

Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego
‘Entropia Segala stanu kwantowego na półskończonej algebrze von
Neumanna i jej zastosowanie w zagadnieniach pomiaru kwantowego’
przedstawionego przez dr Hannę Podsędkowską we wniosku złożonym na
Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego

Osiągnięcie naukowe dr Hanny Podsędkowskiej stanowiące podstawę wniosku habilitacyjnego składa się z pięciu stosunkowo krótkich prac opublikowanych w latach 2015-2020 (dwóch samodzielnych, trzech współautorskich – zgodnie z oświadczeniami wkład autorów w powstanie prac wspólnych był równy). Zawarte w nich wyniki należą do szeroko rozumianego przecięcia teorii algebr operatorowych z kwantową statystyką czy teorią informacji, a bardziej szczegółowo dotyczą w zasadniczej części badania własności entropii typu von Neumanna w kontekście półskończonych algebr von Neumanna (domkniętych w $*$ -słabej topologii $*$ -podalgebr z jedyneką algebry $B(H)$, gdzie H to przestrzeń Hilberta, wyposażonych dodatkowo w wierny, normalny, półskończony, ale niekoniecznie ograniczony funkcjonal śladowy). Teoria informacji oraz teoria algebr operatorowych pojawiły się w matematyce odpowiednio w latach trzydziestych i czterdziestych XX wieku. W latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku zaczęła się ich intensywna interakcja, a ostatnie dwie dekady przyniosły bardzo wiele aktywności w tym obszarze.

Autoreferat

Prezentacja wyników w autoreferacie jest w większości poprawna i czytelna. Zdarzają się w nim jednak pewne usterki typograficzne, pojawiające się choćby na stronie 15 w opisie wyników pracy [O4]. Czasami czytelnik musi domyślać się, czy kontekst nadal dotyczy algebr von Neumanna, czy już konkretnego przypadku $B(H)$. Pojęcie stanu zwykle odnosi się do dodatnich funkcjonałów znormalizowanych, ale w pewnych fragmentach autoreferatu odwołuje się do znormalizowanych wektorów w przestrzeni Hilberta. Czasami pojawia się też niekonsekwencja w zakładaniu normalizacji (piszemy o entropii stanów, a w zasadzie interesuje nas entropia dodatnich funkcjonałów normalnych – patrz choćby Twierdzenie 8). Podobnie pisząc o ‘słabszej definicji statystyki kwantowej’ autorka zdaje się mieć na myśli ‘słabszy warunek dostateczności statystyki kwantowej’. W definicji obserwabli stowarzyszonej czytamy, że jest ona miarą spektralną, a kawałek niżej widzimy twierdzenie mówiące, że ‘jeśli obserwabla stowarzyszona jest miarą spektralną, to...’. Definicja słabej powtarzalności instrumentu kwantowego pojawia się dopiero w drugiej części dokumentu, zaś powtarzalności w ogóle.

Znacznie istotniejszym zarzutem do autoreferatu jest to, że praktycznie ogranicza się on do podania definicji i wypisania konkretnych rezultatów z prac habilitantki. Tło i motywacje związane z poruszonymi tematami są przedstawione bardzo skrótowo. Zabrakło w autoreferacie jakichkolwiek nawiązań do innych prowadzonych współcześnie badań ani wyjaśnień dotyczących trudności czy nowych pomysłów, jakie były konieczne do przeniesienia wyników z $B(H)$ do przypadku półskończonego. Zawiera on zaledwie 7 pozycji bibliograficznych, przy czym najnowsza z nich to książka Ohyi i Petza z 1993 roku, zaś najnowszy cytowany artykuł pochodzi z roku 1973 (praca Umegakiego podana jako opublikowana w roku 1992 w istocie ukazała się 30 lat wcześniej). Pewne zadziwienie budzą wobec tego zawarte w autoreferacie tezy mówiące, że ‘badanie entropii Segala jest ideą stosunkowo nową’, jednocześnie odwołujące się do pracy Ruskai z roku 1973. W żadnym miejscu nie znajdziemy też komentarzy o potencjalnych sposobach atakowania znacznie trudniejszych problemów pojawiających się w kontekście nieśladowym – a przynajmniej o związanych z tym komplikacjach.

