Gdańsk, dn. 23.01.2024 r.

Prof. dr hab. Joanna Janczewska
Instytut Matematyki Stosowanej
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska
ul. G. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk

Opinia w postępowaniu w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka pani dr Annie Michalak

Dr Anna Michalak ukończyła studia magisterskie na kierunku matematyka na Uniwersytecie Łódzkim w 2004 roku. Jej kariera naukowa i zawodowa związana jest z łódzką Alma Mater. Rozprawę doktorską z matematyki nt. *„Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa"* obroniła w 2010 roku pod kierunkiem prof. Andrzeja Nowakowskiego. Od września 2011 roku pracuje w Katedrze Ekonometrii na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym UŁ. W 2019 roku odbyła tygodniowy staż naukowy w Academia Militar w Portugalii.

Jest autorką dwóch i współautorką szesnastu artykułów naukowych opublikowanych m.in. w takich czasopismach jak: *Nonlinear Analysis, Opuscula Mathematica, Journal of the Franklin Institute, Dynamics of Partial Differential Equations, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, International Journal of Control, Optimal Control Applications and Methods, Set-Valued and Variational Analysis, Journal of Optimization Theory and Applications, Numerical Functional Analysis and Optimization, Control and Cybernetics*. Wśród tych prac współautorskich są też dwa recenzowane artykuły z międzynarodowej konferencji *2017 International Conference on Control, Artificial Intelligence, Robotics & Optimization* oraz dwa abstrakty z konferencji medycznych, tj. z *World Congress of Cardiology 2006* (Barcelona) i z *56th Annual Scientific Session of the American College of Cardiology* (Los Angeles), które ukazały się odpowiednio w suplementach *European Heart Journal* i *Journal of the American College of Cardiology*. Uzyskany dorobek jest słabo widoczny w znanych bazach cytowań. Web of Science odnotowuje obecnie 34 cytowania, w tym tylko 24 bez autocytowań. Natomiast Scopus pokazuje 33 publikacje innych autorów cytujących mieszczące się w nim prace habilitantki, przy liczbie cytowań 45. Z kolei MathSciNet wskazuje 12 cytowań w 11 publikacjach przez 18 autorów, przy czym habilitantka jest współautorem czterech z tych jedenastu publikacji.

Zainteresowania naukowe kandydatki do stopnia doktora habilitowanego dotyczą zarówno matematyki teoretycznej, w szczególności równań różniczkowych, jak i zastosowań matematyki w innych dziedzinach m.in. w medycynie i ekonomii.

Osiągnięciem naukowym dr Anny Michalak stanowiącym podstawę ubiegania się o stopień doktora habilitowanego jest cykl pięciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych ujętych w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (zwanej dalej ustawą):

[A1] A. Michalak, A. Nowakowski, Finite-time stability and finite-time synchronization of neutral network – Dual approach, *J. Franklin Inst.* 354 (2017), no. 18, 8513-8528;
[A2] A. Michalak, A. Nowakowski, Fixed-time stability of ODE and fixed-time stability of neutral network, *Internat. J. Control* 94 (2021), no. 12, 3332-3338;
[A3] A. Michalak, A. Nowakowski, Dual Lyapunov approach to finite time stability for parabolic PDE, *Dyn. Partial Differ. Equ.* 19 (2022), no. 3, 177-189;
[A4] A. Michalak, A. Nowakowski, New approach to fixed-time stability of a nonlinear system, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 48 (2023), Paper No. 101337, 11 pp.;
[A5] A. Michalak, Finite-time and fixed-time stability analysis for time-varying system – dual approach, *J. Franklin Inst.* 359 (2022), no. 18, 10676-10687,

zatytułowany *„Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych"*. Cztery prace z cyklu [A1]-[A4] są współautorskie. Zgodnie z art. 219 ust. 2 ustawy, do wniosku są załączone oświadczenia współautora, A. Nowakowskiego. Wynika z nich, że wkład habilitantki w uzyskanie wyników zawartych w pracach współautorskich wynosi 50%. Zgodnie z przedstawioną dokumentacją kandydatka nie ubiegała się wcześniej o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

