Politechnika Łódzka

Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
tel. kontaktowy: 602 730 893

Łódź, 10 stycznia 2024 r.

Ocena osiągnięć dr Anny Michalak w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka

Dr Anna Michalak jest adiunktem w Katedrze Ekonometrii na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego. Stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskała w 2010 roku w na podstawie rozprawy pt. *Dualne podejście do problemu stabilności typu Lapunowa.* Promotorem w jej przewodzie doktorskim był prof. dr hab. Andrzej Nowakowski.

W kwietniu 2023 r. dr Michalak złożyła za pośrednictwem Rady Doskonałości Naukowej wniosek do Komisji Uniwersytetu Łódzkiego do spraw stopni naukowych w dyscyplinie matematyka o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora habilitowanego, w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka na podstawie osiągnięcia naukowego obejmującego cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem *Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych* składającego się z następujących pięciu publikacji ([1]):

[A1] A. Michalak, A. Nowakowski, *Finite-time stability and finite-time synchronization of neural network – Dual approach*, Journal of the Franklin Institute 354 (18) (2017), 8513- 8528;

[A2] A. Michalak, A. Nowakowski, *Fixed-time stability of ODE and fixed-time stability of neural network*, International Journal of Control 94 (12) (2021), 3332-3338;

[A3] A. Michalak, A. Nowakowski, *Dual Lyapunov approach to finite time stability for parabolic PDE*, Dynamics of Partial Differential Equations 19 (3) (2022), 177-189;

[A4] A. Michalak, A. Nowakowski, *New approach to fixed-time stability of a nonlinear system*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 48 (2023), 101337;

[A5] A. Michalak, *Finite-time and fixed-time stability analysis for time-varying system - dual approach*, Journal of the Franklin Institute 359 (18) (2022), 10676-10687.

[1]W recenzji wykorzystuję numerację przedstawioną w autoreferacie habilitantki oraz wykazie jej osiągnięć.

Wnioskowi towarzyszy dokumentacja zawierająca m.in. autoreferat, wykaz osiągnięć naukowych oraz stosowne oświadczenie współautora potwierdzające istotny i proporcjonalny udział dr Michalak w powstaniu artykułów wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

Poniższa recenzja składa się z czterech części. W pierwszej części omówię skrótowo zawartość merytoryczną i wyniki uzyskane przez habilitantkę w publikacjach składających się na osiągnięcie naukowe. W drugiej części dokonam oceny osiągnięcia habilitacyjnego, a w trzeciej – oceny jej pozostałych wyników badawczych oraz aktywności naukowej zgodnie z art. 219 ust. 2 Ustawy „Prawo o szkolnictwie wyższym" z dn. 20 lipca 2018 r. (tekst jednolity: Dz. U. z 2023 r. poz. 742 z późn. zm.). W czwartej części przedstawię konkluzję recenzji.

Omówienie wyników osiągnięcia habilitacyjnego: Dorobek p. Anny Michalak zawarty w osiągnięciu habilitacyjnym dotyczy kwestii związanych z teorią stabilności punktów równowagi równań lub układów równań różniczkowych. Dokładniej rzecz ujmując chodzi o tzw. *stabilność w skończonym czasie*, a więc zagadnienie, które ma swoje źródło w teorii sterowania, a dotyczy stabilizowalności układów sterowania poprzez odpowiednie sprzężenia zwrotne. Okazuje się, że niekiedy układy sterowania dopuszczają *ciągłe* (a więc nie bang-bang) sprzężenia zwrotne (tzn. sterowania w pętli zamkniętej), które są nie tylko lokalnymi stabilizatorami zera, ale pozwalają dotrzeć do zera w skończonym czasie. To prowadzi do pytania o warunki stabilności w skończonym czasie zera (jako punktu równowagi) układu lub procesu dynamicznego, czyli sytuacji, w której rozwiązania startujące z otoczenia zera docierają do zera w skończonym czasie.

Ponieważ pojęcie stabilności w skończonym czasie (i kwestie pokrewne) nie są powszechnie znane zdecydowałem się na zwięzłe wprowadzenie do tej problematyki, co pozwoli na lepszy opis osiągnięć habilitantki. Postanowiłem także część wyników nieco dokładniej zrelacjonować, aby następnie lepiej uzasadnić swą ocenę.

Mamy do czynienia z (na ogół nie autonomicznym) procesem dynamicznym wyznaczonym przez układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x} = f(t,x),\ x \in X,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $f : [0,+\infty) \times X \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem *Carathéodory'ego* takim, że $\sup_{x\in X, |x|\leqslant r} |f(\cdot,x)| \in L^\infty([0,\infty))$ dla dowolnego $r \geqslant 0$. Przyjęte założenia implikują, że dla dowolnych $t_0 \geqslant 0$ i $x_0 \in X$ istnieje (absolutnie ciągłe i wysycone w przód) rozwiązanie $x : [t_0, \tau_x) \to X$ układu (1), takie że $x(t_0) = x_0$; oczywiście czas istnienia τ_x ($t_0 < \tau_x \leqslant \infty$), może zależeć także od warunków początkowych (t_0, x_0). Rozwiązania układu (1) nie są na ogół wyznaczone jednoznacznie; symbolem $\mathrm{Sol}(t_0, x_0)$ oznaczam zbiór *wszystkich* rozwiązań startujących z punktu x_0 w czasie t_0. Zakładamy ponadto, że $0 \in X$ jest *punktem równowagi* układu (1), tzn. $f(t, 0) = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. Dla $t_0 \geqslant 0$ i $x_0 \in X$ definiuje się tzw. *czas osadzania*

$$S(t_0,x_0) := \sup_{x\in \mathrm{Sol}(t_0,x_0)} \inf \left\{T \in [t_0,\tau_x) \mid x(t) = 0 \text{ dla } T \leqslant t < \tau_x\right\}\ (^2). \tag{2}$$

Powiadamy, że 0 jest punktem równowagi układu (1) *stabilnym w skończonym czasie* (lub, że *układ* (1) *jest stabilny w skończonym czasie w punkcie 0*) jeśli:

- 0 jest punktem równowagi stabilnym w sensie Lapunowa ;
- dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ istnieje takie otoczenie $N = N(t_0) \subset X$ zera, że dla $x_0 \in N$ czas osadzania $S(t_0, x_0) < \infty$.