Większość wyników opisanych w autoreferacie jest oczywiście nowa, ale jednocześnie pojawiają się w nim jako twierdzenia z prac habilitantki rezultaty doskonale znane (takie jak np. ‘śladowość’ dualności związanej z nieprzemiennymi przestrzeniami L^p , czyli drugi z wycentrowanych wzorów ze strony 30).

Wątpliwości budzi wybór niektórych czasopism, w których habilitantka opublikowała artykuły przedstawione we wniosku, a zwłaszcza to, że wśród prac składających się na osiągnięcie habilitacyjne obok publikacji na przykład w *Studia Mathematica* znalazły się dwie opublikowane w wydawanym przez MDPI, wydawnictwie o bardzo wątlej reputacji, czasopiśmie ‘Entropy’.

Wyniki wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego

Jak już wspomniano wcześniej, większość z wyników przedstawionych we wniosku habilitacyjnym dotyczy entropii Segala dla stanów na algebrze von Neumanna M z ustalonym wiernym śladem półskończonym τ . Każdy normalny stan (dodatni znormalizowany funkcjonal) $\rho \in M_*$ jest jednoznacznie wyznaczony przez ‘uogólnioną macierz gęstości’ $h_\rho \in L^1(M, \tau)_+$: dla każdego $x \in M$ mamy $\rho(x) = \tau(h_\rho x)$. Wspomniana entropia stanu ρ jest wówczas zadana naturalnie interpretowanym wzorem

$$S(\rho) = -\tau(h_\rho \log h_\rho)$$

(w pracach z osiągnięcia czasami z przyczyn wygody rozważa się raczej wartość $-S(\rho)$, czego w recenzji staram się unikać). Pojęcie to jest od wielu lat intensywnie badane szczególnie w przypadku, gdy $M = B(H)$ dla skończenie bądź nieskończeniowym wymiarowej przestrzeni Hilberta H , gdzie $\tau = \text{Tr}$ jest standardowym śladem. Większość rezultatów z osiągnięcia habilitacyjnego dotyczy uogólnień faktów znanych dla $(B(H), \text{Tr})$ do ogólnego przypadku półskończonego. Przedstawię je poniżej z krótkimi komentarzami, na początku podkreślając, że prace składające się na osiągnięcie są napisane precyzyjnie, jasno i z dużą kulturą

matematyczną.

Za najciekawsze wyniki uważam te zawarte w pracy [O3], gdzie autorka dowodzi podaddytywności entropii względem ‘rozkładu tensorowego’ stanów, a dokładniej następującej nierówności: jeśli (M_1, τ_1) i (M_2, τ_2) są półskończonymi algebrami von Neumanna z odpowiednimi śladami, a $\rho \in S(M_1 \bar{\otimes} M_2)_*$, to mamy

$$S(\rho) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2),$$

gdzie ρ_1, ρ_2 to odpowiednie stany częściowe. Dowód opiera się na zręcznej adaptacji skończeniowymiarowego dowodu pochodzącego od Ohyi i Petza przy pomocy twierdzenia spektralnego, i nie wymaga praktycznie żadnych dodatkowych narzędzi. Praca [O3] zawiera też pewne interesujące wnioski dotyczące stanów na potrójnym iloczynie tensorowym. Mimo niewątpliwej wartości uzyskanych rezultatów uważam stwierdzenie z autoreferatu mówiące, że stanowią one ‘ukoronowanie historii hipotezy silnej subaddytywności’ za cokolwiek przesadzone – historia badań subaddytywności nieprzemiennej entropii, zwłaszcza w kontekście dynamicznym, jest bogata i wciąż się rozwija, że wspomnę tu tylko przełomowe wyniki Haydena i Wintera sprzed kilkunastu lat (*P. Hayden and A. Winter*, Commun. Math. Phys. 284 (2008), No. 1, 263–280), do których artykuł [O3] w ogóle się nie odnosi. Samo wyszukanie łącznie haseł źródłowych ‘subadditivity’ oraz ‘quantum entropy’ w bazie MathSciNet prowadzi do 20 artykułów opublikowanych w latach 2021-2023.