***

Tematyka przedstawionego cyklu artykułów dotyczy stabilności rozwiązań równań różniczkowych w stałym i skończonym czasie. W pracach [A1] i [A2] autorzy badają stabilność w sensie Lapunowa dla równania różniczkowego zwyczajnego postaci

$$x' = f(t,x),$$

gdzie $f\colon [0,+\infty) \times X \to R^n$ jest funkcją typu Caratheodory'ego, a $X \subset R^n$ jest zbiorem otwartym takim, że $0 \in X$. Ponadto $f(t,0) = 0$ dla $t \geq 0$ oraz istnieje wstępująca rodzina zbiorów zwartych o niepustym wnętrzu $Q_k \subset X$ taka, że $0 \in int\ Q_1$, $\bigcup_{k \in N} int\ Q_k = X$ i dla każdego $k \in N$ istnieje funkcja $m_k \in L^\infty([0,+\infty))$ taka, że $|f(t,x)| < m_k(t)$ dla p.w. $t \geq 0$ i dla każdego $x \in Q_k$. W obu artykułach zastosowano metodę, którą habilitantka nazywa dualną metodą badania stabilności lub po prostu dualną metodą Lapunowa i która została wprowadzona przez nią już w pracy **[B]** „Dual approach to Lyapunov stability" (*Nonlinear Anal.* 85 (2013), 174-179) nawiązującej do rozprawy doktorskiej kandydatki (poz. 21 w bibliografii z autoreferatu). Rozwijana przez dr Annę Michalak idea dualności, zainspirowana pracą A. Nowakowskiego „The dual dynamic programming" (*Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), no. 4, 1089-1096), polega na przeniesieniu rozważań dotyczących stabilności do nowej przestrzeni $0 \in P \subset R^n$, P zbiór otwarty, nazwanej przestrzenią dualną, w której rozważane jest równanie dualne postaci

$$\left(W_y(t,y)\right)' = -f(t, -W_y(t,y)),$$

gdzie tzw. funkcja pomocnicza $W\colon [0,+\infty) \times P \to R$ jest klasy C^1 i spełnia warunki:

- $W(t,0) = 0$ dla każdego $t \geq 0$,
- $W_y(t,0) = 0$ dla każdego $t \geq 0$,
- $W_y\colon [0,+\infty) \times P \to R^n$ jest lokalnie lipschitzowskie,
- $-W_y(t,P) \subset X$ dla każdego $t \geq 0$.

W przestrzeni dualnej habilitantka definiuje dualną funkcję Lapunowa $T: [0, +\infty) \times P \to R$,

$$T(t, y) = W(t, y) - yW_y(t, y).$$

Następnie pokazuje, że jeśli funkcja W spełnia jedną z poniższych nierówności typu Hamiltona-Jacobiego:

$$W_t(t, y) + yf(t, -W_y(t, y)) \leq 0$$

dla p.w. $t \geq 0$ i dla każdego $y \in P$ lub, przy dodatkowym założeniu, że $-W_y(t, P) \subset P$ dla każdego $t \geq 0$ i W jest dwukrotnie różniczkowalna względem zmiennej przestrzennej y,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(W(t, z) - zW_y(t, z)\Big) - zW_{yy}(t, z)f(t, z) \leq 0$$

dla p.w. $t \geq 0$ i dla każdego $z \in -W_y(t, P)$, to funkcja T jest nierosnąca wzdłuż (absolutnie ciągłych) rozwiązań równania dualnego (Proposition 1 i Proposition 2 w [B]). Jeśli dualna funkcja Lapunowa T spełnia odpowiednie warunki, to można orzekać o stabilności rozwiązania zerowego równania dualnego (Theorem 1 w [B]). Mianowicie o funkcji T zakłada się, że spełnia następujący warunek wzrostu:

$$T(t, y) \geq a_1(|y|)$$

dla każdego $t \geq 0$ i $y \in P$, gdzie $a_1: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ jest pewną funkcją rosnącą taką, że $a_1(0) = 0$ (a_1 należy do klasy $\mathcal{K}_1$). W niektórych twierdzeniach kandydatka osłabia ten warunek do następującego:

$$T(t, y) > 0 \text{ dla } y \neq 0 \text{ oraz } T(t, 0) = 0 \text{ dla } t \geq 0.$$

