieszany monotonicznie ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in C_{e,u}$, tzn. $A(x^*, x^*) = x^*$. Podał zastosowanie tego twierdzenia do wykazania istnienia i jedyności rozwiązania dla pewnego typu równań całkowych.

Podoba mi się praca [H5], gdyż uzyskane w tej pracy wyniki mają ciekawe zastosowania. Na uwagę zasługuje twierdzenie (Theorem 2.2) o odwzorowaniach kondensujących. Dr Wardowski dowodzi, że jeśli $T\colon X \to X$ jest (φ, F)-kontrakcją i funkcje φ, F spełniają pewien ogólny warunek, to dla dowolnego zbioru $A \subset X$ o dodatniej mierze niezwartości Hausdorffa $\beta(A)$ mamy $\beta(T(A)) < \beta(A)$. Ten ciekawy rezultat Habilitant zastosował do udowodnienia twierdzenia (Theorem 2.3) o istnieniu punktów stałych odwzorowań, które są sumami odwzorowania zwężającego i zwartego. Podał również zastosowanie (Theorem 3.2) do ogólnego typu równań całkowych w postaci uwikłanej.

W pracy [H6] (wspólna z C. Verto) badany jest problem dotyczący istnienia periodycznych rozwiązań nieliniowego równania całkowego w przestrzeni Banacha funkcji ciągłych. Główny wynik (Theorem 2.4) pokazuje, że jeśli X jest przestrzenią Banacha, to przy pewnych warunkach na ciągłe odwzorowania $T_1, T_2\colon X \to X$ równanie $x = T_1(x) + T_2(x)$ ma rozwiązanie w X. Dowód twierdzenia opiera się na twierdzeniu Schaefera o punkcie stałym oraz twierdzeniu (Theorem 2.2) udowodnionym w pracy, które głosi, że jeśli $T\colon U \to X$ jest (φ, F)-kontrakcją zbioru otwartego U w przestrzeni Banacha X, to odwzorowanie h określone wzorem $h(x) = x - T(x)$ dla $x \in U$ jest homeomorfizmem U na $h(U)$, gdy funkcja F jest lewostronnie ciągła i φ jest funkcją nierosnącą.

W pracy [H7] (wspólna z N. A. Sacelean) badana jest nowa klasa (A) różnowartościowych odwzorowań $T\colon K \to X$ rozszerzających z podzbioru domkniętego i ograniczonego K przestrzeni metrycznej X takich, że dla pewnej stałej $H > 0$ zachodzi nierówność $H \leq 1/d(x, y) - 1/d(Tx, Ty)$ dla $x, y \in K$, $x \neq y$. Główny wynik (Theorem 2.2) tej pracy dotyczy instnienia punktu stałego odwzorowania $S+T$ w niepustym, domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorze K przestrzeni Banacha E, gdzie $S, T\colon K \to E$ spełniają warunki: $T \in (A)$, odwzorowanie S jest ciągłe i $S(K)$ zawiera się w zwartym podzbiorze przestrzeni E oraz $K \subset z + T(K)$ dla dowolnego $z \in S(K)$.

W samodzielnej pracy [H8] dr Wardowski bada istnienie rozwiązań równania $x = T(x, C(x))$, gdzie $C\colon A \to M$, $T\colon A \times C(A) \to X$, A jest domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X, M przestrzenią metryczną. Dowodzi (Theorem 2.2), że przy pewnych założeniach na rodziny odwzorowań (generowanych za pomocą odwzorowań T i C) wspomniane równanie ma rozwiązanie. Pokazuje zastosowanie tego twierdzenia dowodząc (Theorem 3.1), że przy pewnych warunkach na funkcje ciągłe $h, D\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f\colon [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie w przestrzeni funkcji ciągłych $C(0, 1)$ równania różniczkowego $x'(t) = h(t) + f(t, x(t)) \int_0^t D(t - s)x(s)\,ds$ dla $t \in [0, 1]$ spełniającego warunek początkowy $x(0) = 0$.

