Kraków, 27 marca 2023

prof. Sławomir Rams
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja w przewodzie habilitacyjnym doktora Piotra Pokory

I. Osiągnięcie habilitacyjne. Osiągnięcie habilitacyjne doktora Piotra Pokory składa się z siedmiu prac:

[Hab1] Th. Bauer, P. Pokora, D. Schmitz, On the boundedness of the denominators in the Zariski decomposition on surfaces. Journal für reine und angewandte Mathematik 733: 251-259 (2017).

[Hab2] P. Pokora, X. Roulleau, T. Szemberg, Bounded negativity, Harbourne constants and transversal arrangements of curves. Annales de lInstitut Fourier Grenoble 67(6): 2719-2735 (2017).

[Hab3] R. Laface, P. Pokora, On the local negativity of surfaces with numerically trivial canonical class. Rendiconti Lincei Matematica e Applicazioni 29: 237-253 (2018).

[Hab4] P. Pokora, J. Roé, Harbourne constants under ramified morphisms. Results in Mathematics 74(3): Article Nr. 109 (2019).

[Hab5] P. Pokora, Hirzebruch-type inequalities viewed as tools in combinatorics. Electronic Journal of Combinatorics 28(1): Nr. P1.9 (2021).

[Hab6] A. Dimca, P. Pokora, On conic-line arrangements with nodes, tacnodes, and ordinary triple points. Journal of Algebraic Combinatorics 56(2): 403 - 424 (2022).

[Hab7] P. Pokora, T. Szemberg, Conic-line arrangements in the complex projective plane. Discrete and Computational Geometry, Electronically Avaliable as `doi:10.1007/s00454-022-00397-6`

Do prac załączona jest starannie przygotowana dokumentacja w dwóch jezykach. W szczególnosci, w precyzyjnym i wyraźnie dopracowanym autoreferacie Habilitanta ustalone są oznaczenia, które postaram się zachować w tej recenzji.

Poniżej omówię pokrótce wyniki zawarte w poszczególnych pracach stanowiących osiągnięcie habilitacyjne.
[Hab1] Praca [Hab1] (wspólna z Th. Bauerem i D. Schmitzem) poświęcona jest dowodowi nastepujacego twierdzenia:

Twierdzenie Dla gładkiej powierzchni rzutowej X nad ciałem algebraicznie domkniętym dowolnej charakterystyki następujące warunki sa równoważne:

- X posiada własność ograniczonych mianowników w rozkładach Zariskiego,

S.R.

- X posiada własność ograniczonych samoprzecięć krzywych.

Przy zachowaniu oznaczeń autoreferatu, twierdzenie to wynika z [Hab1, Thm 2.2] i [Hab1, Thm 2.3]. Dokładniej, [Hab1, Thm 2.2] mówi, że jeżeli samoprzęciecia krzywych na X są oganiczone od dołu przez stałą $(-b(X))$, to ograniczone są mianowniki ułamków w rozkładach Zariskiego, i mamy bardzo elegancką nierównośc

$$d(X) \leq b(X)^{\rho(X)}.$$

Natomiast [Hab1, Thm 2.3] podaje oszacowanie stałej $b(X)$ poprzez stałą $d(X)$ i wyznacznik kraty Nérona-Severiego Δ:

$$b(X) \leq d(X) \cdot d(X)! \cdot |\Delta|.$$

Wynik ten był pewnym zaskoczeniem dla wielu badaczy. Jego dowód, oparty na algebrze liniowej i podstawowych własnościach dywizorów, dowodzi sporej pomysłowości autorów. Jest to bez wątpienia wynik istotny, który rzuca nowe światło na klasyczną hipotezę BNC.

