Prof. dr hab. Janusz Wysoczański
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Wrocław, 11.03.2024 r.

Recenzja rozprawy habilitacyjnej dr Hanny Podsędkowskiej, zatytułowanej

"Entropia Segala stanu kwantowego na półskończonej algebrze von Neumanna i jej zastosowanie w teorii pomiaru kwantowego"

1. Życiorys naukowy Kandydatki

Dr Hanna Podsędkowska pracuje aktualnie jako adiunkt w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego. Studiowała w Instytucie Matematyki UŁ w latach 1988-1993 uzyskując w 1993r. tytuł magistra matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii UŁ, na podstawie rozprawy *Teoria pomiaru kwantowego*, napisanej pod kierunkiem prof. Andrzeja Łuczaka. W latach 1993-2000 była studentką w Studium Doktoranckim Matematyki UŁ, a w 2001r. uzyskała na Wydziale Matematyki UŁ stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy doktorskiej *Matematyczne podstawy teorii pomiaru kwantowego*, napisanej pod kierunkiem promotora, prof. Andrzeja Łuczaka. Od roku 1996 pracuje w Katedrze Teorii Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, najpierw jako asystent, potem od 2001r. do chwili obecnej jako adiunkt, z przerwą 2017-2019 na stanowisku starszego wykładowcy tamże.

W życiorysie tym brak jest jakichkolwiek staży zagranicznych czy nawet krótkoterminowych pobytów w innych, poza polskimi, ośrodkach badawczych i współpracy z matematykami spoza IM UŁ (poza pięciodniową wizytą na Politechnice w Pradze w 2023r.). Szkoda, że kandydatka nie nawiązała współpracy z czołowymi specjalistami w dziedzinie informacji kwantowej, w szczególności z Denesem Petzem, Anną Jencovą czy innymi, którzy wielokrotnie bywali na corocznych konferencjach *Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability*. Myślę, że nawet krótki pobyt w Budapeszcie, gdzie pracował D. Petz, byłby bardzo cenny dla rozwoju naukowego Kandydatki i uprawianej przez nią tematyki.

2. Omówienie Osiągnięcia Naukowego Kandydatki

Moje omówienie Osiągnięcia Naukowego Kandydatki zaczynam od przedstawienia kontekstu, w którym to Osiągnięcie jest umieszczone. Pojęcie entropii, wprowadzone przez Irvinga E. Segala w roku 1960, jest uogólnieniem pojęcia entropii von Neumanna z początku lat 30-tych XX wieku, które stanowiło istotny element matematycznych podstaw mechaniki kwantowej, wprowadzonych przez wybitnego węgierskiego matematyka Neumanna Jánosa Lajosa (czyli Johna von Neumanna). O ile entropia von Neumanna, zdefiniowana wzorem $H(A) := -\mathrm{Tr}(A \log A)$, jest określona dla nieujemnych (hermitowskich) operatorów ograniczonych $A \in B(H)$, działających na danej przestrzeni Hilberta H, na której jest naturalny unormowany ślad Tr, o tyle Segal zaproponował uogólnienie tego pojęcia na sytuację algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ (typu I lub II), na której jest zadany dowolny ślad unormowany τ. Entropia Segala jest zdefiniowana analogicznie, w postaci $S(a) := -\tau(a \log a)$, gdzie elementy $a \in \mathcal{M}$ są nieujemne i samosprzężone ($a = a^* \geq 0$). Analogicznie, jeśli $\rho \in \mathcal{M}_*$ jest stanem na $\mathcal{M}$ o macierzy gęstości $h_\rho \geq 0$, to $S(\rho) = -\tau(h_\rho \log h_\rho)$.