Warto zauważyć, że powyższy warunek implikuje, że dla każdego $t_0 \geqslant 0$ istnieje taki czas

[2] Oczywiście jeżeli $x \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$, to zbiór $\{T \in [t_0, \tau_x) \mid x(t) = 0$ dla $T \leqslant t < \tau_x\}$ może być pusty. Przyjmujemy, że $\inf \emptyset := -\infty$. Podobnie, gdy $A \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $\infty \in A$, to $\sup A = \infty$.

$T_0 > t_0$, że jeśli $x_0 \in N(t_0)$ i $x \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$, to $\tau_x = \infty$ oraz $x(t) = 0$ dla $t \geqslant T_0$.

Mówimy, że 0 jest *punktem równowagi stabilnym w stałym czasie*, jeśli

(3)
$$\forall t_0 \geqslant 0 \quad \sup_{x_0 \in X} S(t_0, x_0) < \infty,$$

co oznacza, że dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ z dowolnego stanu początkowego $x_0 \in X$ można przejść do 0 w pewnym ustalonym czasie T zależnym tylko od t_0.

Jest jasne, że zjawisko „stabilności w skończonym lub stałym czasie" punktu równowagi układu (1) jest rzadkie. Widać bowiem, że wprawdzie układ mający punkt równowagi o tej własności może posiadać rozwiązania jednoznaczne wprzód (w prawą stronę), lecz nie w lewo (w tył). A więc przy dostatecznie dużych t nie może istnieć gradient $\nabla_x f(t, 0)$ (symbolem ∇_x tu i poniżej oznaczam gradient względem zmiennej przestrzennej) ani $f(t, \cdot)$ nie może w 0 spełniać (lokalnego) warunku Lipschitza. Innymi słowy, w najlepszym razie rozważany układ może zadawać pół-potok lub „pół-proces" dynamiczny. To nie razi z punktu widzenia teorii sterowania, gdzie włączenie odpowiedniego sprzężenia zwrotnego do „przyzwoitego" układu sterowania może go zaburzyć i ewolucję zatrzymać, lub w sytuacji zjawisk fizycznych, w których dyssypacja energii spowodowana tłumieniem (lub inną reakcją środowiska) spowoduje zatrzymanie procesu.

W pewnym sensie prototypem układu, którego punkt równowagi jest stabilny w skończonym czasie jest autonomiczne równanie skalarne postaci

(4)
$$\dot{x} = -\mathrm{sgn}(x)|x|^{\alpha}, \ x \in \mathbb{R},$$

gdzie $\alpha \in (0,1)$. Dla $t_0 \geqslant 0$ i $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Sol}(t_0, x_0) = \{x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}\}$, gdzie

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x_0)\left(|x_0|^{1-\alpha} - (1-\alpha)(t - t_0)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \text{dla } t_0 \leqslant t \leqslant \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + t_0, \\ 0, & \text{dla } t > \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + t_0 \end{cases}$$

oraz $S(t_0, x_0) = \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + t_0$.

Dobrze znane warunki dostateczne stabilności (lub asymptotycznej) stabilności w sensie Lapunowa punktów równowagi opierają się na istnieniu tzw. słabej (lub mocnej) funkcji Lapunowa (zob. np. twierdzenia III.8.1-8.4 z klasycznego podręcznika Ph. Hartmana *Ordinary Differential Equations* oraz pracę J. Kurzweila *On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion*, Amer. Math. Soc. Transl. 24 (1963) o warunkach koniecznych). W podobnym duchu są rezultaty z prac V. T. Haimo [8], E. Moulay'a i W. Perruquettiego podające warunki dostateczne [22] (przypadek nieautonomiczny) i konieczne [23] (przypadek autonomiczny) stabilności w skończonym czasie (numeracja w recenzji pochodzi z bibliografii podanej w autoreferacie p. A. Michalak). Warto przytoczyć Proposition 4.1 z [22] (zob. też Proposition 1 w [8]):

Jeżeli funkcja $V : [0, \infty) \times U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset X$ jest otoczeniem 0, jest różniczkowalna w sposób ciągły, dodatnio określona [3], *$V(t, 0) = 0$, $t \geqslant 0$, oraz*

(5)
$$\dot{V}(t,x) := V_t(t,x) + \langle f(t,x), \nabla_x V(t,x)\rangle \leqslant -r(V(t,x)), \ t \geqslant 0, \ x \in U,$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, V_t i $\nabla_x V$ oznacza pochodną cząstkową względem zmiennej t i gradient V względem zmiennej x, odpowiednio), gdzie funkcja $r : (0, +\infty) \to [0 + \infty)$ jest ciągła i (być może niewłaściwa) całka $\int_0^1 [r(t)]^{-1}\, dt$ jest zbieżna, to 0 jest stabilnym w skończonym czasie punktem równowagi dla (1) i dla dowolnego $t_0 \geqslant 0$ i x_0 z pewnego otoczenia 0

$$S(t_0, x_0) \leqslant t_0 + \int_0^{V(t_0, x_0)} \frac{dt}{r(t)}.$$

[3] Tzn. $V(t,x) \geqslant V_1(|x|)$ dla $t \geqslant 0$, $x \in U$, gdzie $V_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją ciągłą, $V_1(0) = 0$ i $V_1(t) > 0$ dla $t > 0$; niekiedy zakłada się jeszcze, że funkcja V_1 jest rosnąca.

Porównując warunek (5) z klasycznym warunkiem Lapunowa (zob. np. Ph. Hartman, *ibid.*, Theorem III.8.3):

$$\dot{V}(t,x) \leqslant 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in U, \tag{6}$$

widzimy, że na to, aby zero było stabilne w skończonym czasie wystarcza wzmocnienie oszacowania na $\dot{V}$ i skorzystanie z elementarnej teorii nierówności różniczkowych. W szczególności można wziąć $r(t) := ct^{\beta}$, $t \geqslant 0$, gdzie $\beta \in (0,1)$ i $c > 0$ otrzymując wynik z [3], gdzie warunek (5) przyjmuje postać:

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -c\big[V(t,x)\big]^{\beta}, \quad t \geqslant 0,\ x \in U. \tag{7}$$

Jednocześnie mamy przykład zastosowania do równania (4) jeżeli przyjąć $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, $c = 2$ i np. $V(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Warunki (5), (7) były dalej uogólniane poprzez złagodzenie oszacowań (5) lub (7), lub żądanie mniejszej regularności V i stosowanie metod analizy niegładkiej; zob. np. pracę [19], gdzie

$$\dot{V}(t,x) \leqslant -c(t)r\big(V(t,x)\big), \tag{8}$$

i funkcja $c(\cdot)$ należy do klasy $\mathcal{M}$ (czyli c jest lokalnie całkowalna i $\int^{\infty} c(s)\,ds = \infty$), a r jest jak wyżej w (5).

