RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. ABDULLJABARA NAJI AHMEDA ABDULLAHA, ZATYTUOWANEJ *LOGARYTMICZNE UWYPUKLENIE WIELOMIANÓW*

Rozprawa dotyczy podstawowego problemu teorii optymalizacji jakim jest zagadnienie wyznaczania minimalniej wartości funkcji wielomianowej rzeczywistej na zbiorze wypukłym oraz punktów, w których ta minimalna wartość jest przyjęta. Z punktu widzenia ogólnej koncepcji, rozprawa stanowi uogólnienie i pogłębienie metod, które wcześniej były rozwinięte w pracach promotora rozprawy profesora Stanisława Spodzieji wspólnie z innymi matematykami. Podstawową ideą jest zastąpienie wyjściowej funkcji wielomianowej (lub ogólniej, funkcji klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $k \geqslant 2$), nazwijmy ją f, przez rodzinę parametryczną funkcji ściśle wypukłych, nazwijmy ją $\{\psi_\xi\}_\xi$, których minima będą w korzystny sposób aproksymowały minimum f. Fenomen polega na tym, że przy odpowiednim doborze rodziny $\{\psi_\xi\}_\xi$, jeśli $\kappa(\xi)$ oznacza punkt osiągania minimum przez funkcję ψ_ξ, to ciąg iteracji $\{\kappa^\nu(\xi)\}_\nu$ jest zbieżny do punktu krytycznego (przy dodatkowych założeniach, do punktu osiągania minimum) funkcji f.

Rozprawa składa się ze streszczenia w języku angielskim, z obszernego wstępu oraz z sześciu rozdziałów. Zaopatrzona jest też w skorowidz oraz wykaz użytych oznaczeń. W rozdziale pierwszym autor przytacza różne warianty pojęcia funkcji wypukłej. Okazuje się, że zwykłe pojęcie funkcji wypukłej, czy nawet ściśle wypukłej jest niewystarczające dla omawianej teorii. Potrzebne jest znacznie mocniejsze pojęcie funkcji silnie wypukłej (pochodna kierunkowa drugiego rzędu ograniczona od dołu przez stałą dodatnią), a nawet jeszcze mocniejsze - funkcji logarytmicznie silnie wypukłej (logarytm funkcji jest silnie wypukły). W szczególności, funkcja ściśle wypukła na wypukłym domkniętym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ może nie przyjmować wartości minimalnej (np $f(t) = \exp(t)$, dla $t \in \mathbb{R}$), podczas gdy funkcja silnie wypukła przyjmuje zawsze swoją wartość minimalną w dokładnie jednym punkcie zbioru. Wynika stąd, że w przypadku rodziny $\{\psi_\xi\}_{\xi \in X}$ funkcji $\psi_\xi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ silnie wypukłych na domkniętym i wypukłym zbiorze $X \subset \mathbb{R}^n$ mamy poprawnie określone odwzorowanie $\kappa : X \ni \xi \longmapsto \operatorname{argmin}_X \psi_\xi \in \mathrm{X}$, które w całej rozprawie odgrywa zasadniczą rolę.

W rozdziale drugim i trzecim autor omawia podstawowe metody uwypuklania wyjściowej funkcji f. Zasadniczo sprowadzają się one albo do pomnożenia f przez funkcję silnie (lub logarytmicznie silnie) wypukłą, z uwzględnieniem parametru ξ, albo do dodania do funkcji f funkcji silnie (lub logarytmicznie silnie) wypukłej, również z uwzględnieniem parametru. W rezultacie, przy spełnieniu stosownych warunków, otrzymuje się rodzinę funkcji (logarytmicznie) silnie wypukłych $\{\psi_\xi\}_\xi$. Istotne znaczenie ma to czy zbiór wypukły X jest zwarty, i wtedy istnieją dodatkowe możliwości efektywnych oszacowań, czy nieograniczony. Wydaje się, że przypadek zbioru nieograniczonego, jako trudniejszy, jest szczególnym celem rozprawy. Osobno potraktowany jest przypadek, gdy f jest wielomianem, zwłaszcza z punktu widzenia efektywności procedury.

Pozostałe trzy rozdziały poświęcone są drobiazgowej analizie własności odwzorowania $\kappa : X \ni \xi \longmapsto \mathrm{argmin}_X \psi_\xi \in \mathrm{X}$ oraz ciągu $\{\kappa^\nu\}_\nu$ jego iteracji, w zależności od tego która metoda uwypuklenia została zastosowana. Centralną własnością jest oczywiście to, że przy odpowiednich założeniach $\lim_{\nu \to \infty} \kappa^\nu(\xi)$ istnieje dla dowolnego $\xi \in X$ i jest punktem krytycznym funkcji f. Badane jest także przy jakich założeniach κ jest ciągłe i klasy $\mathcal{C}^k$ oraz kiedy zbieżność ciągu κ^ν jest lokalnie jednostajna. Dodatkowe możliwości pojawiają się, gdy założy się dodatkowo, że f jest funkcją semialgebraiczną klasy $\mathcal{C}^2$, na przykład wielomianem. Autor wykazuje, że w takiej sytuacji analizę zbieżności ciągu $\{\kappa^\nu\}_\nu$ można efektywnie przeprowadzić wykorzystując gradientową nierówność Łojasiewicza w podobny sposób jak w dowodzie Kurdyki, Mostowskiego i Parusińskiego hipotezy gradientowej Thoma. Wydaje się, że ta część rozprawy wnosi najwięcej nowego do istniejącej teorii. Szczególnie oryginalne jest znalezienie analogii, poprzez nierówność Łojasiewicza, z własnościami potoku gradientowego i hipotezą gradientową.

Główną wadą omawianej rozprawy jest jej strona redakcyjna. Tekst bardzo ambitny i zaawansowany z matematycznego punktu widzenia napisany jest niestarannie. Najwyraźniej autor po napisaniu rozprawy nie dokonał końcowego sprawdzenia. Odsyłacze do cytowanej literatury są nieprecyzyjne lub wręcz błędne. W lemacie 2.2.4 brakuje założenia, że b jest logarytmicznie μ-silnie wypukła. Są też nieścisłości rachunkowe; na przykład równanie kwadratowe na stronie 58 zostało źle rozwiązane. Roi się od błędów literowych. Mankamenty takie, których niestety jest sporo, utrudniają czytanie rozprawy i muszą wpływać negatywnie na jej ocenę.

Konkludując uważam, że rozprawa doktorska mgr. Abdulljabara Naji Ahmeda Abdullaha jest wartościowym wkładem do teorii optymalizacji. Doktorant wykazał się dobrą znajomością nie tylko dotychczas opublikowanej literatury przedmiotu, ale także metod, które stanowią nowum rozprawy, czyli geometrii semialgebraicznej, a w szczególności tak subtelnych zagadnień jak gradientowa nierówność Łojasiewicza. Uważam, że pomimo wymienionych wyżej mankamentów rozprawa może stanowić podstawę do przyznania doktoratu z matematyki. Wnoszę o dopuszczenie mgr. Abdulljabara Naji Ahmeda Abdullaha do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Kraków, 4 lipca 2023 r.

Wiesław Pawłucki