W pracy [O1] autorzy badają pewne własności dotyczące zachowania entropii Segala względem przekształceń dodatnich. Głównym narzędziem dowodu jest konstrukcja odwzorowania sprzężonego – dobrze znana w przypadku odwzorowań całkowicie dodatnich (o czym praca [O1] nie wspomina), tu jednak podana przy założeniu dodatniości i zachowywania śladu. Warto wspomnieć, że w twierdzeniu 4 z [O1] pozornie brakuje założenia normalności (choć jednocześnie wcześniejsze dowody pokazują, że normalność wynika z pozostałych założeń, do czego autorzy się nie odnoszą) – a przy jego dodaniu pierwsza część dowodu, czyli fakt, że obraz $\alpha(M)$ jest algebrą von Neumanna, to standardowy fakt z podręczników teorii algebr operatorowych (patrz np. Wniosek 3.12 w książce ‘Lectures on von Neumann algebras’ Stratilli i Zsido). Praca [O1] zawiera również pewne nowe dowody znanych wyników związanych z półciągłością entropii Segala.

Artykuł [O2] zakłada, że rozważana algebra (M, τ) jest skończona (a dokładniej, skończony jest rozważany ślad τ) i omawia zachowanie entropii Segala, tym razem definiowanej dla dowolnych funkcjonałów z M_*^+ o ograniczonych macierzach gęstości, względem dodawania. Autorka udowadnia w nim między innymi nierówność $S(\rho) + S(\phi) \leq S(\rho + \phi)$ ($\rho, \phi \in M_*^+$). Co zastanawiające, nierówność operatorowa postaci $\tau(a(\log b - \log a)) \geq 0$ dla $a, b \in M_+$, $a \leq b$, w pracy [O4] przypisana Umegakiemu (przy nieco innych założeniach), jest tu wykazana ponownie w Stwierdzeniu 1 (wraz z charakteryzacją sytuacji, w której zmienia się ona w równość). W artykule [O2] pojawia się też pojęcie instrumentu kwantowego i charakteryzacja własności takich jak powtarzalność czy słaba powtarzalność.

Praca [O4] także zakłada, że para (M, τ) jest skończona, a dodatkowo mamy do czynienia z ustalonym nieujemnym operatorem h o nietrywialnym spektrum. Autorzy pokazują,

że w tym przypadku dla każdej liczby E z wnętrza spektrum h maksimum entropii Segala w zbiorze stanów $\{\rho \in S(M)_* : \rho(h) = E\}$ jest osiągane w dokładnie jednym stanie, tak zwanym stanie Gibbsa. Wynik ten, jak podaje końcówka artykułu, można wywnioskować niemal natychmiast z Wniosku 5.6 w książce Ohyi i Petza, ale autorzy przedstawiają niezależny, elementarny dowód oparty wyłącznie na twierdzeniu spektralnym i wspomnianej wyżej nierówności operatorowej.

Praca [O5] jest stosunkowo najbardziej bezpośrednio związana z statystyką kwantową i dotyczy różnych metod optymalizacji (czy raczej charakteryzacji optymalności) kwantowych pomiarów – które być może należałoby nazywać kwantowymi testami – pozwalających na wykrycie w jakim stanie z danego zestawu znajduje się badany system. Warto zwrócić uwagę, że w [O5] znajdziemy nawiązania do bardziej współczesnych artykułów badających analogiczne tematy oraz pewne wyniki (w Podrozdziale 3.3), które mają oryginalny charakter nawet dla algebr macierzowych (czy ogólniej dla par $(B(H), \text{Tr})$). Ogólny kontekst to pomiary kwantowe związane z skończoną parą (M, τ) .

Podsumowując, prace złożone na osiągnięcie habilitacyjne tworzą spójny cykl oraz zawierają potencjalnie interesujące, poprawnie i starannie udowodnione wyniki, ale jednocześnie wydają się wpływać na rozwój nauki w ograniczonym stopniu; cztery spośród nich zostały opublikowane już ponad pięć lat temu, a wciąż nie zostały wykorzystane w żadnych innych badaniach, o czym świadczy całkowity brak cytowań (poza autocytowaniami). Do tego problemu wrócę jeszcze w kolejnej części recenzji.

Pozostały dorobek i aktywność naukowa

Omówię teraz pokrótce pozostały dorobek i aktywność naukową dr Podsędkowskiej. Dane bibliograficzne umieszczone niżej podaję za bazą MathSciNet, którą uważam za najbardziej miarodajną przy ocenie wpływu odbioru aktywności naukowej przez środowisko matematyczne.