Jeżeli operator przejścia z przestrzeni prymalnej X do przestrzeni dualnej P określony wzorem:

$$x = -W_y(t, y)$$

dla każdego $t \geq 0$ i $y \in P$, spełnia dodatkowe trzy warunki oznaczone w autoreferacie jako (Z2), to 0 jest też rozwiązaniem stabilnym równania prymalnego tj. wyjściowego (Theorem 3 w [B]). Żeby orzekać o stabilności rozwiązania zerowego równania prymalnego w skończonym i w stałym czasie, w pracach [A1] i [A2] wzmocniono rozważane w pracy [B] nierówności typu Hamiltona-Jacobiego poprzez dołożenie do lewej strony tych nierówności odpowiednich składników nieujemnych. W pracy [A1] zaproponowano nierówność:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(W(t, z) - zW_y(t, z)\Big) - zW_{yy}(t, z)f(t, z) + c(t)(T(t, z))^\alpha \leq 0$$

dla $(t, z) \in [0, +\infty) \times \Big(-W_y(t, P)\Big)$, gdzie $c: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ jest funkcją mierzalną, ograniczoną na każdym zwartym podprzedziale zawartym w $(0, +\infty)$ (oryginalnie w pracy [A1] ograniczoną) i taką, że $\int_{t_c}^{+\infty} c(s)ds = +\infty$ dla pewnego $t_c \geq 0$ (c należy do klasy $\mathcal{M}$) oraz $\alpha \in (0,1)$, co pozwoliło udowodnić twierdzenie o stabilności rozwiązania zerowego równania prymalnego w skończonym czasie (Theorem 14 w [A1]). Z kolei w artykule [A2] przyjęto, że funkcja c w powyższej nierówności ma spełniać jeszcze jeden warunek tj. istnieją $t_1 > 0$ i $U >$

MY

0 takie, że $\int_t^{+\infty} \frac{1}{c(s)} ds < U$ dla każdego $t > t_1$ (c należy do klasy $\mathcal{MB}$), co w efekcie pozwoliło autorom udowodnić, że rozwiązanie zerowe równania prymalnego jest stabilne w stałym czasie (Theorem 3.1 w [A2]). W pracy [A2] występuje też nierówność:

$$W_t(t,y) + yf(t, -W_y(t,y)) + c(t)g(T(t,y)) \leq 0$$

dla $t \in [0,+\infty)$ i $y \in P$, gdzie $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ jest funkcją półciągłą z dołu, niemalejącą, $g(0) = 0$ oraz $\int_0^b \frac{1}{g(s)} ds < +\infty$, a c należy do klasy $\mathcal{MB}$ lub do klasy $\mathcal{M}$. Przy tym warunku, gdy c jest klasy $\mathcal{MB}$, pokazano, że rozwiązanie zerowe równania prymalnego jest stabilne w stałym czasie (Theorem 3.2 w [A2]), a gdy c jest klasy $\mathcal{M}$, to rozwiązanie zerowe jest stabilne w skończonym czasie (Corollary 3.4 w [A2]). W obu tych rezultatach warunek wzrostu na dualną funkcję Lapunowa T zastąpiony został założeniem o jej dodatniej określoności. Dodatkowo w pracach [A1] i [A2] krótko omówiono przykłady zastosowań uzyskanych twierdzeń do badania stabilności sztucznych sieci neuronowych.

W pracy [A5] habilitantka bada stabilność rozwiązania zerowego w stałym i skończonym czasie dla układu równań złożonego z równania prymalnego i równania dualnego:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ \left(W_y(t,y)\right)' = -f\left(t, -W_y(t,y)\right) \end{cases}$$

wprowadzając funkcję Lapunowa $\bar{T}: [0,+\infty) \times X \times P \to R$ (oznaczenie z autoreferatu) określoną wzorem:

$$\bar{T}(t,x,y) = W(t,y) + xy.$$

Przy założeniach analogicznych do tych z pracy [B] pokazała, że funkcja $\bar{T}$ jest nierosnąca wzdłuż rozwiązań badanego układu równań (Proposition 7 w [A5]). Przyjmując, że $\bar{T}$ spełnia warunek wzrostu