[Hab2] W pracy [Hab2] (wspólnej z X. Roulleau i T. Szembergiem) habilitant definiuje *transveral arrangement* jako dywizor $D = \sum_{i=1}^{\tau} C_i$, gdzie $\tau \geq 2$, taki, że wszystkie krzywe C_i są gładkie i przecinają się transwersalnie ([Hab2, Def 1.3]). Następnie, dla dywizora $D = \sum_{i=1}^{\tau} C_i$ typu transversal arrangement na powierzchni Y takiej, że $\kappa(Y) \geq 0$, spełniającego dodatkowy warunek, że istnieje dywizor A taki, że dla każdego i nierozkładalne krzywe C_i należą do systemu liniowego $|d_i A|$ dla pewnej liczby d_i, doktor Pokora podaje oszacowanie dolne dla samoprzecięcia transformaty właściwej $\tilde{D}$ na rozdmuchaniu powierzchni Y w punktach wspólnych składowych supportu dywizora D (patrz [Hab 2, Thm A]). Dowód [Hab 2, Thm A] oparty jest na analizie niezmienników nakryć rozgałęzionych za pomocą nierówności typu Miyaoki-Sakai. W przypadku $\mathbb{P}^2$ wymiar Kodairy jest ujemny, ale Habilitant dowodzi, że odpowiednie nakrycie rozdmuchania płaszczyzny rzutowej ma nieujemny wymiar Kodairy i może stosować nierówność typu Miyaoki-Sakai. To prowadzi do dowodu analogicznego wyniku - patrz [Hab2, Thm B].

W dalszej części pracy, analogicznymi technikami autorzy badają stałe Harbourne'a dywizorów typu transversal arrangement, stałe Harbourne'a stopnia-d, i uzyskują ciekawą nierówność dla kombinatorycznych niezmienników tzw. d-konfiguacji krzywych płaskich rzutowych [Hab2, (4.3)], gdzie $d \geq 3$. Te ostatnie wyniki są naturalnie powiązane z badaniami Hirzebrucha nad konfiguracjami linii na płaszczyźnie rzutowej z lat osiemdziesiątych XX wieku.

[Hab3] Praca [Hab3] (wspólna z R. Laface) zawiera analizę zachowania różnych uogólnień stałych Harbourne'a dla dywizorów typu transversal arrangement na powierzchniach Y o numerycznie trywialnym dywizorze kanonicznym (local Harbourne constant [Hab3, Def 1.3], global rational Harbourne constant [Hab3, Def 2.3]). Habilitant uzyskuje szacowanie dla lokalnych stałych Harbourne'a [Hab3, Thm 2.2], którego używa do dowodu oszacowania globalnych wymiernych stałych Harbourne'a:

$$H_{rational}(X) \geq -45.$$

S. Cenn...

Praca [Hab3] zawiera także analizę licznych ciekawych przykładów [Hab3, §. 3].

[Hab4] Praca [Hab4] (wspólna z J. Roe) także wiąże się z hipotezą BNC, stałymi Harbourne'a i indeksami Harbourne'a krzywych. W pracy Habilitant wykorzystuje własności odwzorowań skończonych, żeby porównać stałe $H(C,K)$ i $H(f^*(C), f^*(K))$, przy założeniu, że $f^*(C)$ jest zredukowany i $H(C,K) \leq 0$ (patrz [Hab4, Thm C]). W tym przypadku autorzy rozpatrują także punkty nieskończenie bliskie. [Hab4, Thm C] otwiera drogę do dowodu [Hab4, Thm A], czyli nierówności

$$C^2 \geq h \cdot n \quad \text{gdzie} \quad h := \inf_n h(\mathbb{P}^2, n),$$

a C jest zredukowaną krzywą na rozdmuchaniu płaszczyzny rzutowej w n punktach. Autorzy konstruują w [Hab5] także ciąg zredukowanych krzywych płaskich, których indeks Harbourne'a jest silnie mniejszy niż indeks Harbourne'a najlepszego znanego przykładu - klasycznej konfiguracji Wimana ([Hab4, Thm B]).

[Hab5] Praca [Hab5] (samodzielna) to praca przeglądowa, która w przejrzysty sposób przedstawia liczne rezultaty związane z nierównościami typu Hirzebrucha dla konfiguracji krzywych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. [Hab5] pozwala lepiej zrozumieć wyniki Habilitanta w kontekście prac innych badaczy z tej tematyki. Ponadto, w [Hab5, §. 5] przedstawione są ciekawe wyniki ([Hab5, Thm 36-38]) Habilitanta z jego dwóch samodzielnych prac (pozycje [12], [14] w Wykazie Osiagnięć Naukowych), które nie zostały włączone do samego osiagnięcia habilitacyjnego.