Dr Podsędkowska publikuje regularnie, z bardzo przyzwoitą, choć nie imponującą intensywnością (baza MathSciNet pokazuje obecnie 16 publikacji; pierwsza z nich ukazała się w 2001 roku, przy czym należy uwzględnić również przerwy w karierze naukowej związane z urlopami macierzyńskimi czy zdrowotnymi). Artykuły habilitantki pozostają spójne tematycznie, dotycząc w zasadniczej części uogólnień faktów dotyczących kwantowej teorii informacji z przypadku algebry pełnej $(B(H))$ na przypadek (pół)skończonych algebr von Neumanna. Oprócz pojęć omawianych już wyżej, takich jak entropia Segala, pomiary czy instrumenty kwantowe, występuje w nich również badanie natury przestrzeni punktów stałych pewnych odwzorowań całkowicie dodatnich, różnych wariantów definicji entropii oraz dostateczności statystyk kwantowych. Niektóre z składających się na dorobek habilitantki artykułów ukazały się w dobrych, choć nie czołowych czasopismach matematycznych o zasięgu międzynarodowym, takich jak *Letters in Mathematical Physics*, *Reviews in Mathematical Physics* czy *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, *Mathematica*.

Fundamentalny niepokój, zwłaszcza w kontekście tego, że szerzej rozumiana dziedzi-

na pracy habilitantki pozostaje bardzo aktywnie uprawiana na całym świecie, budzi to, że opublikowane przez nią artykuły pozostają praktycznie kompletnie niezauważone przez społeczność matematyczną. Baza MathSciNet (podobnie zresztą jak Zentralblatt) mówi wyłącznie o 1 cytowaniu nie będącym autocytowaniem, przy czym i to cytowanie, znajdujące się w pracy Andreasa Anderssona, “Operator deformations in quantum measurement theory” (Lett. Math. Phys. 104 (2014), no. 4, 415–430) wspomina pracę [P7] dwukrotnie nie tyle w odniesieniu do konkretnych wyników, ale odwołując się do poruszanej w niej tematyki: ‘as exceptions we would like to mention (...) the very nice study [20]’ oraz ‘(the approach most similar to this one can be found in [20] where also more general evolutions are mentioned)’.

Pozytywnie oceniam urozmaicenie współautorstwa: wśród artykułów wnioskodawczyni znajdziemy prace napisane wspólnie z promotorem prac magisterskiej i doktorskiej, ale także samodzielne oraz przygotowane wraz z matematykami młodszego pokolenia. Warto docenić fakt, że habilitantka pracowała jako wykonawczyni przy dwóch grantach Narodowego Centrum Nauki (przy czym w jednym jej rola polegała na dostarczeniu stosownej analizy statystycznej do grantu z inżynierii systemów i komunikacji). Współorganizowała jedno spotkanie naukowe, wygłosiła też kilkanaście referatów konferencyjnych, w większości na dwóch wydarzeniach cyklicznych (organizowanej przez grupę wrocławską serii spotkań w Będlewie dotyczących nieprzemiennej analizy harmonicznej oraz serii konferencji International Quantum Structures Association). Wniosek nie zawiera niestety informacji o recenzowaniu prac naukowych. Habilitantka prowadziła natomiast standardową działalność dydaktyczną.

W przypadku złożonego wniosku trudno moim zdaniem mówić o spełnieniu warunku: [kandydat(ka)] ‘wykazuje się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej’. Wszystkie prace habilitantki są pisane bądź samodzielnie bądź z współautorami z tej samej jednostki. Pojedynczy pięciodniowy staż mający miejsce w Pradze latem 2023 roku nie doprowadził jak na razie do powstania żadnych preprintów czy choćby nowych perspektyw naukowych wspomnianych w autoreferacie.

KONKLUZJA

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe fakty, doceniając sensowność i rzetelność prowadzonych przez habilitantkę badań, ale jednocześnie z żalem odnotowując, że jej publikacje nie spotkały się z praktycznie żadnym odzewem ze strony społeczności matematycznej oraz uznając, że trudno uznać, aby był spełniony warunek ‘istotnej aktywności naukowej realizowanej w więcej niż jednej uczelni’, uważam, że **osiągnięcie habilitacyjne dr Hanny Podsędkowskiej oraz jej pozostały dorobek oraz aktywność naukowa nie spełniają ustawowych wymogów stawiane kandydatom do habilitacji i nie rekomenduję nadania dr Hannie Podsędkowskiej stopnia doktora habilitowanego.**

Adam Skalski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Warszawa, 4 stycznia 2023 roku