Henryk Żołądek
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Opinia o rozprawie habilitacyjnej ”*Optymalizacja wybranych układów sterowania z operatorami niecałkowitego rzędu*” **oraz o dorobku naukowym i organizacyjnym dra Rafała Kamockiego**

Dr Rafał Kamopcki jest uczniem prof. dra hab. D. Idczaka. Ja byłem recenzentem dorobku prof. Idczaka w procedurze nadawania mu tytułu profesora. Przytoczę początek tamtej recenzji.

”*Muszę na wstępie zaznaczyć, że ta sprawa mocno mnie wyczerpała. Po piewsze, nie zajmuję się ani równaniami różniczkowymi cząstkowymi ani teorią sterowania. Oczywiście, jestem głównie analitykiem (równania różniczkowe zwyczajne) i nie zdarzyło mi się odmówić recenzowania tego typu dorobku. Jednak prace dra hab. Idczaka jakoś mi nie podchodzą. Z drugiej strony, trudno odmówić mu odmówić osiągnięć, zaangażowania i uznania w swoim środowisku naukowym.*”

Chyba podobna sytuacja ma miejsce i w tym przypadku. Przejdę teraz do habilitacji i dorobku dra Kamockigo.

Pracę magiterską obronił w 2004 roku a rozprawę doktorską w 2012 roku; obie pod kierunkiem D. Idczaka. Po studiach pracował początkowo w liceum w Moszczenicy i Państwowej Wyższej Szkole Zawodowej w Płocku a potem już w Uniwersytecie Łódzkim.

Według *MathSciNet* opublikował 31 prac, które były cytowane 104 razy. Według *WebofScience* opublikował 36 prac, które były cytowane 228 razy, a liczba Hirscha wynosi 7. Te prace były publikowane w czasopismach z matematyki stosowanej o międzynarodowym zasięgu (ale z niezbyt wysokiej półki). Zatem ilościowo ten dorobek wygląda przyzwoicie.

Tematyka badawcza dra Kamockiego koncentruje się na dosyć specyficznej teorii sterowania. Pozwolę sobie na krótkie przedstawienie jak ja rozumiem głowny problem w tej teorii i jak ja bym postępował. Rozważę najprostszą sytuację.

Mamy różniczkowe zagadnienie początkowe na odcinku $[0,1]$:

$$\dot{x} = g(t,x,u)\,,\ \ x(0) = 0,$$

gdzie $u = \psi(t)$ jest sterowaniem (które formalnie można dobierać dowolnie); zatem rozwiązanie $x = \varphi(t) = \varphi(t;\psi)$ powyższego zagadnienia zależy od sterowania. Mamy jeszcze fukcję kosztu

$$J = J(\psi) = \int_0^1 f(t,\varphi(t),\psi(t))\,\mathrm{d}t,$$

którą chcemy zminimalizować. Moim zdaniem jest to zagadnienie na ekstremum warunkowe.

Istotnie, nasze zagadnienie początkowe można przeformułować w postaci

$$G_t(\varphi,\psi) := \varphi(t) - \int_0^t g(s,\varphi(s),\psi(s))\,\mathrm{d}s = 0;$$

w istocie jest to nieprzeliczalna rodzina warunków (więzów) parametryzowana przez t. Niech $\lambda(t)$ będzie ciągłym mnożnikiem Lagranża. Z kursu Analizy wiemy, że w tym przypadku przyrównujemy do zera gradient następującego funkcjonału:

$$F(\varphi,\psi) := \int_0^1 f(t,\varphi(t),\psi(t))\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \lambda(t)\,G_t(\varphi,\psi)\,\mathrm{d}t.$$

Tutaj mamy do czynienia z pochodnymi wariacyjnymi. Z moich obliczeń wynika, że

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta\varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t),\psi(t)) - \lambda(t) + \mu(t)\frac{\partial g}{\partial x}(t,\varphi(t),\psi(t))\\ \frac{\delta F}{\delta\psi} &= \frac{\partial f}{\partial u}(t,\varphi(t),\psi(t)) + \mu(t)\frac{\partial g}{\partial u}(t,\varphi(t),\psi(t)),\end{aligned}$$

gdzie

$$\mu(t) = \int_t^1 \lambda(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zatem mamy trzy równania

$$\delta F/\delta\varphi \equiv 0,\ \ \delta F/\delta\psi \equiv 0,\ \ G_t \equiv 0$$

na trzy niewiadome funkcje φ, ψ i λ. Oczywiście, rozwiązanie ostatniego układu nie jest łatwe; nie wdrażałem się w problem.