Podobnie, jak w przypadku zwykłej stabilności, gdzie posługiwanie się tzw. II metodą Lapunowa polegająca na wykorzystywaniu funkcji Lapunowa jest uwarunkowane jej istnieniem (w niewielu bowiem konkretnych przypadkach można ją efektywnie wyznaczyć), tak również zakres stosowania powyższych twierdzeń jest ograniczony.

W swoich badaniach p. dr Anna Michalak zdecydowała się na inną, własną koncepcję i podejście, które nazywa „*dualnym*". Trudno jest domyślić się co, tak na prawdę, skłoniło ją do tego podejścia. Wprawdzie pisze w autoreferacie i artykułach o inspiracji pracą A. Nowakowskiego [24] o dualnym podejściu w programowaniu dynamicznym do problemu Bolzy, lecz tego nie uzasadnia ani nie precyzuje, a ogranicza się do zdawkowych stwierdzeń o kontynuacji pomysłów z rozprawy doktorskiej (opublikowanej jako [21], gdzie uwag o inspiracjach niestety również brakuje). Dodatkowo, stwierdza, że jej podejście nie ma nic wspólnego z metodą dualną obecną w teorii sterowania optymalnego. Jest to sprawa dyskusyjna i nie jest rolą recenzenta jej rozstrząsanie. W każdym razie habilitantka twierdzi, że jej „dualna" metoda badania stabilności przedstawiona w [21] oraz „dualna" metoda badania stabilności w skończonym czasie opracowana w recenzowanym cyklu stanowi dobrą alternatywę dla „klasycznego" podejścia Lapunowa.

Niestety nie podzielam zdania dr Michalak. Sądzę mianowicie, że stosowanie metody „dualnej" obwarowane jest wieloma silnymi i trudnymi do weryfikacji założeniami, a przez to uzyskane wyniki nie są zbyt interesujące. Aby uzasadnić tę krytyczną opinię spróbuję zwięźle, lecz dość ściśle opisać omawiane podejście. Stąd specyficzna forma recenzji i jej długość.

Rozpocznę od opisu podejścia do stabilności w pracy [21], gdyż jest to niezbędne, aby adekwatnie odnieść się do wyników z cyklu habilitacyjnego. Przypomnijmy, że podstawowe założenie (6) klasycznego twierdzenia Lapunowa w odniesieniu do układu (1) prowadzi do stwierdzenia, że jeżeli $x \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$, $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in X$, to p.w. $\frac{d}{dt}V\big(t,x(t)\big) \leqslant 0$, czyli funkcja $[t_0, \tau_x) \ni t \mapsto V\big(t,x(t)\big)$ jest nierosnąca. W konsekwencji prowadzi to do „zapadania się" trajektorii w podpoziomice funkcji V i do stabilności.

Autorzy [21, war. (5)] zakładają, że dana jest funkcja $W : [0,\infty) \times Y \to \mathbb{R}$, gdzie $Y \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $0 \in Y$, klasy C^1 o gradiencie $\nabla_y W$ spełniającym warunek Lipschitza i taka, że $W(t,0) = \nabla_y W(t,0) = 0$ dla $t \geqslant 0$. Ponadto zachodzi nierówność (którą nazywają, zapewne biorąc pod uwagę podobieństwo do równania Hamiltona-Jacobiego, *dualną nierównością Hamiltona-Jacobiego*)

$$W_t(t,y) + \Big\langle y, f\big(t, -\nabla_y W(t,y)\big)\Big\rangle \leqslant 0 \ \text{ dla } t \geqslant 0,\ y \in Y. \tag{9}$$

W dalszym ciągu, oprócz układu (1) nazywanego „prymalnym”, rozważają układ „dualny”

$$\frac{d}{dt}\nabla_y W(t, y(t)) = -f\big(t, -\nabla_y W(t, y(t))\big). \tag{10}$$

Rozwiązaniem tego układu, startującym z punktu $y_0 \in Y$ w czasie $t_0 \geqslant 0$, jest absolutnie ciągła funkcja $y : [t_0, \tau_y) \to Y$ taka, że $y(t_0) = y_0$ i (10) zachodzi dla p.w $t \in [t_0, \tau_y)$. Oczywiście 0 jest punktem równowagi dla (10). W dalszym ciągu mamy wprawdzie do czynienia z wynikami typu „...*jeśli istnieje rozwiązanie* (10), *to*...” albo „...*przy założeniu, że istnieje rozwiązanie* (10)...”, lecz brak w [21] choć wzmianki o istnieniu rozwiązań układu (10) budzi niepokój.

Łatwo zobaczyć, wykorzystując (9), że jeśli y jest rozwiązaniem (10), to

$$\frac{d}{dt}T\big(t, y(t)\big) \leqslant 0 \text{ dla p.w. } t \in [t_0, \tau_y), \tag{11}$$

gdzie funkcja $T : [0, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$T(t, y) := W(t, y) - \langle y, \nabla_y W(t, y)\rangle, \quad t \geqslant 0,\ y \in Y. \tag{12}$$

Innymi słowy warunek (9) implikuje, że funkcja $[t_0, \tau_y) \ni t \mapsto T\big(t, y(t)\big)$ jest nierosnąca. Przy założeniu, że funkcja T jest dodatnio określona, staje się ona funkcją typu Lapunowa dla układu (10). Analogicznie jak w dowodzie klasycznego twierdzenia o stabilności można natychmiast otrzymać stabilność układu (10) w zerze.

Jak zaprezentowany wynik o stabilności zera dla (10) ma się do stabilności zera dla (1)? Otóż *kluczowym* założeniem są tu warunki [21, war. (15), (16)] orzekające, że:

(13) dla dowolnych $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in X$, $\delta_1 > 0$ i $x \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$, $x : [t_0, \tau_x) \to X$, istnieje *absolutnie ciągła* funkcja $y : [t_0, \tau_y) \to Y$ spełniająca układ (10) i $\delta > 0$ takie, że $\tau_x \leqslant \tau_y$, $x(t) = -\nabla_y W\big(t, y(t)\big)$ dla $t \in [t_0, \tau_x)$ oraz $|y(t_0)| < \delta_1$, jeśli $|x(t_0)| < \delta$.