[Hab6] Praca [Hab 6] (wspólna z A. Dimcą) poświęcona jest konfiguracjom linii i stożkowych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej w kontekście hipotezy Terao. W [Hab6] podano m.in. pełną klasyfikację wolnych konfiguracji linii i stożkowych z prostymi punktami podwójnymi, tacnode'ami i prostymi punktami podtrójnymi [Hab6, Thm 5.7]. Każdy z typów w tej klasyfikacji jest jednoznacznie wyznaczony (z dokładnością do rzutowej równoważności) przez swoją słabą kombinatorykę, co dowodzi że numeryczna hipoteza Terao jest prawdziwa dla rozpatrywanych w [Hab6] konfiguracji płaskich krzywych wymiernych. W pracy pokazano także nierówność typu Hirzebrucha dla konfiguracji linii i stożkowych [Hab6, Thm 2.1].

[Hab7] Praca [Hab 7] (wspólna z T. Szembergiem) dotyczy także konfiguracji linii i stożkowych na zespolonej płaszczyźnie rzutowej. W pracy zakłada się, że wszystkie osobliwości badanych konfiguracji są proste. Habilitant zręcznie wykorzystuje twierdzenie Hodge'a o indeksie do dowodu dolnego szacowania na liczbę punktów osobliwych konfiguracji [Hab7, Thm 3.1]. Na szczególną uwagę zasługuje nierówność [Hab7, Thm 4.2], której dowód wymaga bardzo precyzyjnej kontroli nad geometrią pewnego nakrycia rozgałęzionego płaszczyzny rzutowej. Praca [Hab7] zawiera także ciekawe rozważania związane z hipotezą BNC.

Powyższe, z konieczności skrótowe (Osiągnięcie Habilitacyjne ma ponad 120 stron) omówienie wyników pokazuje, że prace składające się na Osiągnięcie Habilitacyjne mają wspólną tematykę i doktor Pokora posiada precyzyjnie zdefiniowane zainteresowania naukowe. Mimo tego, Habilitant używa różnorodnych technik dowodowych, między innymi rozkładów Zariskiego, teorii krotności, klasycznej teorii Hodge'a, mieszanych struktur Hodge'a: własności spektrów osobliwości z

S. Rams

naciskiem na twierdzenia o półciągłości Varchenki-Steenbrinka. Na podkreślenie zasługuje coraz większy stopień złożoności dowodów w kolejnych częściach Osiągnięcia Habilitacyjnego i fakt, że obszar badań z Osiągnięcia Habilitacyjnego jest dość odległy od tematyki pracy doktorskiej doktora Pokory.

Podsumowanie: Doktor Pokora rozwiązuje w Osiągnięciu Habilitacyjnym ciekawe i ważne problemy. Udowodnione w pracach [Hab1]-[Hab7] twierdzenia i przedstawione fakty istotnie wzbogacają wiedzę na temat konfiguracji krzywych i pewnych własności dywizorów. Osiągnięcie Habilitacyjne pana Pokory to **istotny wkład** w rozwój dziedziny, który powinien zaincjować/wspomóc dalsze badania nad geometrią konfiguracji krzywych i ich własnościami kombinatorycznymi. Na siedem prac stanowiących Osiągnięcie, sześć to prace wspólne (często z uznanymi ekspertami). Do rozprawy załączone są jednak oświadczenia, które precyzyjnie wyjaśniają istotny wkład doktora Pokory w uzyskanie przedstawionych wyników i pozwalają wnioskować na podstawie Osiągnięcia Habilitacyjnego, że **doktor Piotr Pokora jest samodzielnym badaczem, o solidnej znajomości pewnych obszarów geometrii algebraicznej i używanych w nich technik dowodowych oraz głębokiej intuicji matematycznej**, czyli jest samodzielnym pracownikiem naukowym.

