Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa, Polska
Tel: (48 22) 55 44 436
Fax: (48 22) 55 44 300

Warszawa, 15.06.2021 r.

prof. dr hab. Piotr Bogusław Mucha

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
dra Dariusza Wardowskiego w postępowaniu w sprawie
wniosku o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Rozprawa habilitacyjna dra Dariusza Wardowskiego składa się z ośmiu prac w rozpoznawalnych międzynarodowych czasopismach. Wyniki tyczą się rozważań dotyczących uogólnień twierdzeń o punktach stałych, w szczególności klasycznego twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Na dzień składania rozprawy habilitacyjnej dr Wardowski opublikował w sumie 21 prac naukowych. Warto podkreślić znaczącą liczbę cytowań, ponad 900. Pokazuje to bardzo duże zainteresowanie wynikami prac. Dokładniej MathSciNet pokazuje jedynie 284 cytowań przez 261 autorów, ale Web of Science 927 (bez autocytowań 986) oraz Scopus 972 (bez autocytowań 931). Są to bardzo wysokie indeksy pokazujące bardzo dobre międzynarodowe rozpoznawanie Habilitanta. Przy okazji liczby te zauważają pewną wybiórczość serwisu AMS.

Na uwagę zasługują prace z całego dorobku Habilitanta:

Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces D. Wardowski, FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS 94, 2012 – prawie 400 cytowań;

Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces D. Klim, D. Wardowski, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 334, 2007 – ponad 120 cytowań;

Fixed points of F-weak contractions on complete matric spaces D. Wardowski, N. Van Dung, DEMONSTRATIO MATHEMATICA 47, 2014 – ponad 100 cytowań.

Jak ma matematykę, liczby te pokazują bardzo duże zainteresowanie wynikami pana Dra Wardowskiego. Pokazują również, iż obszar ten silnie się rozwija zdobywając zainteresowanie licznych grup. Warto podkreślić, iż druga i trzecia praca nie wchodzą w rozprawę habilitacyjną.

Patrząc się na ogólny dorobek Habilitanta, badania koncertują się o obszarach związanych z teorią punktów stałych. Opublikowane są w rozpoznawalnych dobrych pismach o zasięgu globalnym.

Przejdę do omówienia poszczególnych prac wchodzących w osiągniecie naukowe.

[H1] D. Wardowski, Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012, 94 (2012), 6pp.

Jest to główna praca, definiującą uogólnienie twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Autor wprowadza tam tzw F-kontrakcję dla operatora T, która w skrócie może być opisana relacją

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leqslant F(d(x,y)) \quad \text{dla pewnego} \quad \tau > 0.$$

F jest tu pewną funkcją, a $d(.,.)$ metryką. Warto zauważyć, że gdy weźmiemy $F(t) = \ln t$ to dostajemy klasyczne tw. Banacha tj,

$$d(Tx,Ty) \leqslant e^{-\tau} d(x,y).$$

Dowód jest bardzo elementarny, a siła twierdzenie jest dostrzegalna w cytowaniach, na Scholar Google praca ta ma 684 cytowania. Praca to jest podstawą dalszych rozważań.

[H2] D. Klim, D. Wardowski, Fixed points of dynamic processes of set-valued F -contractions and application to functional equations, Fixed Point Theory Appl. 2015, 22 (2015), 9pp.

Praca ma na celu uogólnienie [H1]. Rozważny jest wielowartościowe odwzorowanie T oraz proces, lub raczej dynamiczna kaskada

$$x_{n+1} \in Tx_n.$$

Uogólnienie warunku F-kontrakcji przedstawione jest w języku ciągów $\{x_n\}$. Znów, mamy tu do czynienia z bardzo ciekawym, niebanalnym podejściem pokazującym nowe oblicze tw. Banacha.

[H3] N.A. Secelean, D. Wardowski, ψF -contractions: not necessarily nonexpansive Picard operators, Results. Math. 70 (2016), 415–431.

Praca trzecia kontynuuje rozszerzanie pojęcia F kontrakcji, uogólnienie idzie w stronę relacji za pomocą pewnej klasy funkcji ϕ dających efekt zwężania typu

$$F(d(Tx,Ty)) \leqslant \psi(F(d(x,y)).$$

Ważnym elementem jest Twierdzenie 3.1 [Tw 4.3 z autoreferatu]. Opisuje operatory spełniające słaby warunek ϕF kontrakcji w języku operatorów Picarda. Tu warto przytoczyć definicję operatora Picarda. Nie jest to operator zwężający, ale taki który ma dokładnie jeden punkty stały, i otrzymywany jest on przez iterację startującą z dowolnego punktu, to jest $T^n x \to \xi$ oraz $T\xi = \xi$.

[H4] D. Wardowski, Mixed monotone operators and their application to integral equations, J. Fixed Point Theory Appl. 19 (2017), 1103–1117.