W podejściu stosowanym przed habilitanta i jego byłego opiekuna strategia jest inna. Najpierw rozwiązuje się zagadnienie początkowe, wykazując odpowiednią zależność rozwiązania $\varphi(t;\psi)$ od sterowania $u = \psi(t)$, a następnie wykazuje istnienie ekstremum kosztu używając argumentu zwartości (twierdzenie typu Arzela–Ascoliego).

Jednak jest istotna subtelność w podejściu Idziaka–Kamockiego. Zamiast zwykłej pochodnej $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ używa się pochodnej rzędu niecałkowitego, którą poniżej przedstawiam dla przypadku funkcji na $[0,1]$.

Odpowiednikiem operacji odwrotnej do różniczkowania rzędu n jest operacja iterowanego całkowania $f \longmapsto I^n f$, gdzie $I^n f(t) = \int_0^t \mathrm{d}s_1 \int_0^{s_1} \mathrm{d}s_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)\,\mathrm{d}s_n$ $= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}\,\mathrm{d}s$; uogólnia się ona na przypadek niecałkowitego n :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s.$$

Wtedy pochodna rzędu α (w sensie Riemanna–Liouville'a) to

$$D^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\circ I^{1-\alpha}.$$

W dostarczonych pracach i w Autoreferacie można znaleźć inne wersje pochodnej ułamkowego rzędu (w sensie Caputo i w sensie Hilfera). Ponadto, habilitant używa też pochodnych cząstkowych różnych ułamkowych rzędów. Rozumiem, że takie pochodne wynikają z potrzeb (zastowania), a nie tylko z nader kuszącej potrzeby generalizacji.

Przejdę teraz do skomentowania prac wchodzących w zakres rozprawy.

W pracy **H1** z D. Idczakiem M. Majewskim i S. Walczakiem w *Appl. Math. Comp.* rozważa się 2-wymiarowe zadadnienie sterowania. Dokładniej, minimalizuje się funkcję kosztu

$$J = \int\int_P f^0(x, \varphi, \psi)\,\mathrm{d}^2x,$$

$x = (x_1, x_2) \in P = [a, b] \times [c, d]$, przy ograniczeniach

$$D^\alpha_{x_1} z^1 = f^1(x, z, u), \ D^\beta_{x_2} z^2(x, z, u),$$
$$I^{1-\alpha}_{x_1} z^1(a, x_2) = 0, \ I^{1-\beta}_{x_2} z^2(x, c) = 0,$$

$z = \varphi(x) = \left(z^1, z^2\right) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $u = \psi(x) \in \mathbb{R}^m$. W serii twierdzeń oszacowano rozwiązania układu powyższych równań różniczkowych i udowodniono istnienie sterowania minimalizującego koszt.

W pracy **H2** Kamockiego z Idczakiem w *Math. Control Related Fields* autorzy minimalizują koszt

$$J = \int_a^b f_0(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t,$$

gdzie

$$D^\alpha x(t) = f(t, x(t), u(t)), \ I^{1-\alpha} x(a) = 0,$$

$t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in M \subset \mathbb{R}^m$. Są pewne założenia o M. Wyniki i metody są podobne jak w pracy **H1**.

W pracy **H3**^{a} Kamockiego w *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* koszt J jest taki jak powyżej. Za to w odpowiednim równaniu różniczkowym pochodna D^α i $I^{1-\alpha}$ są zastąpione przez bardziej skomplikowane operatory $D^{\alpha,\beta}$ (pochodna Hilfera) i $I^{1-\alpha,1-\beta}$, których nie definiuję. W Theorem 5 wykazano istnienie i jednoznaczność rozwiązania powyższego zagadnienia (przy pewnych dodatkowych założeniach).

W pracy **H3**^{b} z R. Almeidą, A. Malinowską i T. Odzijewicz w *J. of Comput. Appl. Math.* rozważa się analogiczny problem z odpowiednimi pochodnymi typu Caputo. We wstępie autorzy piszą:

'*Contributions of this work may be summarized as follows*:

• *Necessary optimality conditions for the optimal control problem governed by a fractional opinion formation model with leadership are derived.*

• *The existence conditions for optimal "non-invasive" consensus control are proved.*'

Dokładniej, w rozważanym modelu Hegselmanna–Krausego funkcjonał kosztu ma postać

$$J(x, u) = \int_0^T \left(\frac{1}{2N^2} \sum_{i,j} \|x_i - x_j\|^2 + \frac{1}{2} \sum_i \|x_0 - x_i\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \right) \mathrm{d}t$$

a ograniczenia są następujące:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x_0 &= u, \ x_0(0) = x_{00} \\ {}^C D^\alpha x_i &= \sum_{j \neq 0, i} a_{ij}(x_j - x_i) + c_i(x_0 - x_i), \end{aligned}$$

$x_i(0) = x_{i0}$, $i = 1, \ldots, N$; tutaj ${}^C D$ jest pochodną Caputo. W Theorem 14 pojawia się analog funkcjonalnego mnożnika Lagranża $\lambda(t)$, o którym pisałem powyżej, a w Theorem 17 dowodzi się istnienia globalnego optymalnego rozwiązania (x_*, u_*) problemu.