Autorzy [21] zakładają więc, że rozwiązania układów (1) i (10) są *„sprzężone”* przy pomocy gradientu $\nabla_y W$. To jest silne założenie. Oczywiście jeśli $y(\cdot)$, $y(t_0) = y_0$, jest rozwiązaniem (10), to funkcja $x(\cdot) = -\nabla_y W\big(\cdot, y(\cdot)\big)$ jest absolutnie ciągła i jest rozwiązaniem układu (1), $x(t_0) = x_0 = -\nabla_y W(t_0, y_0)$ oraz $\tau_x \geqslant \tau_y$. Ale nawet, gdy równanie $x = -\nabla_y W(t, y)$ dałoby się rozwikłać względem y (przy dodatkowych założeniach), to weryfikacja warunku (13) mogłaby być *lokalnie* trudna; globalne rozwikłanie tego równania wymagałoby jeszcze znacznie silniejszych założeń.

Warunek (13), przy dodatkowym (technicznym) założeniu [21, war. (14)] na temat funkcji W ([4]), prowadzi do natychmiastowego wniosku [21, Theorem 3] mówiącego, że jeśli układ (10) jest stabilny w zerze, to także układ (1) jest tam stabilny.

Oprócz warunku (9), autorzy podają jeszcze jeden skomplikowany warunek [21, war. (18)] wymagający wyższej regularności W:

$$\forall z \in W_y(t, Y),\ t \geqslant 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(W(t, z) - \langle z, \nabla_y W(t, z)\rangle\Big) - \langle z, D_y^2 W(t, z) f(t, z)\rangle \leqslant 0 \tag{14}$$

($D_y^2 W(t, z)$ oznacza macierz Hessego funkcji $W(t, \cdot)$ w punkcie z). Przy wspomnianych powyżej założeniach o W, warunek (14) ponownie implikuje [21, Theorem 4] stabilność 0 dla układu (1).

[4] Założenie [21, war. (14)] oznacza *de facto*, że operator Niemyckiego $C([0, \infty), \mathbb{R}^n) \ni y(\cdot) \mapsto x(\cdot) = \Phi(y) := \nabla_y W(\cdot, y(\cdot)) \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n)$ jest ciągły w 0; w tym języku założenie (13) oznacza, że dla dowolnego $x \in \mathrm{Sol}(t_0, y_0)$ o dostatecznie „małym” początku $x(t_0)$, przeciwobraz $\Phi^{-1}(x)$ zawiera rozwiązanie układu (10) o dowolnie „małym” początku $y(t_0)$. Ponadto Φ przekształca rozwiązania (10) na rozwiązania (1).

Przedstawione wyniki pracy [21] są kwintesencją „dualnego" podejścia do stabilności. Są też punktem wyjścia do osiągnięcia habilitacyjnego. Mianowicie pytanie, jak zmodyfikować wyniki z pracy [21], aby uzyskać wyniki o stabilności w skończonym czasie dla układów typu (1) jest przedmiotem zainteresowania w pracach [A1], [A2] oraz [A5], a także – choć w nieco innym kontekście – pracy [A3].

Otóż autorzy przyjmują założenia analogiczne do wspomnianych wyżej warunków [21, war. (14), (15), (16)]: są to [A1, Assumptions 8, 9, 10], założenia [A2, (1), (2), (3)] lub [A5, zał. C2, C3, C4], a także założenie (Z2) z autoreferatu ([5]). Wśród tych założeń obecny jest omówiony powyżej kluczowy warunek (13). Następnie autorzy modyfikują nierówność (9) w taki sam sposób, jak w (5) został zmodyfikowana nierówność (6), tj. „dodają" po prawej stronie oszacowanie przez wyrażenie $-c(t)r\big(T(t,y)\big)$ takie, jak w (8):

$$W_t(t,y) + \Big\langle y, f\big(t, \nabla_y W(t,y)\big)\Big\rangle \leqslant -c(t)r\big(T(t,y)\big),\ t \geqslant t_0, \tag{15}$$

Warunek ten implikuje stabilność w skończonym czasie dla układu dualnego (10). Dzięki temu autorzy otrzymują natychmiast twierdzenia [A5, Theorem 9], oraz – analogicznie modyfikując warunek (14) – twierdzenie [A1, Theorem 14] (tutaj $r(t) = t^\alpha$) o stabilności w skończonym czasie dla (1). Okazuje się bowiem, że układ (1) jest stabilny w skończonym czasie, o ile tę własność ma układ (10). Jest to natychmiastowa konsekwencja warunku (13). Jeśli funkcja $c(\cdot)$ użyta w (15) należy do klasy $\mathcal{MB}$ (czyli $c \in \mathcal{M}$ i $\int^\infty [c(s)]^{-1}\,ds < \infty$), to w twierdzeniach [A2, Theorems 3.1, 3.2] formułowane są wyniki dotyczące stabilności w stałym czasie dla układu (1). Dodatkowo w [A5] pojawia się (*de facto* tożsame z twierdzeniem [A2, Theorem 3.2]) twierdzenie [A5, Theorem 10]. W wymienionych twierdzeniach pojawiają się oszacowania czasów osadzania uzyskane dzięki wykorzystaniu lematu „porównawczego" (*comparison lemma*) z pracy [19], który jest pewną wersją lematu Perrona w teorii nierówności różniczkowych.

W obu pracach [A1] i [A2] dr Michalak wraz ze współautorem bada z punktu widzenia stabilności w skończonym czasie zaburzone układy liniowe postaci

$$\dot{x} = f(t,x) := A(t)x + B(t)g(t,x) + I(t),$$

gdzie $A, B : [0,\infty) \to M_{n\times n}$ (przestrzeń $(n \times n)$-macierzy o współczynnikach rzeczywistych) są mierzalnymi polami macierzowymi, $I : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem mierzalnym, a $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem Carathéodory'ego i spełniają szereg technicznych i skomplikowanych założeń ilościowych. Układy takie modelują zachowanie (w tym np. stabilność, synchronizację) pewnych sieci neuronowych typu Hopfielda; wówczas macierze A, B i pola I i g mają określoną interpretację inżynierską. Niestety autorzy nie weryfikują tutaj wspomnianego wyżej kluczowego założenia (13), tj. [A1, war (15), (16)], co rodzi wątpliwość w stosunku do twierdzenia [A1, Theorem 15]. Podobne zastrzeżenia można mieć w przypadku twierdzenia [A1, Theorem 16] oraz przykładów po nim następujących, a także przykładów [A2, Example 4.1, 4.2]. Nie byłem w stanie sprawdzić, czy założenie (13) jest spełnione w rozważanych tam sytuacjach. Nie umiem również powiedzieć i powątpiewam na ile sytuacja rozważana w ww. twierdzeniach umotywowana i inspirowana jest faktycznymi potrzebami inżynierskimi lub technicznymi sieci neuronowych, czyli wynikającymi z autentycznych zastosowań.