Jednakże to uogólnienie nie zyskało większego zainteresowania, w porównaniu z pojęciem entropii von Neumanna (w bazie MathSciNet pojawiają się 1552 pozycje związane z pojęciem *von Neumann entropy* oraz jedynie 42 pozycje związane z pojęciem *Segal entropy*). Ponadto, na przestrzeni ponad 60 lat praca Segala odnotowała 7 cytowań (wg MathSciNet), z tego 4 w pracach zespołu Profesora Andrzeja Łuczaka. Pozostałe cytowania nie są jednak związane z próbami rozwoju pojęcia entropii Segala i badaniem jego własności. Co prawda, wykaz cytowań w bazie MathSciNet jest trochę mylący, ponieważ w cytowaniach pracy Segala nie ma uwzględnionego najważniejszego z nich, czyli pracy Nakamury i Umegaki z 1961r. (Proc. Japan Acad. 37). W pracy tej pokazują oni podstawowe własności entropii Segala, takie jak np. jej wklęsłość czy nie zmniejszanie tej entropii przez warunkową wartość oczekiwaną (dla dodatnich operatorów hermitowskich w $\mathcal{M}$), w oparciu o dowodzone przez nich własności wypukłości funkcji operatorowej $f(a) = a \log a$ ($a \in \mathcal{M} \subset B(H)$) oraz monotoniczności funkcji operatorowej $f(a) := \log a$. Co więcej, baza MathSciNet nie uwzględnia też cytowanego przez Kandydatkę i równie ważnego w tej teorii artykułu O. Lanforda i D. Robinsona z 1968r. (J. Math. Phys. 9), w którym stawiają oni hipotezę silnej podaddytywności entropii Segala. Ta praca także nie jest uwzględniona w cytowaniach artykułu Segala z 1960r, więc trudno jednoznacznie określić jak duże zainteresowanie środowiska ona wzbudziła.

Nieco lepiej wygląda sytuacja w bazie Zentralblatt (zbMath), w której artykuł Segala ma 13 cytowań, z tego 7 spoza szkoły łódzkiej, natomiast artykuł Lanorfa i Robinsona ma 29 cytowań.

Niemniej jednak odniosłem wrażenie, że pojęcie entropii Segala nie znalazło się w głównym nurcie badań dotyczących entropii, być może ze względu na brak jego istotnych zastosowań fizycznych czy nawet matematycznych. Jest to o tyle ważne, że jako recenzent jestem zobowiązany określić, czy przedstawione Osiągnięcie Naukowe stanowi *znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny* (Ustawa PSWN z 2018r. Art. 219 ust. 1 pkt. 2). Oczywiście dyscypliną, w której Kandydatka ubiega się o habilitację jest *matematyka*, a nie teoria entropii, więc jej Osiągnięcie Naukowe musi być rozpatrywane w takiej ogólności.

Nie mam wąpliwości, że przedstawiony cykl pięciu artykułów [O1]-[O5] spełnia wymagania Art. 219 ust. 1 pkt. 2 lit.b bycia *cyklem powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych* i są wśród nich czasopisma dobre (Entropy i Studia Math.) oraz znane i cenione w środowisku (Int. J. Math. Phys i Reports Math. Phys.).

Mam nieco wątpliwości jeśli chodzi o spełnienie wymagania Art. 219 ust. 2 Ustawy, który mówi: *Osiągnięcie, o którym mowa w ust. 1 pkt 2, może stanowić część pracy zbiorowej, jeżeli opracowanie wydzielonego zagadnienia jest indywidualnym wkładem osoby ubiegającej się o stopień doktora habilitowanego.* We wniosku Kandydatki prace [O1], [O4] i [O5] są wspólne, praca [O4] ma 3 autorów, prace [O1] i [O5] po dwóch. W *Wykazie Osiągnięć Naukowych* Kandydatka określa swój udział w nich jako odpowiednio 33% oraz po 50%, dodając niemal jednakowy opis swojego udziału w powstaniu każdej z tych prac jako *współudział w rozpoznaniu i zdefiniowaniu problemu badawczego, współudział w jego rozwiązaniu i opracowaniu wyników.* Niestety nie mówi to nic na temat wymagany w Ustawie, ponieważ nie określa szczegółowo jakie zagadnienie Kandydatka opracowała samodzielnie i co dokładnie jest jej wkładem indywidualnym w prace wspólne. Co więcej, Rada Doskonałości Naukowej wydała (zaktualizowany w dniu 9.08.2023r.) Poradnik *Postępowania dotyczące nadawania stopnia doktora habilitowanego*, w którym pojawia się (na stronie 15) następujący komentarz do tego wymagania: *Konieczne zatem jest, w przypadku prac współautorskich, wyodrębnienie indywidualnego, merytorycznego udziału tej osoby w powstanie danej pracy, co jest warunkiem dokonania oceny osobistych osiągnięć stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny.* Te indywidualne osiągnięcia Kandydatki trudno jest ocenić na podstawie podanych nieco automatycznie procentów czy nieco sztampowych formułek.