W pracy **H4** z R. Almeidą, A. Malinowską i T. Odzijewicz w *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* był badany problem minimum dla

$$H(x,u) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\, \mathrm{d}t$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u \in M \subset \mathbb{R}^m$, przy ograniczeniach $x(0) = x_0$ i

$${}^C D^{\alpha_j} x_j(t) = f_j(t, x(t), u(t)),$$

gdzie ${}^C D^{\alpha}$ jest pochodną typu Caputo. Autorzy piszą:

'• *The approach for designing the Cucker–Smale model with fractional derivative takes into consideration history or memory dependency in the self-organization of the group.*

• *We prove Pontryagin Maximum Principle (PMP) for the Lagrange optimal control problem governed by a multi-order control system with the Caputo derivative.*

• *The PMP is applied for the fractional Cucker–Smale optimal control problem. We provide necessary optimality conditions for external control with limited strength. This external controller by acting only on a few agents enforces flocking in the multi-agent system.*'

Tutaj również pojawia się analog funkcjonalnego mnożnika Lagranża $\lambda(t)$ w Theorem 1. Ponadto, funkcjonał H i prawe strony są rozważane w bardziej konkretnej (i bardzie skomplikowanej) formie (podobnej do tej z **H3**^{b}).

Nieco wyróżnia się praca **H5** habilitanta w *Appl. Math. Optimization.* Tutaj minimalizuje się koszt

$$J(z,u) = \int_\Omega f_0(x, z(x), u(x))\, \mathrm{d}^N x$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \left\{(-\Delta)^\beta z\right\}(x) &= f(x, z(x), u(x)), \\ u(x) &\in M \subset \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest otwartym i ograniczonym podzbiorem a $(-\Delta)^\beta$ jest ułamkowym operatorem Dirichleta–Laplace'a definiowanym za pomocą rozkładu spektralnego operatora $\Delta = \sum \partial^2/\partial x_j^2$ z zerowymi warunkami na $\partial\Omega$:

$$\text{jeśli } (-\Delta) e_j(x) = \lambda_j e_j(x) \text{ to } (-\Delta)^\beta e_j(x) = \lambda_j^\beta e_j(x).$$

W Theorem 4 wykazano istnienie otymalnego rozwiązania a w Section III zanalizowano konkretny przykład z

$$f_0 = \sin t z(t) + u^3(t),\ \beta = 1/2 \text{ i } f = Az(t) + u^3(t).$$

Prace **H1**–**H5** składają się na rozprawę habilitacyjną dra Kamockiego.

W dostarczonych mi materiałach znalazłem jeszcze dwie prace habilitanta **P1** (w *J. Comput. Appl. Math.*) i **P2** (z D. Idczakiem i M. Majewskim w *J. Integral Equations Appl.*). Są one poświęcone nowym własnościom i wzorom związanym z pochodnymi niecałkowitego rzędu. Ze względu na złożoność odpowiednich wzorów nie będę przytaczał tych dosyć drobiazgowych wyników.

Jeśli chodzi o moją opinię na temat wartości tych prac, to jest ona pozytywna. Co prawda, tematyka jest dosyć jednostronna i nieco wyszukana, ale jest uprawiana przez dosyć pokaźną grupę badaczy.

Nie mam wątpliwości, że habilitant jest dobrze obeznany z uprawianą tematyką badawczą. Jego wkład we wspólne publikacje jest istotny.

Współpracował głównie z polskimi badaczami (Idziak i Walczak z Łodzi, Malinowska z Politechniki Białostockiej i Odzijewicz z SGH w Warszawie). Ale widzimy też współpracę z R. Almeidą z Universytetu w Aveiro (Portugalia).

Był wykonawcą i kierownikiem w dwóch grantach NCN oraz realizował cztery projekty badawcze UŁ dla młodych naukowców.

Podsumowując moją opinię, uważam, że przedstawiona rozprawa habilitacyjna i ogólny dorobek dra Rafała Kamockiego są wystarczająco dobre, aby przyznać mu tytuł doktora habilitowanego.

Warszawa, dn. 29–01–2024