Następna praca wychodzi z nurtu pierwszych trzech, tyczy się operatorów z mieszaną monotonicznością. Możemy spojrzeć na to w następujący sposób. Mamy operator

$$A : B \times B \to B$$

dla pewnej przestrzeni Banacha, i $A(.,.)$ jest rosnący po pierwszej współrzędnej i malejący po drugiej. Prowadzi to do definicji klasy operatów wklęsło wypukłych. Główne twierdzenie, dowodzone przez odpowiednie iteracji definiuje klasę operatorów posiadających dokładnie jeden punkt stały. Teoria ta zaprezentowana przez przykład pewnego nietrywialnego równania całkowego.

[H5] D. Wardowski, Solving existence problems via F -contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 146 (2018), No. 4, 1585–1598.

Praca ta wraca do nurtu pierwszych trzech. Tu rozszerzenie operatora polega na dodaniu odpowiedniego operatora zwartego. Bazując na własnościach tzw. operatorów kondensujących dostajemy twierdzenie, które gwarantuje istnienie punktu stałego dla operatorów postaci

$$A + B : X \to X,$$

gdzie A jest (ϕ, F) kontrakcją, kolejne uogólnienie F kontrakcji, a B operatorem zwartym. Tu definiujemy nadto możliwość nieciągłość F, daje to bardzo ciekawą klasyfikację takich operatorów. W pracy tej znajdujemy bardzo ciekawe zastosowanie do pewnego równania skalarnego typu Volterry. To co jest warte podkreślenia, to że zastosowanie twierdzeń o punkcie stałym jest niebanalne, gdyż nie ma możliwości stosowanie bezpośrednio znanych twierdzeń, gdyż współczynniki/funkcje w równaniu są zbyt niskiej regularności.

[H6] C. Vetro, D. Wardowski, Krasnoselśkiĭ -Schaefer type method in the existence problems, Topol. Methods Nonlinear Anal. 54 (2019), No. 1, 131–139.

Praca skupia się na dowodzie istnienia periodycznych rozwiązań w czasie dla równania typu

$$\phi(t) = f(t, \phi(t)) + \int_{t-\alpha}^{t} D(t, s, \phi(s))ds.$$

By zastosowań teorię (ϕ, F) kontrakcji potrzeba jest rozbudowania teorii i dowodzenie kilku wyników uzupełniających istniejącą teorię. To dopiero prowadzi do wyznaczonego celu.

[H7] N.A. Secelean, D. Wardowski, Expansive mappings on bounded sets and their application to rational integral equations, RACSAM 114, 134 (2020), 9pp.

Praca ta zajmuje się operatorami rozszerzającymi. Tu wprowadzony jest następujący warunek:

$$\frac{1}{d(x,y)} - \frac{1}{d(Tx,Ty)} \geqslant H$$

dla pewnego $H > 0$. Tak jak sama analiza takich operatorów wydaj się być dość trywialna to Twierdzenie 2.2 [tw.4.20 z autoreferatu] już takiego nie jest. Analizuje ono istnienie punktów stałych dla zagadnienie

$$Sx + Tx = x,$$

gdzie T jest operatorem rozszerzającym, a S jest pewnym odwzorowaniem ciągłym z warunkami zwartości. Wtedy pod pewnymi dodatkowymi warunkami dostajemy istnienie co najmniej jednego punktu stałego. Mamy też tu zastosowanie do pewnego równania całkowego.

[H8] D. Wardowski, Family of mappings with an equicontractive-type condition, J. Fixed Point Theory Appl. 22, 55 (2020), 9pp.

Ostatnia praca bada równanie

$$x = T(x, C(x)),$$

przy czym T jest ciągły i "jednakowo-kontaktywnym" dla po pierwszej zmiennej. Tu $C(.)$ jest zwarte, i posiłkując się twierdzeniem Schaudera dostajemy punkt stały. Znów zastosowanie odnosi się do prostego równania całkowego.

Powyższe prace powstały we współpracy z trzema współautorami, odpowiednie załączniki podkreślają istotny wkład Habilitanta w podstaniu tych artykułów.

Podsumowując, rozprawa habilitacja oraz dorobek naukowy dra Dariusza Wardowskiego, jest ciekawy, pokazujący nowe aspekty klasycznych twierdzeń. Bardzo wysoko oceniam matematyczne wyniki, habilitant używa interesujących technik analizy funkcjonalnej. Oceniając aktywność naukową, organizacyjną i dydaktyczną warto zwrócić uwagę na wypromowani 38 magistrów oraz na działalność popularyzującą naukę.

Stwierdzam, że przedstawiony materiał stanowi wystarczającą podstawę w myśl przepisów o stopniach i tytułach naukowych do uzyskania stopnia doktora habilitowanego i wnoszę zatem wniosek o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

prof. dr hab. Piotr Bogusław Mucha