Takich wątpliwości nie budzą prace [O2] i [O3], które są indywidualnym dziełem Kandydatki.

Kolejną kwestią, która nasuwa się w ocenie Osiągnięcia jak i ogólnie dorobku Kandydatki, jest kwestia cytowań jej prac, czyli ich odbioru przez innych specjalistów jak również ich wpływu na ewentualny rozwój dalszych badań, symulowanych rezultatami uzyskanymi w pracach Kandydatki. Prace stanowiące Osiągnięcie Naukowe Kandydatki mają łącznie 5 cytowań, które są jednakże autocytowaniami (wg MathSciNet): praca [O1] (z 2017r) ma 2 autocytowania a [O2] (z 2015r.) ma 3 autocytowania. Pozostałe prace Osiągnięcia Naukowego, czyli prace [O3] z 2021r., [O4] i [O5] - obie z 2017r., nie mają żadnych cytowań. Wydaje mi się, że jeśli w ciągu sześciu czy nawet ośmiu lat od ukazania się jakiegoś artykułu nie ma on żadnego oddźwięku w środowisku, to trudno przypuszczać, że stanowi on znaczący wkład w badaniach teorii entropii dla algebr von Neumanna.

Pozostały dorobek Kandydatki ma dodatkowo jeszcze dwa cytowania, w tym jedno dotyczy pracy [P7] podanej jako przykład *very nice study.* Zatem jak na 22 lata działalności naukowej Kandydatki ilość siedmiu cytowań jej artykułów jest nieznaczna.

Niemniej jednak staram się ocenić, zgodnie z wymaganiami Ustawy, wkład Kandydatki w rozwój dyscypliny *matematyka*, zatem oceniać będę głównie jej wkład intelektualny i specjalistyczny, jaki stanowią jej publikacje - wspólne i indywidualne, szczególnie te przedstawione jako Osiągnięcie Naukowe.

3. Ocena poszczególnych prac *Osiągnięcia Naukowego* Kandydatki

W ocenie Osiągnięcia Naukowego nie mam możliwości ocenienia indywidualnego wkładu Kandydatki w prace współautorskie, ponieważ jej oświadczenia w tej sprawie nie są odpowiednio szczegółowe. Postaram się zatem ocenić ogólny wkład przedstawionych pięciu publikacji w rozwój dyscypliny *matematyka.* Przy każdej z nich podaję, za Kandydatką, jej punktację wg listy czasopism MNiSW oraz, dodatkowo, ilość cytowań wg MathSciNet.

Wszystkie te publikacje dotyczą badania własności entropii Segala na algebrach von Neumanna typu I i II, na których zadany jest dodatni normalny wierny funkcjonał śladowy τ (skończony lub pół-skończony). Zasadniczym elementem w tych badaniach jest odpowiedniość pomiędzy stanami z przestrzeni predualnej $\rho \in \mathcal{M}_*$ (nieco razi mnie używana przez Kandydatkę nazwa *predual*) i operatorami dodatnimi h_ρ (t.zw. operatorami/macierzami gęstości takich stanów) w przestrzeni $L^1(\mathcal{M}, \tau)$, jak również rozkład spektralny operatorów $a \in \mathcal{M}$, których projektory spektralne są także elementami $\mathcal{M}$. Dodatkowo wykorzystuje się znane wcześniej własności (wypukłość czy monotoniczność) operatorowych funkcji $\mathcal{M} \ni a \mapsto \log a \in \mathcal{M}$ oraz $\mathcal{M} \ni a \mapsto a \log a \in \mathcal{M}$.

3.1. **Praca [O1] (40p, 2 cyt.)** Jest to artykuł napisany wspólnie z A. Łuczakiem i opublikowany w International Journal of Theoretical Physics w 2017r. Badane są w nim własności niezmienniczości (minus) entropii Segala $H(h) := \tau(h \log h)$ $(h \in \mathcal{M}^+)$, na działanie odwzorowań liniowych $\alpha : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$, które są normalne, unormowane i dodatnie.

