Opinia w sprawie nadania p. doktor Annie Michalak stopnia doktora habilitowanego dla Komisji Uniwersytetu Łódzkiego do spraw stopni naukowych

Informacje wstępne.

Pani doktor Anna Michalak ukończyła studia matematyczne na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego w 2004 roku. We wrześniu 2010 roku uzyskała tamże stopień doktora nauk matematycznych na podstawie rozprawy pt. *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa* której promotorem był prof. Andrzej Nowakowski.

W latach 2006-2023 Anna Michalak opublikowała 18 prac naukowych, głównie współautorskich, spośród których cykl pięciu powiązanych tematycznie artykułów wchodzi w skład tzw. Osiągnięcia naukowego stanowiącego podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego. Tematyka badawcza tych prac jest powiązaną z *teorią stabilności A.M. Lapunowa* wprowadzoną w początku dwudziestego wieku (praca doktorska Lapunowa została obroniona w 1892, jego teoria została doceniona dopiero w latach trzydziestych XX wieku). Stosowana początkowo do układów równań różniczkowych zwyczajnych teoria Lapunowa pozwalała badać ograniczoność lub asymptotykę rozwiązań bez znajomości jawnej postaci rozwiązania a jedynie w oparciu o własności odpowiednio skonstruowanej "funkcji Lapunowa". Stopniowo dostosowano tę metodę do badania semiliniowych ewolucyjnych równań różniczkowych cząstkowych, głównie typu parabolicznego i hiperbolicznego, i obecnie trudno byłoby sobie wyobrazić teorię takich równań bez używania technik Lapunowa. Trzeba jednak podkreślić, że są to raczej metody pomocnicze, służące do pokazywania ograniczoności bądź zachowania asymptotycznego rozwiązań w przypadku gdy generalnie nie ma możliwosci jawnego rozwiązania równania.

W zasadzie wszystkie elementy wchodzące w skład cyklu artykułów przedstawionych jako rozprawa habilitacyjna dotyczą badania pojęcia *stabilności w ustalonym czasie* (ang. fixed time stability) różnego rodzaju równań i układów równań; modelu Hopfielda sieci neuronowych (ang. Hopfield neural network model), równań parabolicznych posiadających własność 'extinction' (zanikania rozwiązania w skończonym czasie), czy układów równań różniczkowych zwyczajnych. Dokładniej, odwołując się do przykładów równań dla których dla osiągnięcia rozwiązania zerowego wystarcza skończony czas zdefiniowano pojęcie *stabilności czasu skończonego* (ang. finite-time stability). Impulsem do podjęcia takich badań, stanowiących poszerzenie pytań stawianych w klasycznej teorii Lapunowa, było zaobserwowanie dla równań parabolicznych z "pierwiastkową" nieliniowością

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \text{gdzie } f(u) = -\lambda u^{\alpha}, \quad \lambda > 0, \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

(oraz ogólniejszych, z $f(0) = 0$ i o zbieżnej całce $\int_0^{\epsilon} \frac{du}{f(u)} < \infty, \epsilon > 0$) zerowania się ich nieujemnych rozwiązań w skończonym czasie (prace z lat siedemdziesiątych

XX wieku; np. E.S. Sabininy, A.S. Kalashnikova). Sensowne stało się więc pytanie o oszacowanie (ewentualnie skończonego) czasu dla którego rozwiązanie zeruje się tożsamościowo lub, w ogólniejszym przypadku, "osiąga" rozwiązanie stacjonarne. Generalnie tego typu zachowaniom rozwiązań poświęcone są badania habilitantki.

Pozwolę sobie tu na pewną dygresję. Opisane powyżej nieliniowości nie spełniają warunku Lipschitza w zerze, co lokuje odpowiadające im równania poza standardowymi rozważaniami dotyczącymi kwestii istnienia rozwiązań (porównaj jednak *Banach Center Publications* 52 (2000), str. 73). Stąd stosunkowo późno zauważono zachowania typu *extinction*, przynajmniej w przypadku równań parabolicznych.

Cykl prac wchodzący w skład osiągnięcia naukowego.

Pani doktor Michalak zaliczyła w poczet cyklu artykułów stanowiących jej osiągnięcie naukowe (lub rozprawę habilitacyjnejną) następujące 5 prac:

[1:] A. Michalak, A. Nowakowski, Finite-time stability and finite-time synchronization of neural network - Dual approach, *Journal of the Franklin Institute* 354 (18) (2017), 8513- 8528.

[2:] A. Michalak, A. Nowakowski, Fixed-time stability of ODE and fixed-time stability of neural network, *International Journal of Control* 94 (12) (2021), 3332-3338.