Ocena dorobku naukowego. Przedstawione osiągnięcie naukowe dra Wardowskiego stanowi spójny tematycznie zbiór ośmiu artykułów związanych z metryczną teorią punktów stałych i jej zastosowaniami. Teoria ta ma liczne zastosowania w rozstrzyganiu problemów egzystencjalnych w wielu obszarach analizy matematycznej. Fundamentalne twierdzenie Banacha o punktach stałych, zwane zasadą odwzorowań zwężających miało istotny wpływ na powstanie metrycznej teorii punktu stałego, która stanowi obecnie ważny dział współczesnej matematyki. Naturalnym problemem w tej teorii jest dowodzenie ogólnych wariantów twierdzeń o punktach stałych w przestrzeniach metrycznych, z których w szczególności wynika twierdzenie Banacha. Tą problematyką badawczą zajmuje się dr Wardowski. Po analizie prac wchodzących w skład rozprawy oraz dorobku naukowego Habilitanta stwierdzam, że Jego pewne rezultaty nawiązują do wyników innych matematyków i je wzmacniają. Prace [H1]-[H8] wchodzące w skład osiągnięcia naukowego Habilitanta nie są obszerne. Dowody pewnych rezultatów są techniczne i nie są skomplikowane. Jednak w istocie rzeczy uzyskane wyniki są ciekawe a pewne wartościowe. Tutaj należy zwrócić uwagę na 6-stronicową pracę [H1], w której główne twierdzenie głosi, że dowolna F-kontrakcja określona na przestrzeni metrycznej zupełnej ma punkt stały. Pomimo, że dowód tego twierdzenia jest standardowy, to rezultat ten uogólnia m.in. klasyczne twierdzenie Banacha o kontrakcji. Praca [H1] opublikowana w Fixed Point Theory and Appl. 2012 jest najczęściej cytowaną pracą Habilitanta. Według bazy Web of Science praca ta ma 389 cytowań natomiast według bazy MathSciNet 103 cytowania. Ze względu na ciekawe zastosowania podoba mi się praca [H5] o odwzorowaniach kondensujących, w której pojawia się niezwykle ważna w analizie miara niezwartości Hausdorffa. Jak wiadomo miara ta odgrywa istotną rolę w teorii operatorów między przestrzeniami Banacha oraz metrycznej teorii punktów stałych. Za wartościowy rezultat tej pracy uważam twierdzenie o istnieniu punktów stałych odwzorowań, które są sumami odwzorowania zwężającego oraz zwartego i jego zastosowanie do równań całkowych w postaci uwikłanej. Na uwagę zasługuje fakt, że Habilitant motywuje swoje badania i podaje przykłady. Ponadto w wielu przypadkach prezentuje ciekawe zastosowania uzyskanych wyników w analizie nieliniowej co wyeksponowałem w opisie prac. W mojej opinii jest to bardzo pozytywny aspekt w Jego badaniach. Nie jestem specjalistą w metrycznej teorii punktów stałych. Jednak po analizie dorobku naukowego Habilitanta oraz wielu cytowanych prac związanych z Jego tematyką badawczą uważam, że wnosi On wkład do metrycznej teorii punktów stałych. Dorobek naukowy dra Wardowskiego jest rozpoznawalny czego dowodem jest liczba cytowań według bazy Web of Science 927 i według bazy MathSciNet 284.

Ocena aktywności naukowej. Całkowity dorobek dra Wardowskiego składa się z 21 artykułów, w tym 17 artykułów powstało po uzyskaniu stopnia doktora. Poza omówionymi powyżej pracami [H1]-[H8] dr Wardowski jest współautorem 7 oraz autorem 6 artykułów. Dorobek naukowy Habilitanta jest zatem przyzwoity. Jego artykuły zostały opublikowane w dobrych czasopismach matematycznych. Prace niewchodzące w skład publikacji stanowiących osiągnięcie naukowe dotyczą również metrycznej teorii punktów stałych i są na dobrym poziomie. Wśród tych prac zainteresowała mnie praca [18] opublikowana w J. Nonlinear Convex Anal., w której podano zastosowanie twierdzenia (Theorem 2.3) o F-kontrakcji ($F(t) = -1/t$ dla $t > 0$) do udowodnienia twierdzeń o odwracalności operatorów liniowych określonych na przestrzeni Banacha oraz oszacowaniu norm operatorów odwrotnych.

Habilitant był głównym wykonawcą projektu finansowanego przez Unię Europejską dla młodych matematyków (rok realizacji 2009). Był również koordynatorem i głównym wykonawcą projektu finansowanego przez NCN (lata realizacji: 2017–2018). Ponadto w latach 2011–2015 był wykonawcą pięciu projektów finansowanych przez Uniwersytet Łódzki w ramach rozwoju młodych matematyków. Był recenzentem artykułów naukowych dla 19 międzynarodowych czasopism.

Dr Wardowski był czterokrotnie nagradzany przez Rektora Uniwersytetu Łódzkiego za osiągnięcia naukowe. W latach 2012–2020 prowadził współpracę naukową z matematykami z ośrodków w Indiach, Rumunii, Włoch oraz Wietnamu. Efektem współpracy naukowej jest 8 artykułów w tym 3 artykuły [H3, H6, H7] wchodzące w skład osiągnięcia naukowego. Po uzyskaniu stopnia doktora nauk matematycznych dr Wardowski wygłosił cztery odczyty na Forum Matematyków Polskich w latach 2013, 2015, 2016, 2017. Ponadto w latach 2015–2017 był współorganizatorem sesji tematycznych: Metryczna teoria punktu stałego i jej zastosowania. Brał udział w komitecie organizacyjnym konferencji Spanish - Polish Mathematical Meeting. W latach 2017, 2019 był recenzentem w zagranicznych przewodach doktorskich (Anna University w Chennai, National Institute of Technology, Indie). Na podstawie Autoreferatu wnioskuję, że dr Wardowski prowadził badania jedynie na Uniwersytecie w Pelermo (dwa kilkudniowe pobyty w 2018 roku). Nie znajduję informacji, że wygłaszał odczyty w zagranicznych ośrodkach naukowych. Po uzyskaniu doktoratu wygłosił tylko jeden odczyt na międzynarodowej konferencji (Australia, 2017 rok). Zatem udział Habilitanta w międzynarodowych konferencjach jest ubogi. Mimo to uważam, że aktywność naukowa Habilitanta jest na solidnym poziomie. Wysoko oceniam Jego działalność dydaktyczną. Dr Wardowski był promotorem 38 prac magisterskich i 6 prac licencjackich. Ponadto był recenzentem łącznie 22 prac tego typu. Prowadził kilkakrotnie wykłady i zajęcia popularno-naukowe w zakresie matematyki, w tym zajęcia dla młodzieży z Chin w ramach szkoły letniej.

Konkluzja. W mojej opinii przedstawione osiągnięcie naukowe i pozostały dorobek naukowy Habilitanta spełniają wymagania ustawowe i zwyczajowe. Uważam, że wniósł On wkład w rozwój metrycznej teorii punktów stałych i jej zastosowań. W związku z tym popieram wniosek o nadanie dr. Wardowskiemu stopnia naukowego doktora habilitowanego.

M. Maślanko