Kolejna praca [A3] z cyklu habilitacyjnego dotyczy stabilności punktów równowagi dla parabolicznych równań cząstkowych postaci

$$u_t - \Delta_x u = f(t,x,u),\quad t \geqslant 0,\ x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R},\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

[5] Należy wspomnieć dodać, że w założeniach [A1, Assumption 10], [A2, war. (3)] oraz w założeniu (Z2) pkt. 3. z autoreferatu są luki; nie ma tej luki w założeniu [21, war. (16)] ani w [A5, war. C4]. Np. w [A1, Assumption 10] należy założyć tyle, ile w warunku [21, war. (16)].

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym o gładkim brzegu, $f : [0, \infty) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem Carathéodory'ego takim, że $f(t, x, 0) = 0$. Autorka rozważa rozwiązania *strong*, czyli „mocne". Niezgodnie z (raczej powszechną) nomenklaturą, „mocnym rozwiązaniem" nazywa funkcje ciągłą $u : [0, \infty) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, która spełnia zależności (16) prawie wszędzie. Delikatna kwestia istnienia takich rozwiązań autorów nie interesuje. Przyjęte założenia gwarantują, że funkcja $u \equiv 0$ jest rozwiązaniem/punktem równowagi równania (16). Przedmiotem zainteresowania jest tutaj stabilność rozwiązania zerowego w sensie normy Czebyszewa, tzn. zachowanie normy $\sup_{x \in \Omega} |u(t, x)|$, gdy $t \to \infty$, gdzie u jest rozwiązaniem startującym w czasie $t_0 \geqslant 0$ z funkcji początkowej $u_0 \in C(\Omega)$. Mamy tu praktycznie to samo podejście co w pracach [A1], [A2] i [A5], a różnice są w istocie jedynie kontekstualne: autorzy idą śladem wymienionych prac, stosując analogiczne rozumowania. „Dualny potencjał" Lapunowa (12) zastąpiony jest funkcją

$$T(t, x, y) = W(t, x, y) - yW_y(t, x, y), \; t \geqslant 0, \, x \in \Omega, \, y \in \mathbb{R},$$

gdzie funkcja $W : [0, \infty) \times \Omega \times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym, $0 \in Y$, jest klasy C^2, układ dualny (10) – równaniem

$$\frac{d}{dt} W_y\big(t, x, y(t, x)\big) - \Delta_x W\big(t, x, y(t, x)\big) = -f\Big(t, x, -W_y\big(t, x, y(t, x)\big)\Big) \tag{17}$$

(rozwiązaniem jest funkcja $y : [0, \infty) \times \Omega \to Y$ spełniająca równanie (17) prawie wszędzie) zaś warunek (9) zastąpiony jest analogicznymi warunkiem, w którym po lewej stronie jest

$$W_t(t, x, y) - \Delta_x W_y(t, x, y) + yf\big(t, x, -W_y(t, x, y)\big).$$

Twierdzenie o stabilności lub stabilności w skończonym czasie równania (16) obwarowane jest założeniem [A3, Assumption 3.4], które nie jest wystarczające do przeprowadzenia poprawnego dowodu. Mianowicie autorzy w swoim dowodzie potrzebują warunków analogicznych do przedstawionych w założeniu (13) gwarantujących, że każdemu rozwiązaniu równania (16) odpowiada rozwiązanie równania dualnego (17). Tego – niestety – nie zapewnia założenie [A3, Assumption 3.4]. Stawia to pod znakiem zapytania poprawność [A3, Theorems 3.5, 4.1]. W twierdzeniu [A3, Theorem 4.1] można mieć wiele wątpliwości co do poprawności stwierdzenia "*...all assumptions on W are satisfied...*", a także rachunku prowadzacego do weryfikacji założenia [A3, (2.1)]. Kolejnym krokiem jest twierdzenie [A3, Theorem 5.6] oparte na założeniu [A3, (5.7)], które przypomina warunek (14) o prawej stronie takiej, jak w (15) oraz ponownie na założeniu [A3, Assumption 3.4]. Tutaj znowu dowód zawiera lukę (z tych samych powodów, co dowód [A3, Theorem 3.5]). Prawdziwość twierdzeń [A3, Theorem 6.1, 6.2] stoi również pod znakiem zapytania. W obu tych twierdzeniach autorzy ograniczają się do stwierdzenia, że "*... all assumptions on W are satisfied...*", ale nawet spełnienie tych założeń (w formie podanej w pracy) nie pozwala na wyciągnięcie wniosków o stabilności.

Praca [A4] różni się od pozostałych, choć nadal dotyczy kwestii stabilności zera dla układu (1), gdzie tym razem odwzorowanie Carathéodory'ego $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $f(t, 0) = 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Autorów interesuje asymptotyka rozwiązań startujących w ustalonym czasie $t_0 \in \mathbb{R}$. W pierwszej części pracy zakłada się, że 0 jest *globalnie stabilnym w skończonym czasie* punktem równowagi dla układu (1), co oznacza, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ czas osadzenia po starcie z punktu x_0 w czasie t_0 wynosi

$$T(x_0) := S(t_0, x_0) < \infty,$$

gdzie $S(t_0, x_0)$ było określone wzorem (2). Celem jest znalezienie warunku początkowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$, przy którym $T(x_0)$ przyjmuje największą wartość, czyli wyznaczenie czasu, po którym *wszystkie rozwiązania* układu (1) startujące w czasie t_0 dotrą do zera. Jest bowiem jasne, że jeśli ten problem optymalizacyjny ma rozwiązanie, to 0 jest globalnie stabilnym w *stałym czasie* punktem równowagi układu (1). Punktem wyjścia jest obserwacja, że $x \in \mathrm{Sol}(t_0, x_0)$ dla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$z'(t) = f\big(t, x_0 + z(t)\big),\ t \in [t_0, \tau_x), z(t_0) = 0, \tag{18}$$

gdzie $z(t) := \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds$ (obowiązuje notacja wprowadzona na początku recenzji). Ta obserwacja pozwala spojrzeć na postawiony problem z punktu widzenia teorii optymalizacji:

$$(P) \qquad \max: \quad T(x_0) = \inf\big\{T \geqslant t_0 \mid z(T) = -x_0,\ z \text{ spełnia (18)}\big\},\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

i sugeruje zastosowanie metod programowania dynamicznego *via* równanie Bellmana. Nie będę dalej wchodzić w te rozważania, bowiem w istocie brak ich w [A4] i autoreferacie.