[3:] A. Michalak, A. Nowakowski, Dual Lyapunov approach to finite time stability for parabolic PDE, *Dynamics of Partial Differential Equations* 19 (3) (2022), 177-189.

[4:] A. Michalak, A. Nowakowski, New approach to fixed-time stability of a nonlinear system, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* 48 (2023), 101337.

[5:] A. Michalak, Finite-time and fixed-time stability analysis for time-varying system - dual approach, *Journal of the Franklin Institute* 359 (18) (2022), 10676-10687.

Poza jedną pozycją są to więc prace współautorskie. W dostarczonej dokumentacji znajdują się wymagane "oświadczenia współautorów".

Przejdę obecnie do dokładniejszego omówienia pozycji wchodzących w skład tego cyklu prac. Jako pierwszą omówię pracę [3] poświęconą badaniu stabilności zerowego rozwiązania zadania Dirichleta dla równania

$$u_t - \Delta u = f(t, x, u), \quad t > 0, x \in \Omega, \tag{2}$$

w ograniczonym obszarze $\Omega \subset R^n$, gdzie funkcja $f : [0, \infty) \times \Omega \times R \to R$ spełnia warunek Caratheodory'ego oraz $f(t, x, 0) = 0$. Autorzy *zakładają* istnienie globalnego w czasie "strong solution" (nie jest jasna definicja takiego rozwiązania) koncentrując się na kwestii stabilności trywialnego rozwiązania tego równania. Służy do tego pojęcie *dualnej funkcji Lapunowa* $T(t,x,y) = W(t,x,y) - yW_y(t,x,y)$ powiązanej z rozwiązaniem u zadania Dirichleta (2) wzorem:

$$u(t,x) = -W_y(t,x,y(t,x)). \tag{3}$$

Przepisując (2) dla tak zdefiniowanej funkcji u dostajemy tzw. *równanie dualne*:

$$\frac{d}{dt}(W_y(t,x,y(t,x))) - \Delta W_y(t,x,y(t,x)) = -f(t,x,-W_y(t,x,y(t,x))), \tag{4}$$

stanowiące przedmiot badań w tej pracy. Dodając stronami do (4) pomnożonego przez y wyrażenie $W_t(t,x,y(t,x))$ otrzymamy wzór na *pochodną po czasie* funkcji Lapunowa $T(t,x,y(t,x))$:

$$W_t(t,x,y(t,x)) - y\Delta(W_y(t,x,y(t,x))) + yf(t,x,y(t,x))$$
$$= W_t(t,x,y(t,x)) - y\frac{d}{dt}(W_y(t,x,y(t,x))) = \frac{d}{dt}T(t,x,y(t,x)).$$

Przedstawione w pracy twierdzenia mają charakter warunkowy, co jest typowe w teorii Lapunowa; "O ile istnieje funkcja W o odpowiednich własnościach, to rozwiązanie zerowe równania (2) jest stabilne" (Twierdzenie 3.5, Uwaga 3.6). W Twierdzeniach 5.6 oraz 6.2 podane zostały stosunkowo złożone warunki wystarczające na to aby rozwiązanie trywialne (2) było stabilne w skończonym czasie; między innymi sprecyzowana jest postać funkcji $W(t,x,y)$ oraz funkcji pomocniczych $a(t,x), d(t,x)$ występujących w Twierdzeniu 4.1.

Strona redakcyjna pracy pozostawia niestety sporo do życzenia. Przykładowo, co oznacza stwierdzenie ze str. 183 "the above inequality is negative for $D > 1$ sufficiently large." (Czy nierówność może być ujemna?). Przykład (5.2), dla którego przeprowadzono jawne przeliczenia, dotyczy równania różniczkowego zwyczajnego i nie pasuje do pracy poświęconej równaniom parabolicznym. Nie podjęto próby zbudowania odpowiednio regularnego rozwiązania, po prostu założono jego istnienie. Sformułowania twierdzeń są pisane w sposób skomplikowany i trudny do prześledzenia.

Praca [4] poświęcona jest kontrolowalności w czasie skończonym układów równań różniczkowych zwyczajnych postaci

$$x'(t) = f(t,x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t > 0, \quad x_0 \in R^n, \tag{5}$$

gdzie $f : R \times R^n \to R^n$ spełnia warunki Caratheodory'ego oraz $f(t,0) = 0$. Głównym narzędziem w tych badaniach są funkcje Lapunowa $V(t,x)$ spełniające nierówność różniczkową

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -r(V(t,x)),$$

gdzie o funkcji r zakłada się spełnienie warunków: $r : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $r(0) = 0$ oraz przynależność do $L^2(0,\infty)$. Autorzy piszą (poniżej wzoru (13)), że *nie zakładają* ciągłości r ani sumowalności funkcji r^{-1} w pewnym prawym otoczeniu punktu 0. Generalnie, nałożone na prawą stronę f z (5) warunki **(H)** oraz **(HV)** są mało klarowne.