$$\bar{T}(t, -W_y(t,y), y) \geq a(|y|)$$

dla wszystkich $t > 0$ i $y \in P$, gdzie a jest pewną funkcją klasy $\mathcal{K}_1$, kandydatka udowodniła, że rozwiązanie zerowe układu jest stabilne (Theorem 8 w [A5]). Następnie, żeby udowodnić twierdzenia o stabilności rozwiązania zerowego układu w skończonym i stałym czasie, wzmocniła nierówność Hamiltona-Jacobiego w podobny sposób jak w pracach [A1] i [A2]. Precyzyjniej, zakładając, że

$$W_t(t,y) + yf(t, -W_y(t,y)) + c(t)g(\bar{T}(t, -W_y(t,y), y)) \leq 0$$

dla $t \in [0,+\infty)$ i $y \in P$, gdzie g jest funkcją półciągłą z dołu jw., a c należy do klasy $\mathcal{M}$ (odp. c należy do klasy $\mathcal{MB}$), otrzymała, że rozwiązanie zerowe układu jest stabilne w skończonym (odp. w stałym) czasie (Theorem 9 i Theorem 10 w [A5]). Pokazała też, że jeśli funkcja pomocnicza W i operator przejścia z przestrzeni prymalnej X do przestrzeni dualnej P spełniają omówione wcześniej założenia (te przyjęte w pracy [B]) i rozwiązanie zerowe równania dualnego jest stabilne w stałym (odp. skończonym) czasie, to rozwiązanie zerowe

gj

równania prymalnego też jest stabilne w stałym (odp. skończonym) czasie (Proposition 13 w [A5]).

W pracy [A3] autorzy badają stabilność (w sensie Lapunowa) rozwiązania zerowego równania różniczkowego cząstkowego postaci:

$$u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = f\big(t,x,u(t,x)\big) \text{ na } (0,+\infty)\times\Omega$$

z warunkiem brzegowym:

$$u(t,x) = 0 \text{ na } (0,+\infty)\times\partial\Omega,$$

gdzie $\Omega \subset R^n$ jest obszarem domkniętym z dostatecznie gładkim brzegiem oraz funkcja $f\colon [0,+\infty)\times\Omega\times R \to R$ jest niezerowa, mierzalna ze względu na (t,x) i ciągła względem u oraz $f(t,x,0) = 0$ dla wszystkich $t \geq 0$ i $x \in \Omega$. Bazując na koncepcji przedstawionej w pracy [B], przeniesiono rozważania z przestrzeni $[0,+\infty)\times\Omega\times R$ do przestrzeni dualnej $[0,+\infty)\times\Omega\times P$, gdzie $0 \in P \subset R$ zbiór otwarty, w której rozważane jest równanie dualne postaci:

$$(W_y(t,x,y))' - \Delta_x(W_y(t,x,y)) = -f(t,x,-W_y(t,x,y)) \text{ dla p.w. } (t,x) \in [0,+\infty)\times\Omega$$

z warunkiem brzegowym:

$$y(t,x) = 0 \text{ na } [0,+\infty)\times\partial\Omega,$$

gdzie $W\colon [0,+\infty)\times\overline{\Omega}\times P \to R$ jest tzw. funkcją pomocniczą spełniającą określone warunki, m.in. nierówność typu Hamiltona-Jacobiego:

$$W_t(t,x,y) - y\Delta_x(W_y(t,x,y)) + yf(t,x,-W_y(t,x,y)) \leq 0$$

dla p.w. $x \in \Omega$ i dla $(t,y) \in [0,+\infty)\times P$. Przy użyciu funkcji W wprowadza się dualną funkcję Lapunowa $T\colon [0,+\infty)\times\Omega\times P \to R$,

$$T(t,x,y) = W(t,x,y) - yW_y(t,x,y).$$

Gdy funkcja T spełnia warunek wzrostu

$$T(t,x,y) \geq d_1(|y|)$$

dla $t \geq 0$, $x \in \Omega$ i $y \in P$, gdzie d_1 należy do klasy $\mathcal{K}_1$, oraz T i W spełniają poniższą nierówność:

$$W_t(t,x,y) - y\Delta_x(W_y(t,x,y)) + yf(t,x,-W_y(t,x,y)) + c(t,x)(T(t,x,y))^\alpha \leq 0$$

dla $(t,x,y) \in [0,+\infty)\times\Omega\times P$, gdzie $\alpha \in (0,1)$ i funkcja $c\colon [0,+\infty)\times\Omega \to [0,+\infty)$ jest mierzalna, ograniczona i istnieje $t_c \geq 0$ takie, że $\int_{t_c}^{+\infty} c(s,x)ds = +\infty$, to rozwiązanie zerowe wyjściowego równania parabolicznego jest stabilne w skończonym czasie (Theorem 5.6 w [A3]).

yy

W pracy [A4] autorzy ponownie badają stabilność w stałym czasie rozwiązania zerowego równania

$$x' = f(t, x),$$

gdzie $f: [0, +\infty) \times R^n \to R^n$ jest funkcją Caratheodory'ego i $f(t, 0) = 0$ dla każdego $t \geq 0$. Ustalmy $t_0 > 0$. Dla $x_0 \in R^n$ niech $S(x_0)$ (oznaczenie z autoreferatu) oznacza czas dotarcia trajektorii $x(t)$ startującej z punktu $x_0 = x(t_0)$ do punktu równowagi (punktu stacjonarnego) 0, tj. $x(t) = 0$ dla każdego $t \geq S(x_0)$. W terminach teorii sterowania stosując dualne podejście typu programowania dynamicznego wprowadzone przez A. Nowakowskiego w pracy „The dual dynamic programming" (*Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), no. 4, 1089-1096) sformułowano wystarczające warunki na to, żeby funkcja czasu osadzania $S: R^n \to (0, +\infty)$ była ograniczona,

$$\sup_{x_0 \in R^n} S(x_0) \leq S_{max} < +\infty.$$

***

Na pozostały dorobek publikacyjny habilitantki powstały już po obronie rozprawy doktorskiej składa się 10 artykułów, w tym dwa recenzowane artykuły z międzynarodowych konferencji. Poza artykułem [B], ściśle powiązanym z ocenianym cyklem, prace te są współautorskie. Współautorami habilitantki są: Tadeusz Antczak, Marta Grzanek, Andrzej Nowakowski, Andrzej Rogowski, Aleksandra Stasiak i Marcin Studniarski. Prace z pozostałego dorobku dotyczą m.in.: teorii optymalizacji, stabilności rozwiązań równań różniczkowych, modelu ekonomicznego Gale'a. Kandydatka wygłosiła referaty na kilku konferencjach krajowych i międzynarodowych.

***

Publikacje naukowe [A1]-[A5] przedstawione przez dr Annę Michalak w ramach osiągnięcia naukowego są bardzo podobne. Cykl jest nie tyle spójny tematycznie, co monotematyczny, a podjęty w nim temat stanowi bezpośrednią kontynuację tematu przedstawionego w rozprawie doktorskiej habilitantki. Zapoznając się z kolejnymi artykułami z cyklu miałam wrażenie, że czytam wciąż tę samą pracę z drobnymi zmianami. W czterech z pięciu publikacji do badań nad stabilnością rozwiązania zerowego równania różniczkowego zastosowano dualną metodę Lapunowa i lemat porównawczy, a w [A4] dualne podejście do programowania dynamicznego. Mimo że dualna metoda Lapunowa została przedstawiona przez habilitantkę już w publikacji [B] z 2013 r., to w okresie minionych dziesięciu lat nie była szeroko stosowana. Potwierdza to chociażby bardzo mała liczba cytowań tejże pracy, a właściwie jej autocytowań (5 wg Scopus, 4 wg Web of Science, 2 wg MathSciNet). Autocytowania pojawiły się m.in. w efekcie sięgnięcia po tę metodę przy pisaniu prac [A1]-[A3] i [A5]. **Według mnie przedstawiony do oceny cykl publikacji nie spełnia warunku, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*, tj. nie stanowi znacznego wkładu w rozwój dyscypliny matematyka. Dlatego nie popieram wniosku pani dr Anny Michalak o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka.**

MJanczewska