

LAMA Laboratoire de Mathématiques, UMR 5127 de CNRS

Professor Krzysztof Kurdyka

UNIVERSITE SAVOIE MONT BLANC
Laboratoire de Mathématiques (LAMA) UMR 5127
73-376 Le Bourget-du-Lac cedex FRANCE
tel. 04 79 75 86 61 ,fax 04 79 75 81 42
e-mail: Krzysztof.Kurdyka@univ-savoie.fr

Le Bourget-du-Lac, 28 sierpnia 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Abdulljabara Naji Ahmeda Abdullaha

Promotorem dysertacji zatytułowanej « Logarytmiczne uwypuklenie wielomianów » jest Profesor Stanisław Spodzieja. Praca została przygotowana w Uniwersytecie Łódzkim na Wydziale Matematyki i Informatyki.

Tematyką tej rozprawy jest badanie własności funkcji wielomianowych z punktu widzenia zastosowań w teorii optymalizacji.

Wyznaczanie minimów i punktów krytycznych funkcji wielu zmiennych, w szczególności funkcji wielomianowych, jest centralnym problemem optymalizacji, który pojawia się w rozwiązywaniu zagadnień w świecie rzeczywistym. W przypadku funkcji wypukłej, w szczególności funkcji silnie wypukłej, problem ten jest teoretycznie łatwiejszy do rozwiązania.

Stąd pochodzi idea « uwypuklenie » funkcji, takiej modyfikacji by stała się wypukłą. Są znane dwie naturalne metody realizacji tej idei : *addytywna* (przez dodanie pewnej funkcji wypukłej $a(x)$) i w przypadku gdy funkcja jest nieujemna, metoda *multyplikatywna* (mnożenie przez pewną funkcję wypukłą $b(x)$).

Metoda addytywna znana jest co najmniej od lat 60-tych, pojawia się w pracach J-J. Moreau. Metoda multiplikatywna była przedstawiona i rozwinięta we wspólnej mojej pracy z promotorem ([KS] SIAM J. Opt. 2015), gdzie funkcja $b(x)$ była postaci $(1 + |x - \xi|^2)^N$. W dysertacji autor uogólnia i rozwija wyniki z pracy [KS].

W pierwszym rozdziale przedstawia podstawowe własności funkcji wypukłych i logarytmicznie wypukłych (tzn. takich, których logarytm jest funkcją wypukłą). W szczególności dowodzi, że odwzorowanie $(1/f) \nabla f$ jest iniektywne dla funkcji f logarytmicznie wypukłej. Ta obserwacja jest kluczowa dla rezultatów w dalszej rozdziałach.

W rozdziale drugim autor przeprowadza szczegółową ilościową analizę problemu addytywnego i moltiplikatywnego uwypuklania wielomianów. Problem ten jest bardzo subtelny w przypadku gdy dziedzina funkcji jest nieograniczona, bo wymaga delikatnych oszacowań dla logarytmicznie wypukłej funkcji $a(x)$ i odpowiednio $b(x)$. Ten przypadek jest badany w rozdziale trzecim.

W rozdziale czwartym, przy ustalonym składniku uwypuklającym $a(x)$ i dostatecznie dużym $N > 0$, dla wielomianu f zacieśnionego do zbioru wypukłego X , autor rozważa funkcje wypukłe $\phi_{N,y}(y) = Na(x - y) + f(x)$, zatem odwzorowanie

$k_N(y) = \operatorname{argmin}_{x \in X} \phi_{N,y}(x)$, jest dobrze określone. Autor dowodzi bardzo interesujące własności tego odwzorowania: jest ono dyfeomorfizmem, jego punkty stałe są punktami krytycznymi funkcji f . Iteracja odwzorowania $k_N(y)$ jest zbieżna do (lokalnej) retrakcji na zbiór punktów krytycznych funkcji f . Dowód jest wysoce nietrywialny. Najpierw dowodzi, za pomocą zasady porównywania, że przy ustalonym y ciąg iteracji $k_N(y)$ jest zbieżny. Następnie dzięki subtelnym oszacowaniom tempa zbieżności otrzymuje fakt, że granica ciągu iteracji $k_N(y)$ jest funkcją ciągłą. Wyniki tego rozdziału są prawdziwe przy założeniu, że X jest zbiorem ograniczonym.

W rozdziale piątym autor otrzymuje analogiczne wyniki w przypadku gdy X jest zbiorem nieograniczonym. Wymaga to użycia składnika uwypuklającego $a(x)$, który jest logarytmicznie wypukły. Na przykład $a(x) = \exp(|x|^2)$. Przypadek ten jest technicznie jeszcze bardziej zaawansowany.

W ostatnim rozdziale autor bada uwypuklenie moltiplikatywne wielomianu f dodatniego na zbiorze X wypukłym i ograniczonym, z czynnikiem uwypuklającym $b(x) = \exp(|x|^2)$. Dowodzi, że wówczas odwzorowanie $k_N(y)$ (dokładniej jego odpowiedni analog) jest dyfeomorfizmem analitycznym i semialgebraicznym. Przy ustalonym y ciąg iteracji $k_N(y)$ zbiega do punktu krytycznego wielomianu f . Autor podejmuje się bardzo ambitnego zadania udowodnienia, że odpowiedni ciąg siecznych ma granice. Jest to dyskretna wersja hipotezy René Thoma (udowodnionej w roku 2000). Udaje mu się ją udowodnić przy dodatkowym założeniu, że w punkcie granicznym forma jednorodna najwyższego stopnia jest dodatnia. Jest to wysoce nietrywialny wynik.

Podsumowanie recenzji

Wyniki uzyskane przez autora stanowią znaczący wkład w dziedzinę. Praca jest dobrze zredagowana, części techniczne udało się autorowi przedstawić w klarowny i przystępny sposób. Autor wykazał się wszechstronną znajomością stanu wiedzy w dziedzinie rozprawy.

Stwierdzam, że przedstawiona przez Abdulljabara Naji Ahmeda Abdullaha rozprawa spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Profesor Krzysztof Kurdyka