Typowym przykładem cytowanym w pracy (Example 4) jest skalarne równanie różniczkowe postaci

$$x'(t) = -(1+t)|x|^{\frac{2}{3}}\mathrm{sgn}x$$

Rezultaty ilustrowane są prostymi algorytmami numerycznymi. Omawiana praca dostarcza w szczególności, sformułowanego w Twierdzeniu 7, warunku wystarczającego dla istnienia przybliżonego optymalnego sterowania zwrotnego (ang. ϵ-optimal feedback control), jednak przytoczenie tego rezultatu byłoby technicznie zbyt skomplikowane.

W pracy [1] badana jest stabilność w skończonym czasie prostego modelu sieci neuronowych opisanego przy pomocy układu równań różniczkowych zwyczajnych, tzw. *sieci neuronowych typu Hopfielda*. Badany układ n równań ma postać

$$x'(t) = -A(t)x(t) + B(t)h(t, x(t)) + I(t), \tag{6}$$

gdzie $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ a składowa x_i opisuje wektor stanu i-tego węzła, A, B są $n \times n$ macierzami współczynników zas $h(t, x(t))$ opisuje charakterystykę reakcji j-tego węzła. W pracy podany jest warunek wystarczający stabilności w czasie skończonym rozwiązania zerowego tego układu.

Pozostały dorobek naukowy.

Poza zaliczonymi w skład osiągnięcia naukowego pięcioma pracami pani Anna Michalak jest (głównie) współautorką 13 opublikowanych prac naukowych, spośród których 8 powstało po uzyskaniu w 2010 roku doktoratu. Prace te są opublikowane w dobrych czasopismach matematycznych oraz z zakresu zastosowań matematyki; pozwolę tu sobie wyróżnić dwie prace wydane w *Nonlinear Analysis TMA*.

Należy dalej wspomnieć o ilości cytowań, która w bazie Web of Science wynosiła (według dostarczonych materiałów) 26, zaś według bazy Google Scholar (na dzień 25.01.24) Anna Michalak była cytowana 58 razy (40 razy po 2019 roku) z najczęściej, 19 razy, cytowaną pracą: *A nonsmooth Lyapunov function and stability for ODE's of Carathéodory type*, Nonlinear Analysis TMA 69 (2008), 337-342. Nie są to ilości duże, można jednak stwierdzić, że działalność naukowa pani Anny Michalak została zauważona w środowisku matematyków.

Podsumowanie opinii.

Podsumuję obecnie moje uwagi dotyczące opiniowanego wystąpienia o stopień doktora habilitowanego. Nawiązując do poczynionych w latach siedemdziesiątych XX wieku obserwacji dotyczących możliwości zanikania rozwiązań do zera w skończonym czasie promotor pani Michalak, prof. dr hab. Andrzej Nowakowski, poszerzył pytania stawiane w teorii Lapunowa stabilności o badanie tego typu zachowań. Badania były prowadzone wspólnie z panią Michalak, co zaowocowało w szczególnści powstaniem cyklu prac przedstawionego jako rozprawa habilitacyjna. Są one powiązane tematycznie i technicznie i dotyczą badania ew. skończonego czasu zanikania rozwiązań do zera lub osiągania przez nie rozwiązania stacjonarnego. Można powiedzieć, że badania te uzupełniają klasyczne rozważania teorii stabilności Lapunowa.

Konkluzja.

Ubiegając się o stopień doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, dyscyplinie matematyka, pani doktor Anna Michalak przedstawiła do oceny osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy z dnia 20 lipca 2018, stanowiące cykl pięciu powiązanych tematycznie publikacji pt. “Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych”. Wchodzące w jego skład prace naukowe zostały opublikowane w dobrych czasopismach z zakresu zastosowań matematyki. Pragnę stwierdzić, że w moim przekonaniu wymieniony powyżej cykl prac wnosi istotny wkład w rozwój teorii stabilności Lapunowa wchodzącej w skład dyscypliny Matematyka. Popieram tym samym starania pani doktor Anny Michalak o przyznanie jej stopnia doktora habilitowanego.

Katowice, 27.01.2024.
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego

T. Dłotko,

prof. dr. hab. Tomasz Dłotko