Niezmienniczość $\tau \circ \alpha = \tau$ definiuje odwzorowanie dualne α_* dla którego $\alpha_*(\rho) = \rho \circ \alpha$ dla $\rho \in \mathcal{M}_*$. Pokazano, że operator gęstości $h_{\alpha_*(\rho)}$ wyraża się przez odwzorowanie $\tilde{\alpha}$ sprzężone do α, z czego wynika Twierdzenie 2 mówiące, że α_* nie podwyższa (minus) entropii Segala dodatnich elementów $\rho \in \mathcal{M}^+$: $H(\alpha_*(\rho)) \leq H(\rho)$. Jest to de facto uszczegółowienie dowodu analogicznego wyniku, uzyskanego przez M. Ohya i D. Petza. Pokazano ponadto kiedy w tej nierówności pojawia się równość w przypadku $*$-homomorfizmu $\alpha : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$; jest to wtedy i tylko wtedy, gdy gęstość h_ρ jest w obrazie $\alpha(\mathcal{M})$. W dowodzie pokazuje się, że $\alpha(\mathcal{M})$ jest także algebrą von Neumanna $\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ i korzysta z jawnego wzoru na warunkową wartość oczekiwaną $\mathbb{E} := \alpha \circ \tilde{\alpha} : \mathcal{M} \mapsto \alpha(\mathcal{M})$, dla której $\tau \circ \mathbb{E} = \tau$. W dowodach obu Twierdzeń widać bardzo dobrą znajomość istniejących technik i metod prowadzonych badań, a przedstawione dowody są nowe i matematycznie ciekawe.

Druga część artykułu [O1] jest poświęcona badaniu ciągłości entropii Segala, a głównym narzędziem jest pokazanie w Proposition 7, że entropia Renyi S_α jest malejąca dla $\alpha \in (1, +\infty)$ i w granicy $\lim_{\alpha \to 1^+} -S_\alpha(\rho) = H(\rho)$, co daje (minus) entropię Segala $H(\rho)$ stanu $\rho \in \mathcal{M}_*^+$. Dowód tego faktu jest pomysłowy, sprowadza się do badania funkcji rzeczywistych i wykorzystania Twierdzenia Lebesgue'a o Monotonicznej Zbieżności. W konsekwencji otrzymuje się ciągłość entropii Renyi w normie L^1, a dalej półciągłość z dołu (a nie z góry, jak w napisano w [O1] Theorem 9) entropii Segala i także von Neumanna w szczególnym przypadku algebry von Neumanna typu I. Te drobne nieścisłości wynikają chyba z faktu operowania znakiem minus w różnych sformułowaniach entropii Segala czy Renyi. Chociaż te wyniki były w pewnym stopniu znane wcześniej, to ich dowód w pracy [O1] jest nowy i matematycznie interesujący.

W Autoreferacie pojawia się nieścisłość, ponieważ jest tam Lemat 1, odnoszący się do ([O1], Lemat 6), jednak jego treść jest tożsama z ([O1], Proposition 7).

3.2. **Praca [O2] (100p, 3 cyt.)** Jest to artykuł indywidualny Kandydatki, opublikowany w Entropy w 2015r. Głównym wynikiem pierwszej części tego artykułu jest pokazanie podaddytywności entropii Segala $S(\varphi + \psi) \leq S(\varphi) + S(\psi)$ dla stanów $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$, przy założeniu ograniczoności ich gęstości $D_\varphi, D_\psi \in \mathcal{M}$, dla skończonej algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ z normalnym wiernym unormowanym śladem τ. Jako wniosek Kandydatka pokazuje, że addytywność jest równoważna wzajemnej ortogonalności gęstości tych stanów $D_\varphi D_\psi = 0$. Dowód opiera się na nierówności $I(a, b) := \tau(a \log b - a \log a) \geq 0$ dla dowolnych $a, b \in \mathcal{M}$ spełniających warunek $0 \leq a \leq b$. Wielkość $I(a, b)$ była wprowadzona przez Hisaharu Umegaki w artykule z 1962r. pod nazwą *informacji pomiędzy* a i b. Umegaki pokazał jej dodatniość w przypadku, gdy ich *nośniki* (czyli rzuty ortogonalne na domknięcia obrazów) spełniają warunek $s(a) \leq s(b)$. Kandydatka pokazuje nieujemność informacji $I(a, b) \geq 0$ pomiędzy a i b inną metodą, bez założenia $\tau(a) = \tau(b) = 1$, jak również uzasadnia, że równość $I(a, b) = 0$ jest równoważna komutowaniu $ab = ba = a^2$.