Po dość niejasnych (przynajmniej dla mnie) dywagacjach na temat techniki dualnego programowania dynamicznego (zob. [24]) autorzy zakładają co następuje: istnieją czas $F > t_0$ oraz funkcje $y^0 \in L^1([t_0, F])$ i $Z \in C\big([t_0, F] \times \mathbb{P}\big)$ taka, że $Z_t \in L^2\big([t_0, F] \times \mathbb{P}\big)$, gdzie $\mathbb{P} := \big\{p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \leqslant 0,\ i = 1, ..., n\big\}$ takie, że

$$\forall\,(t,p) \in [t_0, F] \times \mathbb{P} \quad Z_t(t,p) - \inf\Big\{\big\langle p, f\big(t, x_0 + Z(t,p)p\big)\big\rangle - T(x_0) \mid x_0 \in \mathbb{R}^n\Big\} = y_0(t). \tag{19}$$

Równość (19) oznacza, że dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\forall\,(t,p) \in [t_0, F] \times \mathbb{P} \quad T(x_0) \leqslant -Z_t(t,p) + \big\langle p, f\big(t, x_0 + Z(t,p)p\big)\big\rangle + y_0(t).$$

Założenie (19) nie jest niestety w żaden sposób uwiarygodnione: nie ma żadnych przesłanek wskazujących na istnienie funkcji y_0 i Z spełniających (19). Dla ustalonej funkcji $y \in L^1\big([t_0, F],\big)$ takiej, że $y = y^0 + C$ na $[t_0, F]$, gdzie C jest stałą, określony jest zbiór

$$\mathrm{Ad}_Z^{y^0,y} := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \text{ istnieje } p \in L^2\big([t_0, F]\big) \text{ spełniające równanie (20)}\}(^6),$$

gdzie używane równanie (20) ma postać

$$Z_t\big(t, p(t)\big) - \Big\langle p(t), f\big(t, x_0 + Z\big(t, p(t)\big)\big)\Big\rangle = y(t), \tag{20}$$

i ma być spełnione (zapewne) prawie wszędzie na $[t_0, F]$. Niestety brak jest jakichkolwiek przesłanek pozwalających na stwierdzenie, że zbiór $\mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}$ jest niepusty ([7]). Mimo to autorzy rozważają problem optymalizacyjny (P) z ograniczeniem do $x_0 \in \mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}$ i otrzymują tzw. *twierdzenie weryfikacyjne* [A4, Theorem 1], z którego sformułowania już wynika, że jeśli dla pewnej funkcji y (j.w.), punktu $\bar{x}_0 \in \mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}$ i (odpowiadającej mu) funkcji $\bar{p}(\cdot)$ spełniającej (20), zachodzi $T(\bar{x}_0) = y^0 - y$, to $T(\bar{x}_0) = \max_{x \in \mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}} T(x)$. Jak sama habilitantka pisze w autoreferacie „...dowód jest (...) natychmiastową konsekwencją założeń." ([8]) Trudno jest doprawdy dostrzec wartość omawianego twierdzenia.

W drugiej części pracy autorzy zakładają, że 0 jest globalnie asymptotycznie stabilnym (w sensie Lapunowa) punktem równowagi układu (1) i istnieje taki zbiór $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, że dla $x_0 \in X_0$ czas osadzenia $T(x_0) < \infty$. Ponadto zakłada się, że istnieje „klasyczna" funkcja Lapunowa $V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, spełniająca warunek Lipschitza (autorzy nie precyzują czy chodzi o

[6] Zapewne chodzi o $L^2\big([t_0, F], \mathbb{R}^n\big)$.

[7] Wprawdzie autorzy na stronie 3_{17} pracy [A4] napisali, że ten zbiór jest niepusty powołując się na rozumowanie kilka linii wyżej, lecz w rozumowaniu tym pojawia się ewidentna sprzeczność.

[8] Można zauważyć, że podane rozumowanie nie jest poprawne, jeśli nie zażąda się, że rozwiązania $p(\cdot)$ równania (20) (w szczególności funkcja $\bar{p}(\cdot)$) przyjmują wartości w stożku $\mathbb{P}$; tego brakuje w [A4], a także w autoreferacie.

warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej i czy V jest dodatnio określona), która spełnia warunek (5) (tu ponownie nie jest jasne, czy chodzi spełnianie tego warunku prawie wszędzie, czy wszędzie – to mogłoby być niełatwe do uzyskania biorąc pod uwagę, że dla funkcji lipschitzowskich gradient $\nabla_x V(t,x)$ nie musi być wszędzie określony), gdzie tym razem funkcja $r \in L^2([0,\infty))$ i $r(0) = 0$. Z pracy [22] (a raczej rachunku tam przedstawionego) wynika, że dla

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad T(x_0) \leqslant t_0 + \int_0^{V(t_0,x_0)} \frac{ds}{r(s)}.$$

W tym miejscu [A4, eq. (13)] pojawia się usterka (która być może rzutuje na dalszą część pracy), gdyż w pracy [22] czas osadzenia jest definiowany inaczej niż w [A4] i powyżej we wzorze (2): różnica wynosi t_0. Następnie zakłada się, że dla pewnego $p \in \mathbb{P}$, funkcja

$$[t_0,\infty) \times X_0 \ni x_0 \mapsto -\langle p, f(t,x_0)\rangle + \int_0^{V(t,x_0)} \frac{ds}{r(s)}$$