II. Aktywność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna. Dorobek naukowy doktora Piotra Pokory, poza składowymi Osiągnięcia Habilitacyjnego, obejmuje 27 prac opublikowanych (z których cztery ukazały się przed uzyskaniem przez pana Pokorę tytułu doktora w 2015 roku), jedną pracę przyjętą do druku i jedną monografię wydaną przez jednostkę macierzystą Habilitanta. Dwanaście spośród tych prac ukazało się w czasopismach o IF przekraczającym 0.7. Prace Habilitanta mają 81 cytowań (bez autocytowań) według bazy Web of Science, co jest bardzo dobrym wynikiem.

Prace Habilitanta wzbudzają zainteresowanie w dobrych ośrodkach matematycznych poza Polską. Doktor Pokora został zaproszony do przedstawienia swoich wyników m.in. na seminariach/konferencjach w Leuven, Oberwolfach, Edynburgu, Toblach, Barcelonie, Marsylii, Loughborough. **O wysokiej ocenie dorobku doktora Pokory świadczy zdobycie przez niego prestiżowych nagród i stypendiów** m.in. Nagrody Kuratowskiego (2018) i Stypendium FNP Start (2018). Doktor Pokora spędził dwa lata jako Post-Doc w Mainz i Hannoverze. Odbył także liczne krótkie wizyty naukowe w Niemczech, USA i na Węgrzech. Tak aktywna współpraca międzynarodowa była przedłużeniem aktywności z okresu studiów doktoranckich (semestralne pobyty we Freiburgu i w Marburgu). Bez wątpienia **doktor Pokora wykazał się istotną aktywnością naukową w kilku zagranicznych instytucjach naukowych.**

Doktor Pokora organizował siedem warsztatów i konferencji, m.in. w ramach semestru Simmonsa, w Hanowerze i dwie konferencje satelitarne ICM2022, działał jako edytor Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica (przez rok) i Innovations in Incidence Geometry - Algebraic, Topological and Com-

S. Rm

binatorial (do teraz).
Habilitant był Głównym Wykonawcą grantu Preludium NCN w latach 2015-17 i jest Kierownikiem grantu Sonata NCN w latach 2019-23, był także wykonawcą w grantach IM PAN.
Innym elementem aktywności doktora Pokory było recenzowanie prac doktorskich (2 razy - w Hannoverze i Kingston) i artykułów dla czasopism (ponad 40 recenzji), grantów Fondecyt, praca dla MathSciNet (55 reviewsów) i Zentralblatt Math (371 reviewsów). W świetle powyższych faktów **bardzo wysoko oceniam aktywność organizacyjną doktora Pokora i jego działanie na rzecz środowiska naukowego .**

Na pochwałę zasługuje także **działalność dydaktyczna**: doktor Pokora prowadził zajęcia w Warszawie, Krakowie, Mainz i Hannoverze. Habilitant opiekował się 10 pracami dyplomowymi, był promotorem pomocniczym jednego doktoratu, a obecnie pracuje z 4 magistrantami i 2 doktorantami. Doktor Pokora także aktywnie popularyzuje matematykę. Powyższe fakty pokazują **ponadprzeciętne zaangażowanie doktora Pokory w działalność dydaktyczna.**

III. Konkluzja. Uważam, że zarówno **osiągnięcie habilitacyjne pana doktora Piotra Pokory, jak i pozostałe jego osiągnięcia spełniają wszystkie wymogi Ustawy o tytule naukowym i stopniach naukowych konieczne do uzyskania stopnia doktora habilitowanego. W szczególności, doktor Piotr Pokora posiada w dorobku osiągnięcia naukowe stanowiące znaczny wkład w rozwój dyscypliny.**

Wnioskuję o dopuszczenie doktora Piotra Pokory do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego. **Z pełnym przekonaniem popieram nadanie doktorowi Piotrowi Pokorze stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.**

Z wyrazami szacunku

Sławomir Rams

Sławomir Rams