W drugiej części tego artykułu Kandydatka zbadała pomiary związane z różnego rodzaju *instrumentami* służącymi do pomiarów kwantowych. Są to liniowe, unormowane i przeliczalnie addytywne odwzorowania $\mathcal{E} : \mathcal{F} \mapsto L^+(\mathcal{M}_*)$ z zadanej przestrzeni miarowej $(\Omega, \mathcal{F})$ w dodatnie odwzorowania liniowe na $\mathcal{M}_*$. W szczególności rozważane są instrumenty *powtarzalne w słabym sensie* czyli takie, dla których $(\mathcal{E}_{\Delta_1}(\mathcal{E}_{\Delta_2}\varphi))(1_\mathcal{M}) = (\mathcal{E}_{\Delta_1 \cap \Delta_2}\varphi)(1_\mathcal{M})$ dla dowolnych mierzalnych podzbiorów $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathcal{F}$ i dowolnego $\varphi \in \mathcal{M}_*$. Kandydatka pokazuje, że pomiar związany z takim instrumentem jest pomiarem o minimalnej entropii. Ponadto pokazano, że dla t.zw. instrumentów Lüdersa powtarzalność w słabym sensie jest równoważna z pomiarem o minimalnej entropii.

Są to wyniki ciekawe i niewątpliwie stanowią istotny wkład w dyscyplinę *matematyka*.

3.3. **Praca [O3] (100p, 0 cyt.)** Jest to także indywidualny artykuł Kandydatki, opublikowany w Studia Mathematica w 2021r., w którym pokazuje ona silną podaddytywność entropii Segala dla stanów na dowolnej półskończonej algebrze von Neumanna. Własność ta była postulowana jako hipoteza w artykule Lanforda i Robinsona z 1968r. oraz, w większej ogólności przez M.B. Ruskai w 1973r. Jej dowód uogólnia wynik Ohya i Petza, którzy pokazali silną podaddytywność dla przypadku skończenie wymiarowego. O ile w przypadku $\mathcal{M} = B(H)$ czyli typu I pojawiały się dowody tej własności, wykorzystujące własności wypukłości/wklęsłości funkcji operatorowych oraz strukturę operatorów śladowych (czyli $\mathcal{M}_*$ w tym przypadku), użyte tam metody zazwyczaj nie dały się zastosować w ogólnym przypadku dowolnej półskończonej algebry von Neumanna. Metoda Ohya i Petza korzystała z monotoniczności entropii i Kandydatka uogólniła to na algebry von Neumanna z wiernym normalnym półskończonym śladem.

Praca [O3] jest techniczna, zawiera przede wszystkim rozwiązanie hipotez, stawianych ponad pół wieku wcześniej przez wybitnych matematyków i rozwiązanych w pełnej ogólności dopiero przez Kandydatkę. Praca ta zawiera dowody zarówno silnej podaddytywności entropii Segala (Theorem 7) jak i jej podaddytywności (Theorem 8), oraz uogólnioną nierówność Araki-Lieba (Theorem 10), dla przypadku pół-skończonych algebr von Neumanna z wiernymi śladami. Ich dowody polegają na sprytnym sprowadzeniu, poprzez twierdzenia spektralne, problemów ogólnych do problemów analizy rzeczywistej, w szczególności całkowych twierdzeń o zbieżności.

Można się zastanawiać, z jakiego powodu powyższe problemy w takiej ogólności nie były rozwiązane przez tak wiele lat. Niemniej jednak Kandydatka wykazała tutaj umiejętność dobrania skutecznych metod i narzędzi oraz odpowiedniego ich zastosowania. Dlatego uważam, że ta praca Kandydatki stanowi bardzo istotny wkład w dyscyplinę *matematyka*.

3.4. **Praca [O4] (100p, 0 cyt.)** Jest to artykuł, napisany wspólnie z A. Łuczakiem oraz M. Sewerynem i opublikowany Entropy w 2017r.