jest ograniczona (jednostajnie ze względu na $x_0 \in X_0$ (?)) przez $k \in L^1([t_0,\infty))$ ([9]). Po czym pojawia się kolejne założenie. Tym razem dla obiektów takich, jak w warunku (19), ma zachodzić analogiczny warunek, w którym $T(x_0)$ zastąpione jest przez wyrażenie $\int_0^{V(t,x_0)} [r(s)]^{-1}\,ds$, a zakres zmienności x_0 ograniczony jest do zbioru X_0. Ponownie zdefiniowany jest zbiór $\mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}$ (choć nie jest jasny jego związek ze zbiorem X_0 i ponownie nie jest jasne, czy jest on niepusty) oraz analogiczne twierdzenie „weryfikacyjne”, tzn. [A4, Theorem 2], z którego tym razem od razu wynika, że jeśli dla pewnej funkcji y (j.w.), $\bar{x}_0 \in \mathrm{Ad}_Z^{y^0,y}$ i (odpowiadającej mu) funkcji $\bar{p}(\cdot) \in L^2([t_0,F],\mathbb{R}^n)$ spełniającej (20) zachodzi $\int_0^{V(t_0,\bar{x}_0)} [r(s)]\,ds = y^0 - y$, to $T(x_0)$ jest ograniczone przez $\int_0^{V(t,\bar{x}_0)} [r(s)]\,ds$. Ponownie przedstawione rozumowanie jest oczywiste (o ile zastrzeżenie odnośnie wartości przyjmowanych przez rozwiązania p równania (20) w stożku $\mathbb{P}$ jest uwzględnione).

W kolejnej części pracy (z niewiadomego powodu nie opisanej przez habilitantkę w autoreferacie) autorzy zajmują się syntezą strategii w pętli zamkniętej realizującej czas osadzenia. Mimo szczerej chęci nie potrafię zwięźle opisać pojawiającej się tu procedury i jej konkluzji.

Ostatnia praca [A5] z cyklu była już częściowo opisana wyżej. Wszystkie obiekty z prac [A1] i [A2] są tu obecne, lecz pojawia się „nowa” (zdaniem autorki) dualna funkcja Lapunowa postaci

$$S(t,x,y) := W(t,y) + \langle x, y\rangle, \quad t \geqslant 0,\ x \in X,\ y \in Y.$$

Funkcja S pojawia się po raz pierwszy, lecz wszystkie dalsze rozważania dotyczą funkcji

$$[0,\infty) \times Y \ni (t,y) \mapsto S(t, -\nabla_y W(t,y), y) = W(t,y) - \langle y, \nabla_y W(t,y)\rangle := T(t,y),$$

gdzie T dana jest wzorem (12). Zatem wprowadzenie S nie zmienia niczego w stosunku do poprzednich prac.

Jedynym *novum* pracy [A5] jest pojęcie *regionu przyciągania* układu (1) (w autoreferacie jest mowa o regionie *atrakcji*), które odpowiada pojęciu *basenu przyciągania* dla układów dynamicznych. Uzyskany wynik [A5, Theorem 19] jest oczywistą konsekwencją założenia (13) i globalnej stabilności w skończonym czasie dla układu dualnego (10).

[9] Znak zapytania bierze się z całkiem niejasnego sformułowania [A4, warunek (13)]; w autoreferacie jest taka sama usterka.

Ocena osiągnięcia naukowego: W powyższym długim sprawozdaniu starałem się dość wiernie opisać zawartość merytoryczną cyklu publikacji wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego p. dr Anny Michalak. Jej problematyka badawcza ogranicza się do wąskiego wycinka teorii stabilności punktów równowagi i asymptotyki rozwiązań równań różniczkowych. Tematyka badań p. A. Michalak nie jest zaawansowana, do jej uprawiania nie potrzeba ani złożonego aparatu matematycznego, ani wyrafinowanej techniki. Dowody większości rezultatów polegają na manipulacji pojęciami i na dość prostych rachunkach; wielokrotnie używany nietrywialny argument o zapadaniu się trajektorii w podpoziomice funkcji Lapunowa prowadzący do stabilności jest całkowicie standardowy. Natomiast niebanalna technika polegająca na zastosowaniu ww. argumentu funkcji Lapunowa w połączeniu z elementami teorii nierówności różniczkowych (tzw. *comparison results*) pochodzi z pracy [19]; trzeba wszakże powiedzieć, że habilitantka robi z niej dobry użytek.

Z teoretycznego punktu widzenia omawiana problematyka badawcza nie jest interesująca dla dużego grona matematyków. Być może ze względów aplikacyjnych badane zagadnienia są bardziej atrakcyjne, jednak – moim zdaniem – potencjał aplikacyjny wyników uzyskanych przez dr Michalak również nie jest duży. Warto przyjrzeć się cytowaniom (bez autocytowań) na dzień 7 stycznia 2024: wg bazy danych MathSciNet prace z cyklu habilitacyjnego p. Michalak nie były cytowane, wg Web of Science prace te były cytowane 11 razy, przy czym w żadnym przypadku autorzy cytujących prac nie nawiązali do wyników naukowych dr Michalak – były to tylko wzmianki bibliograficzne. Analiza cytowań pokazuje więc, że niestety wyniki z prac cyklu habilitacyjnego nie wzbudziły zainteresowania u innych badaczy.

W warstwie teoretycznej wyniki cyklu publikacji tworzących rozprawę opierają się na restryktywnych i trudnych do weryfikacji założeniach. W związku z tym wyniki nie mają waloru ogólności. Przyjmowane założenia w większości przypadków niemal natychmiast implikują dowodzone tezy. Podane w pracach (a także w autoreferacie) przykłady są szczegółowe i niekiedy skomplikowane; nie sądzę jednak, aby były motywowane konkretnymi, „wziętymi z życia" zastosowaniami – przynajmniej autorka o tym nie wspomina. Co gorsza nie można być pewnym, że autorka potrafi w każdym z tych przykładów zweryfikować potrzebne założenia. O zastrzeżeniach tego rodzaju wspominałem powyżej.

Prace wchodzące do cyklu habilitacyjnego nie są przygotowane starannie. Zawierają szereg niekonsekwencji, omyłek i luk; niestety wiele z tych niedopatrzeń odnajdujemy także w autoreferacie. Podczas pisania autoreferatu autorka nie skorzystała z szansy poprawy usterek, które znalazły się w pracach. Kilka przykładów ilustrujących wyniki teoretyczne opiera się na nie sprawdzonych założeniach, a niekiedy zawiera błędy rachunkowe i rzeczowe. Nawet niektóre definicje nie sa całkiem poprawne. O paru lukach w dowodach wspominałem też w poprzedniej części recenzji.