Praca ta dotyczy badania stanów o maksymalnej entropii Segala. Jest ona rozszerzeniem klasycznych wyników dotyczących algebry wszystkich operatorów ograniczonych na danej przestrzeni Hilberta ze śladem standardowym, dla której wiadomo, że w przypadku entropii von Neumanna odpowiedź dają stany Gibbsa, zadane przez operatory gęstości postaci $\frac{e^{sH}}{tre^{sH}}$, dla $s \in \mathbb{R}$ i Hamiltonianu H. W pracy [O4] pokazano analogiczny rezultat dla dowolnej skończonej algebry von Neumanna $\mathcal{M}$ ze skończonym śladem τ i entropii Segala zamiast entropii von Neumanna. Kluczowym narzędziem jest tutaj pokazana (w Lemacie 1) monotoniczność funkcji rzeczywistej $f(s) = \frac{\tau(he^{sh})}{\tau(e^{sh})}$ dla dowolnego nietrywialnego elementu $h = h^* \in \mathcal{M}$, co wynika ze słabej dodatniości jej pochodnej i nierówności Schwarza. Dla stanu Gibbsa ρ_s, $s \in \mathbb{R}$, o gęstości operatorowej postaci $\frac{e^{sh}}{\tau(e^{sh})}$, czyli takiej, że $\rho_s(g) = \tau\left(\frac{ge^{sh}}{\tau(e^{sh})}\right)$ dla $g \in \mathcal{M}$, pokazano (Proposition 3), że każda liczba pomiędzy kresami (dolnym $\lambda_m(h)$ i górnym $\lambda_M(h)$) spektrum h jest wartością $\rho_s(h)$ dla dokładnie jednego $s \in \mathbb{R}$. Tutaj także głównymi narzędziami są rozkład spektralny i całkowe twierdzenia graniczne. Jako konsekwencję tej własności pokazano (Theorem 1), że dla ustalonej liczby $\lambda_m < \lambda < \lambda_M$ kresem górnym wszystkich możliwych wartości entropii Segala $S(\rho)$, po wszystkich stanach ρ, dla których $\rho(h) = \lambda$, jest entropia Segala $S(\rho_s)$ pewnego stanu Gibbsa ρ_s. Tutaj głównym narzędziem jest znowu nierówność Umegaki dla kwantowej informacji (pomiędzy a i b) $\tau(a \log a - a \log b) \geq 0$ oraz wklęsłość funkcji operatorowej $\log a$ i wypukłość funkcji operatorowej $a \log a$.

Praca ta niewątpliwie jest ciekawym osiągnięciem, w którym udział ma Kandydatka.

3.5. **Praca [O5] (70p, 0 cyt.)** Jest to artykuł, napisany wspólnie z R. Wieczorkiem i opublikowany w Reports on Mathematical Physics w 2017r.

W pracy tej autorzy zajmują się szacowaniem możliwie jak największej zależności pomiędzy skończonym ciągiem $\rho := (\rho_i)_{i=1}^n$ stanów kwantowych (o gęstościach $(h_{\rho_i})_{i=1}^n$), występujących z zadanymi prawdopodobieństwami $\pi := (\pi_i)_{i=1}^n$, a skończonym ciągiem $M := (M_j)_{j=1}^m$ kwantowych pomiarów (czyli ciągiem operatorów dodatnich z $\mathcal{M}$ o sumie będącej jedynką algebry). W tym kontekście rozważają trzy metody:

- maksymalizacji *wzajemnej informacji* $I(\rho, M)$,
- maksymalizacji *odległości funkcyjnej* $d_f(\rho, M)$ po klasie funkcji rzeczywistych, wypukłych i dodatnich poza warunkiem $f(0) = 0$,
- minimalizacji *wierności* (czy może raczej *dokładności*?) rozkładów $F(\rho, M)$.

W pierwszej metodzie maksymalna wartość to tak zwana informacja dostępna I_{acc}, szacowana od góry przez liczbę χ, zdefiniowaną przez Holevo dla entropii von Neumanna H i uogólnioną w [O5] dla entropii Segala S:

$$I_{acc} \leq \chi = \chi_S = S\left(\sum_{j=1}^n \pi_j \rho_j\right) - \sum_{j=1}^n \pi_j S(\rho_j).$$

Istotnym narzędziem jest tutaj pokazana silna podaddytywność entropii Segala w przypadku skończonej algebry von Neumanna ze skończonym, wiernym i normalnym śladem (ten wynik uogólniła potem Kandydatka w [O3]). Powyższe oszacowanie okazuje się być równoważne wklęsłości entropii Segala.

W metodzie drugiej, dla algebry von Neumanna ze śladem τ (normalnym, wiernym, unormowanym i skończonym) uzyskane jest ogólne oszacowanie postaci

$$d_f(\rho, M) \leq \sum_{i=1}^n \tau\left(f\left(\pi_i h_{\rho_i} - \pi_i\left(\sum_{k=1}^n \pi_k h_{\rho_k}\right)\right)\right).$$

Natomiast dla wartości bezwzględnej $f(x) := |x|$ analogiczne oszacowanie pokazano w ogólniejszym przypadku pół-skończonym.

W trzeciej metodzie uzyskano oszacowanie od dołu minimum po M wielkości

$$F(\rho, M) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{\pi_i \rho_i(M_j)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{j=1}^m \pi_i \rho_i(M_j)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \rho_i(M_j)\right)}.$$

Praca ta zawiera wiele technicznych rachunków, które pokazują biegłość autorów w stosowaniu metod prowadzących do uzyskiwania ciekawych nierówności, uogólniających na przypadek entropii Segala, znane wcześniej dla entropii von Neumanna. Jest ona niewątpliwie istotnym wkładem w dyscyplinę *matematyka*, ze znaczącym współudziałem Kandydatki.

4. Ocena pozostałego dorobku naukowego Kandydatki

4.1. **Pozostałe publikacje.** W swoim *Wykazie Osiągnięć Naukowych albo Artystycznych* Kandydatka podaje dodatkowo 11 publikacji, które mają łącznie 2 cytowania wg MathSciNet, z czego jedno jest autocytowaniem. Jedna z prac, indywidualna Kandydatki, ukazała się w 2001r. i powstała przed uzyskaniem przez nią doktoratu, pozostałe stanowią dorobek po doktoracie, przy czym praca [P7] jest także indywidualnym dziełem Kandydatki, pozostałe są wspólne z A. Łuczakiem i K. Lubnauer, a jedna z R. Wieczorkiem. Nie ma wśród nich żadnej pracy wspólnej z kimś spoza grupy badawczej profesora Andrzeja Łuczaka. Być może współpraca także z innym ośrodkiem badawczym mogłaby zaowocować rozszerzeniem badanej tematyki i zwiększeniem oddźwięku dotyczącego uzyskiwanych rezultatów, w tym liczby cytowań. Punktacja ministerialna tych czasopism mieści niemal w całości w przedziale 40p-70p, ponadto jedno czasopismo Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. ma 20p, jedno Rev. Math. Phys. 100p a jednego Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Ser. Rech. Déform. bark na tej liście. Biorąc pod uwagę tytuły i rangę czasopism, w których ukazały się publikacje Kandydatki, to niewątpliwie *Open Systems and Information Dynamics*, *Reports on Mathematical Physics*, *Reviews in Mathematical Physics*, *Probability and Mathematical Statistics* czy *Fixed Point Theory* są ważnymi i uznanymi w środowisku. W tematyce uprawianej przez Kandydatkę niełatwo o publikacje w lepszych czasopismach, jak na przykład w *Communications in Mathematical Physics*. Tak więc moje ogólne wrażenie jest w tej kwestii pozytywne i uważam, że Kandydatka ma publikacje na dobrym poziomie publikacyjnym, chociaż brak im cytowalności.

4.2. **Udział w Konferencjach.** Jak podaje Kandydatka, brała ona udział w 11 konferencjach naukowych, w tym w 3 z "Nieprzemiennej Analizy Harmonicznej", które współorganizowałem w Będlewie, w 4 organizowanych przez "International Quantum Structures Association" oraz jednej z Robotyki (MMAR 2015). Wygłosiła na nich 10 referatów (co prawda podaje 11 ale na konferencji IQSA w Tropea 2022 drugi referat, oparty na wspólnej pracy, wygłosił (według informacji mi dostępnych) prof. Andrzej Łuczak).