Odnoszę wrażenie, że dr Michalak raczej wybiórczo podeszła do badanych zagadnień i do literatury przedmiotu swych rozważań. Dość dobrze jest to widoczne w przypadku pracy [A3], w której autorzy nawiązują do teorii stabilności rozwiązań równań parabolicznych. W obliczu mnogości wyników tej teorii (zob. np. monografię J. Cholewy i T. Dłotki: *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*) przedstawione podejście razi skromnością pojęciową i metodologiczną, a także zakresem przedmiotu zainteresowania. Odniesienia bibliograficzne w pracach cyklu dotyczą w zasadzie tylko mocno rozbudowanych wstępów, pełnych „szumu" informacyjnego i dość górnolotnych rozważań. Natomiast na ogół na próżno (poza [22] i [19]) szukać odwołań do wyników lub technik badawczych innych autorów w zasadniczych częściach prac. Autorka ogranicza tam uwagę przede wszystkim do swojej „dualnej" metody i jedynie z tego podejścia czerpie inspiracje. Powoduje to, że jej badania są w dużym stopniu „wsobne". Miałem nadzieję na pewien „powiew świeżości" w pracy [A4], bo podejście, które starałem się powyżej opisać jest chyba ciekawe. Niestety wyniki pracy [A4] nie przedstawiają dużej wartości, a podane algorytmy są – moim zdaniem – nieefektywne. Podobnie ma się rzecz z ładnymi, kolorowymi rysunkami umieszczonymi w pracach [A1], [A2], [A4] i [A5], które w zasadzie ani niczego nie ilustrują, ani nie wyjaśniają.

Jako ewentualne pole zastosowań swoich wyników dr Michalak widzi teorię sieci neuronowych typu Hopfielda. To problematyka modna, przyciągająca uwagę wielu matematyków. W pracach [A1], [A2] (których tytuły zawierają frazę *neural network*) autorzy poświęcają im wiele miejsca we wstępach, rysując perspektywy rozlicznych zastosowań. Trudno jednak orzec, czy wyniki dotyczące sieci neuronowych, tzn. [A1, Theorems 15, 16] oraz przykłady w [A2] mają faktyczny potencjał, abstrahując od technicznych zarzutów, które sformułowałem w poprzedniej części recenzji.

Generalnie mówiąc moja ocena przedstawionego cyklu tematycznie związanych publikacji wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego dr Anny Michalak pt. *Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych* nie jest wysoka. Jestem zdania, że zawarte tam wyniki nie stanowią znaczącego wkładu w matematykę. Uważam także, że instrumentarium i doświadczenie badawcze dr Anny Michalak nie jest jeszcze wystarczające do prowadzenia samodzielnej pracy naukowej i opieki nad ewentualnymi doktorantami.

Ocena innych osiągnięć naukowo-badawczych, dorobku dydaktycznego, popularyzatorskiego i w zakresie współpracy międzynarodowej: Niestety w autoreferacie, którym dysponuję, brak jest merytorycznych informacji o pozostałym (tj. nie wchodzącym w skład osiągnięcia habilitacyjnego) dorobku naukowym p. dr Michalak. Poza cyklem [A1] – [A5] jest ona autorką (z różnymi współautorami, m.in. z A. Nowakowskim, A. Rogowskim, M. Studniarskim, T. Antczakiem i innymi) dziesięciu prac oraz jednej pracy indywidualnej. Należy zauważyć, że pozycji o numerach [1] i [2] (numeracja wg. wykazu osiągnięć) nie można uznać za pełnoprawne publikacje. Są to dwa jednobrzmiące (*identyczne*) streszczenia wystąpień konferencyjnych wygłoszonych przez jednego ze współautorów na konferencjach medycznych. Dr Michalak zapewne przez pomyłkę umieściła je w wykazie swoich publikacji (choć w autoreferacie zakwalifikowała je jako artykuły naukowe). Poza względami formalnymi nie sądzę, aby uprawnione było zaliczanie ich do dorobku w dziedzinie matematyki. Dodatkowo praca [9] ma charakter artykułu umieszczonego materiałach pokonferencyjnych (conference proceedings).

Prace dr Michalak były cytowane (bez autocytowań): wg. Web of Science 21 razy oraz wg. MathSciNet – 7 razy ([10]), a h-index wynosi 4 (wg. WoS). Jej prace publikowane są czasopismach o zasięgu międzynarodowym o dobrej lub średniej jakości. Oprócz problematyki dotyczącej teorii stabilności (9 artykułów licząc włącznie z publikacjami z osiągnięcia habilitacyjnego), dr Michalak ma dorobek w zakresie teorii optymalizacji i jej zastosowań w ekonomii matematycznej, optymalizacji wielokryterialnej i wektorowej z aplikacjami numerycznymi. Pewne niepublikowane wyniki ma także w zakresie zastosowań teorii sieci neuronowych w kardiologii (wspomniane pozycje [1], [2]). Nie będę w tym miejscu odnosić się do zawartości tego dorobku, ani oceniać jego jakości merytorycznej.

Pani dr Anna Michalak jest dość aktywna na polu okołonaukowym. Brała udział (z referatami) w kilkunastu międzynarodowych i krajowych konferencjach, odbyła krótki (tygodniowy) staż zagraniczny w Portugalii. Niestety nie nawiązała jeszcze owocnej współpracy naukowej z badaczami poza Łodzią; można wszakże liczyć, że rozpoczęta współpraca z naukowcami z łódzkiego Uniwersytetu Medycznego przyniesie wymierne rezultaty. Ma ona także pewne osiągnięcia w pracy organizacyjnej na rzecz macierzystego Wydziału Ek.-Soc. UŁ, gdzie bierze czynny udział w realizacji projektów w ramach inicjatywy IDUB. Godna uwagi jest jej działalność popularyzatorska i charytatywna na rzecz dzieci. Praca dydaktyczna p. dr Michalak prowadzona jest na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym UŁ.

[10] W bazie MathRev indeksowanych jest tylko 14 prac.

Podsumowanie: Biorąc pod uwagę powyższą recenzję oraz sformułowane już oceny stwierdzam, że osiągnięcie habilitacyjne pt. *Nowe metody badania stabilności rozwiązań równań różniczkowych*, a także całość dorobku naukowego i organizacyjnego pani dr Anny Michalak **nie** spełnia wymagań ustawowych i zwyczajowych stawianych przed osobami ubiegającymi się o stopień doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Tym samym **nie rekomenduję** Komisji Habilitacyjnej nadania dr Annie Michalak **stopnia doktora habilitowanego.**

Wojciech Krzyszewski