Udział w konferencjach jest zazwyczaj bardzo pożyteczny, daje możliwość przedstawienia własnych badań i uzyskania komentarzy innych specjalistów. Niejednokrotnie też zauważenie przedstawianych wyników badawczych przez innych powoduje dalszy rozwój badanego zagadnienia. Mam jednak wrażenie, że tak się nie stało w przypadku rezultatów badań, przedstawianych na konferencjach przez Kandydatkę, nie widać w szczególności wzrostu zainteresowania jej badaniami np. w postaci większej liczby cytowań.

5. Ocena innej naukowej działalności Kandydatki

5.1. **Granty badawcze.** W swoim *Wykazie Osiągnięć Naukowych albo Artystycznych* Kandydatka informuje, że była głównym wykonawcą w grancie NCN "Podstawowe zagadnienia teorii informacji kwantowej oraz dyskryminacji stanów i operacji kwantowych", realizowanym w latach 2011-2014, chociaż nie podaje jakie były efekty jego realizacji.

Była także wykonawcą w projekcie "Opracowanie i badanie algorytmów aktywnego (siłowego) wspomagania operatora przy wykonywaniu stereotypów ruchowych podczas sterowania telemanipulatorem o sześciu stopniach swobody" finansowanym przez NCN w latach 2011-2015 na Politechnice Łódzkiej. W ramach tego grantu (cyt. za dr hab. inż. W. Pawłowskim) *dr Hanna Podsędkowska opracowała metodę statystycznej obróbki danych pomiarowych wykorzystującej dane pomiarowe z pełnego okresu próbkowania do optymalnego estymowania stanu systemu o sześciu stopniach swobody.* Trudno mi ocenić tą aktywność naukową, ponieważ nie mam żadnej wiedzy na temat próbkowania sterowania telemanipulatorem. Jednak opracowanie przez Kandydatkę (wydaje mi się, że chyba wspólnie z prof. Leszkiem Podsędkowskim z Politechniki Łódzkiej?) metody statystycznej w takim projekcie jest niewątpliwie przejawem istotnej aktywności naukowej poza Uniwersytetem Łódzkim.

5.2. **Współpraca naukowa poza uczelnią macierzystą.** W Art. 219 ust. 1 pkt. 3 Ustawy stawia się wymaganie *wykazania istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej*, chociaż Poradnik RDN na str. 16 zaleca, aby sformułowania *w szczególności zagraniczną* nie traktować jako warunku koniecznego. W związku z tym wymaganiem Kandydatka podaje dwie takie aktywności:

(1) Udział w wymienionym powyżej projekcie na Politechnice Łódzkiej w latach 2011-2015, w trakcie którego opracowała metodę statystycznej obróbki danych pomiarowych
(2) Pięciodniowy pobyt na Politechnice w Pradze (19–23 czerwca 2023), w trakcie której prowadziła dyskusje z prof. Janem Hamhalterem (nota bene jednym z recenzentów habilitacji) oraz Martinem Bohata i wygłosiła referat na seminarium.

Oczywiście w opisanym projekcie realizowanym na Politechnice Łódzkiej Kandydatka wykazała się istotną działalnością naukową, skoro opracowała metodę statystyczną badania konkretnego problemu technologicznego. Natomiast kilkudniowy pobyt na Politechnice w Pradze, która oczywiście spełnia kryterium bycia *instytucją zagraniczną*, i wygłoszenie tam referatu, nie przyniósł jak na razie efektu, który można by ocenić jako istotną aktywność naukową, chociaż często dyskusje bywają bardzo owocne i pozwalają identyfikować i rozwijać nowe zagadnienia badawcze.

6. Konkluzja

Podsumowując moją ocenę Osiągnięcia Naukowego dr Hanny Podsędkowskiej stwierdzam, że pomimo pewnych szczegółowych zastrzeżeń, sformułowanych powyżej, stanowi ono istotny wkład w dyscyplinę *matematyka*. Dlatego wnioskuję o dopuszczenie dr Hanny Podsędkowskiej do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego i popieram wniosek o nadanie jej stopnia doktora habilitowanego.

Janusz Wysoczański